

Trattato di Elettricità e di Magnetismo

J. Clerck Maxwell - professore di fisica sperimentale
all'università di Cambridge

Tradotto dalla seconda edizione inglese da G. Séligmann-lui studente anziano dell'École Polytechnique, Ingegnere telegrafico con note e chiarimenti di MM. Cornu, dell'istituto Potier e Sarrau, professore all'École Polytechnique

Gauthier Villars - 1885

Avvertenza dell'Editore

In questa edizione francese, il testo dell'illustre Maxwell è stato scrupolosamente rispettato; ma, in virtù anche della fedeltà con la quale il traduttore ha seguito l'originale, si è valutato utile aggiungere qualche chiarimento destinato a facilitare lo studio di quest'Opera ai lettori poco familiarizzati con le forme dell'insegnamento inglese. Per lo stesso scopo, si è completata l'Opera con Note su certe questioni che non sono ancora comprese nel nostro insegnamento (Teoria dei Quaternioni, Teoria delle sferiche armoniche, ecc.) e, da richiami bibliografici.

Sotto questa forma, l'edizione francese può essere letta con profitto dai nostri professori e anche dagli studenti delle facoltà e delle scuole speciali.

Con il progresso che si compie tutti i giorni nell'utilizzo pratico dell'Elettricità, gli ingegneri elettrici sono portati inevitabilmente a perfezionare le loro conoscenze teoriche, specialmente in ciò che riguarda le misure elettriche. L'opera di Maxwell contiene precisamente un buon numero di Capitoli, di facile lettura, dove si trovano esposte, con una perfetta chiarezza, le teorie di questi metodi rigorosi il cui utilizzo è divenuto così generale. Le note relative alle questioni sollevate dal recente congresso degli elettrici aggiungeranno ancora all'interesse che si associa attualmente a questi studi. L'ingegneria elettrica troverà quindi pure grande profitto nel consultare e meditare il libro di Maxwell.

G-V

Prefazione alla prima edizione

Il fatto che certi corpi, dopo essere stati sfregati, mostrino di attirare altri corpi, era noto sin dagli antichi. Nei tempi moderni, si è osservata una grande varietà di altri fenomeni che sono stati riconosciuti come collegati a questi fenomeni di attrazione; li si è classificati sotto il nome di fenomeni *elettrici*, essendo l'ambra la sostanza a proposito della quale essi sono stati descritti per la prima volta.

Si sa da lungo tempo che altri corpi, in particolare la magnetite e parti di ferro e di acciaio che sono stati sottoposti a certe operazioni, producono fenomeni di azione a distanza. Si è riconosciuto che questi fenomeni, e altri che ne dipendono, rinviano a fenomeni elettrici; e li si è classificati sotto il nome di fenomeni *magnetici*, la magnetite essendo stata trovata presso Magnesia in Tessaglia.

Da allora, si è riconosciuta l'esistenza di una relazione tra queste due classi di fenomeni; e le relazioni tra i diversi fenomeni di queste due classi, per quanto sono noti, costituiscono la scienza dell'Elettromagnetismo.

In questo trattato, mi propongo di descrivere i più importanti di questi fenomeni, di mostrare come li si può sottoporre alla misura e ricercare le relazioni matematiche che esistono tra le grandezze misurate. Avendo così ottenuto i dati di una teoria matematica dell'Elettromagnetismo e avendo mostrato come questa teoria si può applicare al calcolo dei fenomeni, mi sforzerò di mettere in luce, il più chiaramente possibile, i rapporti che esistono tra le forme matematiche di questa teoria e quelle della scienza fondamentale della Dinamica; così, saremo, in una certa misura, preparati a definire la natura dei fenomeni dinamici tra i quali dobbiamo cercare analogia o spiegazioni dei fenomeni elettromagnetici.

Nella descrizione dei fenomeni, sceglierò quelli che mettono maggiormente in evidenza le idee fondamentali della teoria, passando sopra gli altri o nell'attesa che il lettore sia più maturo.

Dal punto di vista matematico, ciò che in un fenomeno occupa il posto più importante, sono gli elementi misurabili. Considererò pertanto i fenomeni elettrici soprattutto in vista della loro misura, descriverò i metodi e definirò le unità dalle quali dipende questa misura.

Nell'applicazione delle Matematiche al calcolo delle grandezze elettriche, mi sforzerò di dedurre dai dati di cui disponiamo le conseguenze più generali; in seguito, applicherò questi risultati ai casi più semplici che si possono scegliere. Per quanto possibile, eviterò le questioni che, benché abbiano dato lustro all'abilità dei matematici, non hanno nulla da aggiungere a ciò che sappiamo sulla Scienza.

Le relazioni che esistono tra i diversi settori compresi nella Scienza che andiamo a studiare sono più numerosi e più complessi che in tutte le altre scienze note fino ad oggi; e le relazioni che l'elettricità ha, da una parte con la Dinamica, dall'altra con il calore, la luce, l'azione chimica e la struttura dei corpi, sembrano indicare l'importanza del tutto particolare della Scienza elettrica nell'aiutarci a comprendere la natura.

Mi sembra quindi che lo studio dell'Elettromagnetismo in tutti i suoi sviluppi è divenuto di primaria importanza, per metterci in grado di spingere più lontano i progressi della Scienza.

Le leggi matematiche di differenti classi di fenomeni sono, in generale, state stabilite in modo soddisfacente.

Le relazioni tra diverse classi di fenomeni sono pure state studiate e, man mano sono state meglio conosciute, l'esattezza e il rigore delle leggi sperimentali sono divenute sempre più probabili.

Infine, negli sforzi fatti per ridurre l'Elettromagnetismo a essere solo una scienza dinamica, si è realizzato qualche progresso: si è fatto vedere che nessun fenomeno elettromagnetico contraddice l'ipotesi che esso dipende puramente da un'azione dinamica.

Tuttavia, ciò che si è fatto finora è lontano dall'aver esaurito il campo delle ricerche elettriche: ma piuttosto questo campo si è ampliato, nuovi argomenti di studio sono stati segnalati, nuove risorse sono state offerte alle ricerche.

Non c'è bisogno di dilungarsi sull'utilità degli studi magnetici per la navigazione, di ricordare quanto è importante conoscere su una nave la direzione reale della bussola e l'azione delle masse

ferrose. Ma i lavori di coloro che si sono sforzati di accrescere la sicurezza della navigazione per mezzo delle osservazioni magnetiche hanno nello stesso tempo fatto compiere grandi progressi alla Scienza pura.

È in qualità di membro dell'Unione magnetica tedesca che Gauss fu condotto a portare la sua potente intelligenza sulla teoria del magnetismo e sui metodi di osservazione; e non solo egli accrebbe grandemente le nostre conoscenze sulla teoria delle attrazioni, ma anche rinnovò l'insieme della scienza magnetica, per quanto concerne gli strumenti che impiega, il modo di osservarli e di calcolare i risultati; di modo che le sue Memorie sul magnetismo terrestre possono essere prese come modelli di ricerca fisica da tutti coloro che si occupano di misurare una delle forze della natura.

Le importanti applicazioni dell'elettromagnetismo alla telegrafia hanno pure avuto il loro effetto sulla scienza propriamente detta, dando alle misure elettriche esatte un valore commerciale, permettendo agli elettrici di fare degli strumenti un uso più esteso di quanto possibile nella comune pratica di laboratorio. Questo bisogno di conoscenze elettriche, queste occasioni di acquisire dall'esperienza, hanno già avuto conseguenze importanti, sia stimolando l'attività degli elettrici già avanti nella scienza, sia distribuendo tra i praticanti conoscenze che presentano un alto grado di precisione, condizione favorevole al progresso scientifico in generale nell'arte dell'ingegneria.

Non mancano opere dove i fenomeni elettrici o magnetici sono descritti in forma popolare; ma non è questo che richiedono coloro che sono stati messi di fronte a grandezze da misurare e la cui intelligenza non si soddisfa con le sole esperienze del corso.

Esiste anche un numero considerevole di memorie matematiche di grande importanza per la scienza elettrica; ma esse sono sepolte in voluminosi bollettini delle società scientifiche; non formano un insieme coerente, sono valori molto disuguali e, per la maggior parte, sarebbero comprese solo da matematici di professione.

Per questo ho pensato che sarebbe utile fare un trattato, dove l'insieme del tema sarebbe ripreso in modo metodico e dove si indicherebbe, per ogni sua parte, come possa essere sottoposto a verifica da misure dirette.

Lo spirito generale di questo trattato è assai diverso da quello di numerose opere eccellenti sull'elettricità, pubblicate per la maggior parte in Germania; e potrà sembrare che non si è resa giustizia alle speculazioni di numerosi elettrici e matematici illustri. La ragione sta nel fatto che iniziando lo studio dell'elettricità ho deciso di non leggere alcun lavoro matematico sull'argomento, prima di possedere a fondo le *Ricerche sperimentali sull'elettricità* di Faraday. Sapevo che si credeva in una differenza tra la concezione che Faraday e dei matematici riguardo ai fenomeni, di modo che né lui né loro erano soddisfatti delle forme di linguaggio dell'altro. Era convinto che questa differenza non si riferiva all'errore dell'uno o dell'altro; io tenevo questa convinzione di Sir William Thomson¹: è ai suoi consigli, al suo aiuto, così come alle sue memorie pubblicate, che devo la maggior parte di quanto ho appreso su questo argomento.

Con l'avanzare dello studio di Faraday, percepivo che il suo modo di concepire i fenomeni era assai matematica, sebbene non presentata sotto la forma convenzionale dei simboli matematici. Ho riconosciuto che quelle idee potevano essere espresse nelle forma matematiche abituali ed essere così confrontate a quelle dei matematici di professione.

Per esempio, Faraday, nelle sue concezioni, vedeva linee di forza attraversare tutto questo spazio dove i matematici consideravano solo centri di forza agenti a distanza; Faraday faceva intervenire un mezzo là dove essi tenevano conto solo della distanza; Faraday cercava l'origine dei fenomeni nelle azioni reali che si esercitavano in questo mezzo: essi si accontentavano di trovare in una proprietà l'agire a distanza attribuito ai fluidi elettrici.

Quando ebbi tradotto sotto forma matematica ciò che io considerava come le idee di Faraday, riconobbi che in generale i risultati dei due metodi concordavano, di modo che i due metodi rendono conto degli stessi fenomeni e portano alle stesse leggi; ma il metodo di Faraday si

¹Colgo questa occasione per riconoscere gli obblighi che devo a Sir William Thomson e al professor Tait, per tanti preziosi consigli che mi hanno dato durante la stampa di questo libro.

avvicina a quelli dove si parte dall'insieme per arrivare alle parti con l'analisi, mentre il principio dei metodi matematici ordinari è di iniziare dalle parti e di innalzare tutto l'edificio per via della sintesi.

Ho così riconosciuto che numerosi dei più fecondi metodi di ricerca scoperti dai matematici potevano ricevere, per mezzo di idee derivate da quelle di Faraday, una forma preferibile alla loro espressione iniziale.

Così l'insieme delle teoria del potenziale, considerata come grandezza che soddisfa a una data equazione alle differenze parziali, appartiene essenzialmente a ciò che ho chiamato il *metodo di Faraday*. Nell'altro metodo, il potenziale, supposto che si faccia solo intervenire questa considerazione, deve essere considerato come il risultato della sommatoria dei quozienti ottenuti divenuti ogni massa elettrica per la sua distanza da un punto fisso. È per questo che buon numero di scoperte matematiche di Laplace, Poisson, Gree e Gauss trovano il loro posto in questo Trattato e la loro reale espressione per mezzo di idee prese in prestito per la maggior parte da Faraday.

Grandi progressi sono stati fatti nelle scienze elettriche, soprattutto in Germania, da uomini che preferivano la teoria dell'azione a distanza. Le precise misure elettriche di Weber sono interpretate da lui entro questa teoria; le speculazioni elettromagnetiche la cui origine risale a Gauss, e che sono state poi sviluppate da Weber, Riemann, J. e C. Neumann, Lorenz, ecc., sono fondate sulla teoria dell'azione a distanza; ma esse dipendono, o direttamente dalla velocità relativa delle molecole, o dalla propagazione graduale di qualche cosa, potenziale o forza, di una molecola all'altra. I brillanti successi che questi uomini eminenti hanno ottenuto nell'applicazione delle matematiche ai fenomeni elettrici danno, ed è del tutto naturale, più peso ancora alle loro considerazioni teoriche; di modo che coloro che, studiando l'elettricità, si rivolgono a questi maestri come alle più alte autorità in fatto di elettricità matematica, si penetrano senza dubbio delle loro ipotesi fisiche così come dei loro metodi matematici.

Queste ipotesi fisiche sono del tutto estranee al modo di esaminare le cose che ho adottato; e uno degli obiettivi che avevo visto, scrivendo il trattato, è di dare ai lettori che desiderano studiare l'elettricità il mezzo per vedere che vi è un altro modo di trattare l'argomento, del tutto in grado di spiegare i fenomeni, e che, sebbene sembri meno preciso su certi punti, corrisponde più esattamente, a mio parere, allo stato attuale delle nostre conoscenze, tanto per quello che afferma quanto per quello che lascia di indeciso.

Inoltre, è molto importante, da punto di vista filosofico, confrontare due metodi che sono riusciti entrambi a spiegare i principali fenomeni elettromagnetici, che hanno entrambi cercato di spiegare la propagazione della luce con un fenomeno elettromagnetico, che ne hanno effettivamente calcolato la velocità, e che tuttavia sono essenzialmente differenti, sia per la concezione fondamentale del fenomeno che si produce sia per le concezioni secondarie delle grandezze che si esaminano.

Per questo ho fatto ufficio di avvocato piuttosto che di giudice; ho sviluppato uno dei metodi piuttosto che tentare di descrivere imparzialmente i due. Non dubito che ciò che ho chiamato il metodo tedesco non trovi pure difensori e non sia esposto con un talento degno della sua ingegnosità.

Non ho pensato di esaurire la materia e di rendere conto di tutti i fenomeni, di tutte le esperienze, di tutti gli strumenti elettrici. Il lettore che desidera conoscere tutto ciò che è stato fatto su questo argomento troverà un grande aiuto nel *Traité d'électricité* del professor A. de la Rive e in numerose opere tedesche, come il *Galvanismus* di Wiedemann, la *Reibungselektricität* di Riess, l'*Einleitung in die Elektrostatik* di Beer, ecc.

Mi sono limitato quasi unicamente allo sviluppo matematico dell'argomento: ma al lettore che ha già appreso, dall'esperienza se è possibile, quelli che sono i fenomeni da osservare, raccomanderei di leggere con cura le *Ricerche sperimentali sull'elettricità* di Faraday. Vi troverà, nella loro esatta successione storica, il racconto fatto giorno per giorno di alcune delle scoperte e delle ricerche elettriche più importanti, perseguite con un ordine e un concatenamento che non potrebbe essere più perfetto, se il risultato fosse stato conosciuto in anticipo, e esposte

nel linguaggio di un uomo che dedicava una grande attenzione alla maniera di descrivere le operazioni scientifiche e i loro risultati².

Per studiare non importa quale questione, è sempre preferibile leggere le memorie originali, poiché si assimila meglio una scienza nascente; e, nel caso delle *Ricerche* di Faraday, questo studio è relativamente facile, poiché tutte le memorie sono state pubblicate separatamente, e possono essere lette le une dopo le altre. Se, per qualche parte di questo libro, ho potuto aiutare un lettore a comprendere le forme di pensiero e di espressione di Faraday, considererei di aver raggiunto uno dei miei principali obiettivi; far condividere ad altri il piacere che ho provato io stesso nel leggere le *Ricerche* di Faraday.

La descrizione dei fenomeni, e le parti elementari della teoria di ogni argomento, si trovano nei primi capitoli di ognuna delle quattro parti nelle quali è diviso il trattato. Il lettore troverà in questi capitoli cosa può dargli la conoscenza elementare dell'insieme della scienza.

Gli altri capitoli di ogni parte sono riempiti dagli sviluppi teorici di un livello più elevato, dai procedimenti di calcolo numerico, dagli strumenti e metodi di ricerca sperimentale.

Le relazioni tra i fenomeni elettromagnetici e quelli della radiazioni, la teoria delle correnti elettriche molecolari, infine i risultati delle speculazioni sulla natura dell'azione a distanza, sono trattati nei quattro ultimi capitoli del secondo volume.

1° febbraio 1873.

Prefazione alla seconda edizione

Quando mi si chiese di rileggere le bozze dell'Elettricità e Magnetismo, la stampa era già giunta al IX capitolo, la maggior parte del quale era già stata rivista dall'Autore.

Coloro che hanno familiarità con la prima edizione, vedranno, confrontandola a questa, l'estensione dei cambiamenti che il professor Maxwell si proponeva di introdurre nell'esposizione dell'argomento; essi comprenderanno quanto questa edizione ha perso per la morte prematura dell'Autore. I primi nove capitoli sono stati in certi casi interamente rimaneggiati, numerose aggiunte sono state fatte, e il testo originario è stato rimaneggiato e semplificato.

A partire del IX capitolo, la presente edizione è poco più di una ristampa. Le sole libertà che mi sono preso sono state quelle di ristabilire un intermediario nel ragionamento matematico, quando ciò mi sembrava vantaggioso per il lettore; ho pure aggiunto alla base delle pagine alcune note sui punti che, secondo la mia esperienza o di quella dei miei studenti, sembravano richiedere qualche spiegazione complementare. Queste note sono messe tra virgolette.

Avevo, a mia conoscenza, due punti che il professore si proponeva di modificare profondamente: la teoria matematica della conduzione dell'elettricità in un rete di conduttori e la determinazione dei coefficienti di induzione nelle bobine. Ma le note del professore non mi hanno permesso di aggiungere al testo della prima edizione nulla di importante su questo argomento, salvo una tavola numerica riprodotta nel secondo volume. Questa tabella sarà molto utile per il calcolo dei coefficienti di induzione nelle bobine circolari.

In un'Opera così originale, contenente tanti dettagli su nuovi risultati, era impossibile, che non vi fosse qualche errore nella prima edizione. Si troverà, spero, che la maggior parte di questi errori è stata corretta nella presente edizione. Ho tanto più motivo di sperare che, per rivedere una parte delle prove, ho avuto l'assistenza di numerosi dei miei amici che conoscono bene l'opera, tra i quali devo citare in modo del tutto particolare mio fratello il professore Charles Niven e M. J. J. Thomson, aggregato al College della Trinità a Cambridge.

W. D. Niven

Trinity College, Cambridge, 1 ottobre 1881.

²*Vita e lettere di Faraday.*

Preliminari - Misura delle grandezze

1. L'espressione di ogni grandezza si compone di due fattori o elementi. Uno dei due è il nome di una certa grandezza ben nota, che è della stessa specie delle grandezze da esprimere e che si sceglie come campione di misura. L'altro elemento è il numero di volte che bisogna prendere il campione per riprodurre la grandezza di volume. In linguaggio tecnico, la grandezza che serve da campione è detta *l'unità*; e il numero è chiamato *valore numerico della grandezza*.

Servono tante unità diverse quante sono le diverse specie di grandezza da misurare; ma, in tutte le scienze dinamiche, è possibile definire queste unità per mezzo di tre unità fondamentali di lunghezza, di tempo e di massa. Così le unità di area e di volume sono definite come il quadrato e il cubo aventi per lato l'unità di lunghezza.

Qualche volta tuttavia si trovano parecchie unità della stessa specie stabilite in base a considerazioni indipendenti. Così il gallone, cioè il volume di dieci libbre d'acqua, serve da unità di capacità così come il piede cubico. Il gallone può essere una misura conveniente in alcuni casi, ma non è una misura sistematica, poiché la sua relazione numerica con il piede cubico non è un numero intero tondo.

2. Per costruire un sistema matematico, supponiamo assegnate le unità fondamentali di tempo, lunghezza e massa, e ne deduciamo tutte le diverse unità, per mezzo delle più semplici definizioni alle quali ci è possibile pervenire.

Le formule alle quali arriviamo devono essere tali che un uomo di qualsiasi paese, sostituendo ai diversi simboli i valori numerici delle grandezze misurate tramite le unità adottate dalla sua nazione, ottenga un risultato esatto.

È della massima importanza, in tutte le ricerche scientifiche, impiegare unità appartenenti a un sistema ben definito e conoscere le relazioni tra queste unità e quelle fondamentali, di modo che si possa immediatamente tradurre i risultati da un sistema a un altro.

Il modo migliore di ottenerlo è di determinare le dimensioni di ogni unità in funzione di tre unità fondamentali. Quando una unità data varia come n^{esima} potenza di queste unità fondamentali, si dice che è n dimensioni rispetto a questa unità.

Per esempio, l'unità scientifica di volume è sempre il cubo avente per lato l'unità di lunghezza. Se l'unità di lunghezza varia, l'unità di volume varia proporzionalmente al suo cubo e si dice che l'unità di volume è a tre dimensioni rispetto all'unità di lunghezza.

La conoscenza delle unità fornisce una verifica che deve essere fatta per ogni equazione risultante da una ricerca un poco estesa. In una tale equazione, le dimensioni di ogni termine rispetto a ciascuna delle unità fondamentali devono essere le stesse. Se così non fosse, l'equazione è assurda e contiene qualche errore; poiché la sua interpretazione sarebbe differente per i diversi sistemi arbitrari di unità scelti³.

Le tre unità fondamentali. 3. 1° Lunghezza. - In Inghilterra, l'unità di lunghezza nelle questioni scientifiche è il piede, cioè un terzo di yarda campione conservato al Tesoro.

In Francia e negli altri paesi che hanno adottato il sistema metrico, è il metro. Teoricamente, il metro è la decimilionesima parte della lunghezza di un meridiano terrestre misurato dal polo all'equatore; ma, in effetti, è la lunghezza di un campione conservato a Parigi, che Borda aveva costruito per rappresentare, alla temperatura del ghiaccio fondente, la lunghezza precedente, come l'aveva misurata Delambre. Non si è modificato il metro per accordarlo con le nuove misure della Terra più esatte, ma si valuta l'arco di meridiano per mezzo del metro originario.

³La teoria delle dimensioni è stata enunciata, per la prima volta, da Fourier, (*Théorie de la chaleur*. §100.)

In Astronomia, si prende talvolta come unità di lunghezza la distanza media tra la Terra e il Sole.

Nello stato attuale della scienza, l'unità di lunghezza più generale che si potrebbe prendere sarebbe la lunghezza d'onda, nel vuoto, di una certa luce emessa da qualche corpo largamente diffuso, il sodio per esempio, il cui spettro contiene righe ben definite. Questa unità sarebbe indipendente da ogni cambiamento nelle dimensioni della Terra e deve essere adottata da coloro che si vantano che i loro scritti dureranno più di questo stesso globo.

Parlando di dimensioni di unità, chiameremo l'unità di lunghezza $[L]$. Se l è il valore numerico di una lunghezza, è inteso che essa è espressa in funzione dell'unità concreta $[L]$, di modo che l'espressione sviluppata dalla lunghezza sarà $l[L]$.

4. 2° *Tempo*. - In tutti i paesi civilizzati, l'unità fondamentale si deduce dalla durata della rotazione della Terra attorno al proprio asse. Il giorno siderale, cioè la durata periodica reale della rotazione della Terra, si può determinare con una grande esattezza, per mezzo di osservazioni astronomiche ordinarie, e il giorno solare medio può essere dedotto, conoscendo la durata dell'anno.

L'unità di tempo adottata in tutte le ricerche fisiche è il secondo di tempo solare medio.

In Astronomia, si prende talvolta l'anno come unità di tempo. Si potrebbe ottenere una unità di tempo di un carattere più universale, prendendo il periodo di vibrazioni di questa specie particolare della luce che ha per lunghezza d'onda l'unità di lunghezza.

Chiameremo $[T]$ l'unità di tempo presa in se stessa e t la misura numerica del tempo.

5. 3° *Massa*. - L'unità fondamentale di massa, in Inghilterra, è la libbra avoirdupois, che si conserva presso il Tesoro. Il grano, che funge spesso da unità, è definito come la 7000^a parte di questa libbra.

Nel sistema metrico, è il grammo, che, teoricamente, sarebbe la massa di un centimetro cubo di acqua distillata, a una temperatura e a pressione determinate; e che, in effetti, è la 1000^a parte di un chilogrammo campione conservato a Parigi.

L'esattezza con la quale si possono confrontare le masse di corpi tramite pesata è alquanto superiore a quella che si è potuto raggiungere finora nella misura di lunghezze; così, quando l'operazione è possibile, si devono determinare tutte le masse per confronto diretto con il campione e non con esperienze per mezzo dell'acqua.

In Astronomia descrittiva, la massa del Sole o quella della Terra servono talvolta da unità; ma, in Meccanica celeste, l'unità di massa si deduce dalle unità di tempo e di lunghezza unita attraverso la gravitazione universale. L'unità astronomica di massa è la massa che attrae un altro corpo posto all'unità di distanza tale da imprimergli l'unità di accelerazione.

Se vogliamo costituire un sistema universale di unità, possiamo definire l'unità di massa per mezzo di unità di lunghezza e di tempo precedentemente definite: è ciò che lo stato attuale della scienza ci permette di fare solo approssimativamente; oppure, se speriamo⁴ di essere presto in grado di determinare la massa di una molecola isolata di una sostanza presa come campione, possiamo attendere questa misura prima di fissare un campione universale di massa.

Trattando dimensioni di altre unità, indicheremo l'unità di massa, presa in se stessa, con il simbolo $[M]$, e la assumeremo come una delle tre fondamentali. Quando si prende, come nel sistema francese, una sostanza particolare come campione di densità, l'unità di massa non è più indipendente, ma varia come l'unità di volume, o come $[L^3]$.

Se, come nel sistema astronomico, l'unità di massa è definita per mezzo della sua forza attrattiva, le dimensioni di $[M]$ saranno $[L^3T^{-2}]$.

Infatti, l'accelerazione dovuta a una massa m alla distanza r è, dalla legge di Newton, $\frac{m}{r^2}$. Supponiamo che questa accelerazione agisca in un tempo molto breve t su un corpo inizialmente

⁴Si veda il Professor J. Loschmidt, *Zur Grösse der Luftmoleküle* (Accademia di Vienna, 18 ottobre 1835); G. J. Stuxey, *The internal motion of gases* (Phil. Mag., agosto 1868); e sir W. Thomson, *The size of atoms* (Nature, 31 marzo 1870).

a riposo e che gli faccia percorrere uno spazio s : allora, dalla formula di Galileo,

$$s = \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{r^2}t^2$$

da cui

$$m = \frac{2r^2s}{t^2}$$

Poiché r e s sono lunghezze e t un tempo, questa uguaglianza può essere vera solo se le dimensioni di m sono $[L^3T^{-2}]$. La stessa dimostrazione può essere fatta partendo da ogni qualsiasi equazione astronomica, dove la massa di un corpo appare in alcuni termini e non in tutti⁵.

Unità derivate. 6. L'unità di velocità è la velocità per la quale l'unità di lunghezza è percorsa nell'unità di tempo. Le dimensioni sono $[LT^{-1}]$.

Se adottiamo unità di lunghezza e di tempo derivate dalle vibrazioni luminose, l'unità di velocità è la velocità della luce.

L'unità di accelerazione è l'accelerazione per la quale la velocità cresce dell'unità nell'unità di tempo. Le sue dimensioni sono $[LT^{-2}]$.

L'unità di densità è la densità di una sostanza che contiene l'unità di massa sotto l'unità di volume. Le sue dimensioni sono $[ML^{-3}]$.

L'unità di grandezza di moto è la quantità di moto dell'unità di massa che si muove all'unità di velocità. Le sue dimensioni sono $[MLT^{-1}]$.

L'unità di forza è la forza che produce l'unità di quantità di moto nell'unità di tempo. Le sue dimensioni sono $[MLT^{-2}]$.

Tale è l'unità assoluta di forza, la cui definizione è implicitamente compresa in ogni equazione di Dinamica. Tuttavia, molti libri dove si presentano queste equazioni adottano un'altra unità di forza, cioè il peso dell'unità nazionale di massa; e poi, per soddisfare queste equazioni, essi abbandonano l'unità nazionale di massa e adottano come unità dinamica un'unità artificiale uguale all'unità nazionale divisa per il valore numerico della forza di gravità nel posto in cui ci si trova. In questo modo, si fa dipendere e l'unità di forza e l'unità di massa dal valore della forza di gravità, la quale varia da una località all'altra; e, di conseguenza, enunciati comprendenti questi elementi sono incompleti, se non si conosce la forza di gravità del luogo in cui questi enunciati sono stati riconosciuti veri.

L'abbandono, per tutti gli usi scientifici, di un simile metodo di misura delle forze, è principalmente dovuto all'introduzione da parte di Gauss di un sistema generale di osservazioni della forza magnetica, fatte in regioni dove la forza di gravità non è la stessa. Tutte queste forze si misurano ora secondo il metodo strettamente dinamico che si deduce dalle nostre definizioni e i risultati numerici sono gli stessi, in qualsiasi regione vengano fatte.

L'unità di lavoro è il lavoro compiuto dall'unità di forza che agisce lungo l'unità di lunghezza contata lungo la sua direzione. Le sue dimensioni sono $[ML^2T^{-2}]$.

L'energia di un sistema, cioè la sua capacità di compiere lavoro, ha per misura il lavoro che il sistema è in grado di compiere spendendo tutta la sua energia.

Le definizioni di altre grandezze, e di unità alle quali le si riferisce, saranno date quando ce ne sarà bisogno.

⁵Se si prende per unità il centimetro e il secondo, l'unità astronomica di massa sarà di circa $1,537 \cdot 10^7$ grammi, o di $15,37$ ton, dalle esperienze di Cavendish ripetute da Baily. Baily adotta il numero $5,6604$ come risultato dell'insieme delle sue esperienze sulla densità della Terra, e questo numero, unito ai valori che impiega per le dimensioni della Terra e per l'intensità della gravitazione alla sua superficie, gli dà come risultato diretto delle sue misure il valore indicato in altro. [Infatti, l'accelerazione dovuta alla massa terrestre sarà $981 \times R^2$, se la massa della terrestre concentrata in un punto agisse su un punto posto alla distanza r ; è il valore della massa terrestre in unità astronomiche; il suo valore in unità ordinarie è $5,66 \times \frac{4}{3}\pi R^3$; l'unità astronomica sarà quindi

$$\frac{5,66 \times 4\pi R^3}{3 \times 981 \times R^2} = 0,01537 \frac{\pi}{2} R$$

o, siccome $\frac{\pi}{2} R = 10^9$, $1,537 \cdot 10^7$ grammi.

Quando trasformiamo i valori di grandezze fisiche determinate in funzioni di una unità, per esprimerle in funzione di un'altra unità della stessa specie, dobbiamo solo ricordarci che l'espressione di ogni grandezza comprende due fattori: l'unità e la parte numerica che esprime quante volte si deve prendere tale unità. Di conseguenza, la parte numerica dell'espressione varia in ragione inversa della grandezza dell'unità, cioè in ragione inversa di una potenza di ciascuna delle unità fondamentali, che è indicata dalle dimensioni dell'unità.

Sulla continuità e discontinuità in Fisica⁶. Si dice che una grandezza varia in un modo continuo quando, per passare da un valore ad un altro, deve assumere tutti i valori intermedi.

Possiamo acquisire la nozione di continuità considerando una particella di materia il cui stato è continuo nel tempo e nello spazio. Una tale particella non può passare da una posizione a un'altra senza descrivere una linea continua nello spazio, e le coordinate che fissano la sua posizione sono funzioni continue del tempo.

L'equazione, detta *di continuità*, che si presenta nei trattati di Idrodinamica, esprime il fatto che la materia non può penetrare in un elemento di volume o uscirne senza attraversare le superfici limite dell'elemento.

Si dice che una grandezza è una funzione continua della sua variabile quando, per una variazione continua della variabile, la grandezza stessa varia in modo continuo.

Così, sia u una funzione di x che, per x variante in modo continuo da x_0 a x_1 , varia in modo continuo da u_0 a u_1 , ma che, per x variante da x_1 a x_2 , passa da u'_1 a u_2 , essendo u'_1 diverso da u_1 : si dice che, nella sua variazione rispetto a x , u presenta una discontinuità per il valore $x = x_1$; poiché essa passa bruscamente da u_1 a u'_1 , mentre x passa per x_1 con una variazione continua.

Se consideriamo il coefficiente differenziale di u rispetto a x , per il valore $x = x_1$, poiché essendo il limite della frazione

$$\frac{u_2 - u_0}{x_2 - x_0}$$

quando si fa tendere x_2 a x_0 indefinitamente verso x_1 e se x_2 e x_0 rimangono sempre da parti opposte di x_1 , il valore limite del numeratore sarà $u'_1 - u_1$ e quello del denominatore sarà zero. Se u è una quantità fisicamente continua, la discontinuità può esistere solo relativamente alla variabile particolare x e dobbiamo ammettere, in questo caso, che per $x = x_1$ il coefficiente differenziale è infinito. Se u non è fisicamente continuo, non si può differenziarlo.

Si può, nei problemi di Fisica, mettere da parte l'idea di discontinuità senza alterare sensibilmente le condizioni del problema. Se x_0 è un poco più piccolo, e x_2 un poco più grande di x_1 , u_0 sarà molto vicino a u_1 , e u_2 a u'_1 . Possiamo allora supporre che u vari in modo arbitrario, ma continuo, da u_0 a u_2 tra i limiti x_0 e x_2 . In molte questioni di Fisica, si può iniziare a fare un'ipotesi di questa natura, poi studiare ciò che diviene il risultato quando i valori di x_0 e x_2 si avvicinano a x_1 e finiscono per raggiungerlo. Se il risultato è indipendente dal modo arbitrario di variazione attribuito a u tra questi limiti, si può ammettere che è ancora così quando u è discontinuo.

Discontinuità di una funzione di più variabili. 8. Se si suppongono costanti i valori di tutte le variabili, tranne x , le discontinuità della funzione si presenteranno per valori particolari di x , legati ai valori delle altre variabili da un'equazione che si può scrivere

$$\varphi = \varphi(x, y, z, \dots) = 0$$

La discontinuità si presenta quando $\varphi = 0$. Quando φ è positivo, la funzione è della forma $F_2(x, y, z, \dots)$. Quando φ è negativo, essa è della forma $F_1(x, y, z, \dots)$, e non c'è relazione necessaria tra le forme F_1 e F_2 .

⁶Il lettore che troverà un poco astratte le considerazioni che concludono questo Capitolo preliminare può, senza gravi inconvenienti, passare ai Capitoli successivi: in una seconda lettura dell'Opera, tutte queste considerazioni si chiariranno dalla conoscenza di fatti ai quali esse si riferiscono.

Per esprimere questa discontinuità in forma matematica, esprimiamo una delle variabili, per esempio x , come una funzione di φ, y, z, \dots . Si potrà allora rappresentare la forma generale della funzione per ogni formula che si ridurrà sensibilmente a F_2 per φ positivo, e a F_1 per φ negativo. La formula sarà

$$F = \frac{F_1 + e^{n\varphi} F_2}{1 + e^{n\varphi}}$$

Finché n è una quantità finita, per quanto grande sia, F è una funzione continua; ma se poniamo n infinito, F diviene uguale a F_2 per φ positivo e a F_1 per φ negativo.

Discontinuità delle derivate di una funzione continua. Le derivate prime di una funzione continua possono essere discontinue. Sia

$$\varphi = \varphi(x, y, z, \dots) = 0$$

la relazione che esiste tra i valori delle variabili per le quali si presenta la discontinuità delle derivate; e siano F_1 e F_2 espresse in funzione di φ e di $n - 1$ altre variabili, y, z, \dots per esempio. Quando φ è negativo, si deve prendere F_1 ; quando φ è positivo, si deve prendere F_2 , e $F_1 = F_2$ quando $\varphi = 0$, poiché F è continua.

Pertanto, quando $\varphi = 0$, le derivate $\frac{dF_1}{d\varphi}$ e $\frac{dF_2}{d\varphi}$ possono essere diverse, ma le derivate prese rispetto a ogni altra variabile, come $\frac{dF_1}{dy}$ e $\frac{dF_2}{dy}$, devono essere le stesse. La discontinuità è quindi limitata alla derivata rispetto a φ , essendo tutte le altre derivate continue.

Funzioni periodiche e funzioni multiformi. 9. Se u è una funzione di x , tale che il suo valore sia lo stesso per $x, x + a, \dots, x + na$, e per tutti i valori di x diversi tra loro si a , u è detta *funzione periodica* di x , e a il suo *periodo*.

Se si considera x come funzione di u , a un valore dato di u corrisponde un numero infinito di valori di x diversi tra loro da a . Si dice in questo caso che x è una funzione multiforme di u , e a è detta una *costante ciclica*.

Il coefficiente differenziale $\frac{dx}{du}$ ha un solo numero finito di valori corrispondenti a un valore dato di u .

Relazione tra le grandezze fisiche e le direzioni nello spazio. 10. Per distinguere le diverse specie di grandezze fisiche, è molto importante conoscere quale è la relazione con la direzione degli assi coordinati di cui ci si serve d'abitudine per definire la posizione degli oggetti. L'introduzione degli assi coordinati in Geometria, dovuta a Descartes, è stata uno dei più grandi progressi fatti nelle Matematiche, poiché essa ha riportato i metodi della Geometria a calcoli basati su quantità numeriche. Si fa dipendere la posizione di un punto dalla lunghezza di tre rette sempre tracciate in direzioni determinate, e si considera la retta che unisce due punti come la risultante di tra altre rette.

Ma spesso in Fisica, per ragionare, e non più per calcolare, è desiderabile evitare l'introduzione esplicita delle coordinate cartesiane, è vantaggioso fissare la propria attenzione su un punto dello spazio preso per sé, e non sulle sue tre coordinate, sull'intensità e la direzione di una forza, non sulle sue tre componenti. Questo modo di considerare le grandezze geometriche e fisiche è più naturale dell'altro, e si presenta dapprima alla mente; tuttavia le idee che ne derivano non ricevettero il loro pieno sviluppo fino al giorno in cui Hamilton fece un secondo grande passo nello studio dello spazio, con l'invenzione del suo calcolo dei Quaternioni.

Siccome oggi i metodi di Descartes sono ancora i più familiari a coloro che studiano le scienze e che sono in realtà i più vantaggiosi per il calcolo, esprimeremo tutti i nostri risultati sotto la forma cartesiana; ma sono convinto che l'introduzione delle idee di Hamilton, prese al di fuori delle operazioni e dei metodi dei quaternioni, ci saranno di grande utilità per lo studio di tutte le parti del nostro argomento e, in particolare, dell'Elettrodinamica, dove abbiamo considerato un certo numero di grandezze fisiche le cui relazioni si possono esprimere ben più semplicemente con qualche parola del linguaggio di Hamilton che con le comuni equazioni.

11. Uno dei tratti più importanti del metodo di Hamilton è la divisione delle grandezze in *scalari e vettoriali*⁷.

Una grandezza scalare è suscettibile di essere interamente definita da un solo dato numerico. Il suo valore numerico non dipende in alcun modo dalla direzione attribuita agli assi coordinati.

Un vettore o una grandezza avente una direzione, esige, per essere definita, tre dati numerici, e ci si può rendere conto più facilmente considerandoli come riferiti alla direzione degli assi coordinati.

Le grandezze scalari non implicano l'idea di direzione. Il volume di una figura geometrica, ma massa o l'energia di un corpo materiale, la pressione idrostatica in un punto di un fluidi, il potenziale in un punto dello spazio, sono esempi di grandezze scalari.

Un vettore ha una direzione così come una grandezza; essa è tale che l'inversione della sua direzione implica il cambiamento del suo segno. Lo spostamento di un punto, raffigurato da una retta tracciata dalla sua posizione iniziale alla posizione finale, può essere presa come tipo di una grandezza vettoriale: da ciò viene il nome di *vettore*.

La velocità di un corpo, la sua quantità di moto, la forza che agisce su di esso, l'intensità di una corrente elettrica, la magnetizzazione di una molecola di ferro. sono esempi di grandezze direzionali.

Vi sono grandezze fisiche di un altro tipo, che dipendono da certe direzioni nello spazio e che non sono vettori. Queste sono, per esempio, le tensioni e deformazioni dei corpi solidi, alcune delle proprietà dei corpi che si considerano nella teoria dell'elasticità. della doppia rifrazione. Grandezze di questo tipo esigono, per essere definite, nove dati numerici. Esse si esprimono, nel linguaggio dei quaternioni, con funzioni lineari e vettoriali di un vettore.

L'addizione di una grandezza vettoriale ad un'altra dello stesso tipo si effettua secondo la regola data in Statica per la composizione delle forze. Infatti, la dimostrazione che dà Poisson del parallelogramma di forze si applica alla composizione di tutte le grandezze, tali che il cambiamento del loro segno sia equivalente alla loro inversione punta per punta.

Quando vogliamo indicare una grandezza direzionale con un solo simbolo e richiamare l'attenzione sul fatto che è un vettore, di cui si deve, di conseguenza, considerare la direzione così come il modulo, la indicheremo con una lettera gotica maiuscola.

Nel calcolo dei quaternioni, la posizione di un punto nello spazio è definita dal vettore tracciato da un punto fissato detto *origine* a quel punto. Se, in quel punto dello spazio, dobbiamo considerare una grandezza fisica il cui valore dipende dalla posizione del punto, questa grandezza è trattata come una funzione del vettore tracciato dall'origine. La funzione stessa può essere scalare o vettoriale: la densità di un corpo, la sua temperatura, la sua pressione idrostatica, il potenziale in un punto sono esempi di funzioni scalari. La forza risultante in questo punto, la velocità di un fluido in questo punto, la velocità di rotazione di un elemento del fluido, la coppia che produce la rotazione sono esempi delle funzioni vettoriali.

12. Le grandezze vettoriali fisiche possono essere divise in due classi: nell'una, la grandezza è definita rispetto a una retta; nell'altra, la grandezza è definita rispetto a un'area.

Per esempio, si può valutare la componente di una forza attrattiva in una certa direzione, trovando il lavoro di questa forza mentre sposta un corpo di una piccola lunghezza in questa direzione e dividendo questo lavoro per questa piccola lunghezza. Qui la forza attrattiva è definita rispetto a una retta.

D'altra parte, il flusso di calore, in un punto di un corpo solido e in una data direzione, può essere definito: la quantità di calore che attraversa un elemento di superficie tracciato perpendicolarmente alla direzione del flusso, diviso per l'estensione di questa superficie e per il tempo. Qui il flusso è definito rispetto a un'area.

Vi sono alcuni casi nei quali una quantità si può misurare anche rispetto a una retta o a un'area.

⁷Si veda l'Appendice I, che contiene i principi del calcolo dei Quaternioni.

Così, quando si tratta di spostamenti di corpi elastici, si può porre l'attenzione sia sulle posizioni iniziale e finale di una molecola, nel qual caso lo spostamento è misurato dalla retta che unisce la prima alla seconda posizione; oppure si può considerare una piccola superficie fissata nello spazio e determinare la quantità di materia che attraversa questa superficie durante lo spostamento.

Analogamente la velocità di un fluido può essere studiata, sia considerando la velocità effettiva delle molecole prese singolarmente, sia considerando la quantità di fluido che attraversa una superficie fissata qualunque.

Ma, in questi casi diversi, per applicare il primo metodo, ci serve conoscere separatamente la densità del corpo e la sua velocità o spostamento: così, tutte le volte che cerchiamo di formulare una teoria molecolare, siamo portati a impiegare il secondo procedimento.

Nel caso di un flusso di elettricità, non sappiamo nulla né della densità, né della velocità nel conduttore; conosciamo solo il valore di ciò che, nella teoria dei fluidi, corrisponderebbe al prodotto della densità per la velocità. Di conseguenza, in tutti i casi di questo genere, siamo obbligati ad applicare il metodo più generale che consiste nel misurare il flusso che attraversa una superficie.

Nella scienza dell'elettricità, la forza elettromotrice e la forza magnetica appartengono alla prima classe e si definiscono rispetto a delle rette. Quando vorremo alludere a questo fatto, le indicheremo con il nome di *forze*.

D'altra parte, l'induzione elettrica o magnetica, e le correnti elettriche appartengono alla seconda classe e si definiscono rispetto alle aree. Quando vorremo alludere a questo fatto, le indicheremo con il nome di *flusso*.

Ognuna di queste forze può essere considerata come produttrice o tendente a produrre il flusso corrispondente. Così la forza elettromotrice produce correnti elettriche nei condensatori e tende a produrne nei dielettrici. Essa produce l'induzione elettrica nei dielettrici e probabilmente anche nei conduttori. Nello stesso senso, la forza magnetica produce l'induzione magnetica.

13. In alcuni casi, il flusso è semplicemente proporzionale alla forza e nella stessa direzione. In altri casi, possiamo solo affermare che la direzione e l'intensità del flusso sono funzioni della direzione e dell'intensità della forza.

Il caso in cui le componenti del flusso sono funzioni lineari delle componenti della forza è discusso nel capitolo delle equazioni di conduzione (§296). In generale, vi sono nove coefficienti che determinano la relazione tra la forza e il flusso: in alcuni casi, abbiamo motivo di credere che sei di questi coefficienti formano tre gruppi di grandezze uguali a due a due. In casi simili, la relazione tra le direzioni della forza e del piano normale al flusso è della stessa natura di quella che esiste tra un diametro di un ellissoide e il suo piano diametrale coniugato. Nel linguaggio dei quaternioni, si dice che uno dei vettori è una funzione lineare e vettoriale dell'altro, e se vi sono tra coppie di coefficienti uguali, che è la funzione è auto coniugata.

Nel caso dell'induzione magnetica nel ferro, il flusso (la magnetizzazione del ferro) non è una funzione lineare della forza magnetizzante. Ma, in tutti i casi, il prodotto della forza per la componente del flusso lungo la direzione della forza è un elemento di grande importanza scientifica, che è sempre una quantità scalare.

14. Vi sono due operazioni matematiche che si presentano spesso, e che sono proprie a ciascuna delle due classi di vettori o di quantità direzionali.

Nel caso delle forze, dobbiamo prendere l'integrale lungo una linea, del prodotto dell'elemento di questa linea per la componente della forza lungo questo elemento. Il risultato di questa operazione è detto *l'integrale della forza lungo questa linea*: esso rappresenta il lavoro compiuto su un corpo durante il suo trasporto lungo la linea. In certi casi dove l'integrale non dipende più dalla forma della linea, ma solo dalle posizioni delle sue estremità, esso assume il nome di *potenziale*.

Nel caso del flusso, dobbiamo prendere l'integrale su una superficie del flusso che attraversa questa superficie. Il risultato di questa operazione è detto *l'integrale del flusso su questa*

superficie, e rappresenta la quantità che attraversa la superficie.

Vi sono alcune superfici attraverso le quali non vi è flusso. Se due di queste superfici si intersecano, la loro linea di intersezione è una linea di flusso. Nel caso in cui il flusso è nella direzione della forza, queste linee sono spesso dette *linee di forza*. Sarebbe tuttavia più corretto chiamarle, in elettrostatica e nel magnetismo, *linee di induzione*, e, in elettrocinematica, *linee di scorrimento*.

Vi è un'altra distinzione tra le diverse specie di quantità direzionali, che, molto importante dal punto di vista fisico, è meno necessaria da osservare per l'applicazione dei metodi matematici: è la distinzione delle proprietà di lunghezza e di rotazione.

La direzione e l'intensità di una grandezza possono dipendere da un'azione o da un effetto che si produce interamente lungo una certa linea, oppure esse possono dipendere da qualche elemento che è del tipo di una rotazione attorno a questa linea presa come asse. Le leggi di combinazione di grandezze direzionali sono le stesse, che queste siano longitudinali o rotatorie, di modo che non vi è differenza nel modo di trattare con il calcolo le due classi; ma vi possono essere circostanze fisiche che ci mostrano a quale classe dobbiamo riferire un fenomeno particolare. Così l'elettrolisi consiste nel trasporto, lungo una certa linea, di certe sostanze in una direzione, di certe altre sostanze nella direzione contraria; è evidentemente un fenomeno longitudinale, e nessun effetto osservato sembra riferirsi a una rotazione attorno alla direzione della forza. Da ciò deduciamo che la corrente elettrica che produce o accompagna l'elettrolisi è un fenomeno longitudinale e non rotatorio.

D'altra parte, il polo nord e il polo sud di una calamita non differiscono tra loro alla maniera dell'ossigeno e dell'idrogeno, che, durante l'elettrolisi, appaiono in punti opposti, di modo che nulla ci porta a credere che il magnetismo sia un fenomeno longitudinale; mentre l'effetto del magnetismo, che determina la rotazione del piano di polarizzazione della luce, ci mostra nettamente che il magnetismo è un fenomeno di rotazione.

Integrali lungo una linea. 16. È un'operazione importante nella Fisica in generale, e che deve essere chiaramente compresa, quella dell'integrazione della componente di un vettore effettuata lungo una linea.

Siano x, y, z le coordinate di un punto P preso su una linea la cui lunghezza, contata a partire da un certo punto A , è s . Queste coordinate sono funzioni della sola variabile s .

Sia R il valore del vettore al punto P , e sia ϵ l'angolo che la tangente in P forma con la direzione R ; allora $R \cos \epsilon$ è la componente di R lungo la linea, e l'integrale

$$L = \int_0^s R \cos \epsilon ds$$

è detto l'integrale di R lungo la linea s .

Si può scrivere questa espressione

$$L = \int_0^s \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds$$

dove X, Y, Z sono le componenti di R parallelamente a x, y, z .

In generale, questa quantità è diversa per le diverse linee che si possono tracciare tra A e P . Ma se, in una certa regione, la quantità

$$X dx + Y dy + Z dz = -d\Psi$$

cioè è un differenziale esatto in questa regione, il valore di L diviene

$$\Psi_A - \Psi_P$$

e resta la stessa per due forme qualunque di contorno compreso tra A e P , purché si possa passare da una forma all'altra con un moto continuo, senza uscire dalla regione [e che la funzione Ψ abbia un solo valore in ogni punto della regione (P.)]

Potenziali. La quantità Ψ è una funzione scalare della posizione del punto, e di conseguenza è indipendente dalle direzioni degli assi. Si chiama la *funzione potenziale*, e si dice che il vettore le cui componenti sono X, Y, Z ha un potenziale Ψ , se

$$X = -\left(\frac{d\Psi}{dx}\right) \quad Y = -\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) \quad Z = -\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)$$

Quando esiste una funzione potenziale, le superfici per le quali il potenziale è costante sono dette *superfici equipotenziali*. La direzione di R in un punto qualsiasi di una simile superficie coincide con la normale a questa superficie; e, se n è una normale al punto P , si ha

$$R = -\left(\frac{d\Psi}{dn}\right)$$

Il metodo che consiste nel considerare le componenti di un vettore come le derivate prime rispetto alle coordinate di una data funzione di queste coordinate è stato immaginato da Laplace⁸, per trattare la teoria dell'attrazione. Il nome di potenziale è stato dato per la prima volta a questa funzione da Green, che ne ha fatto la base della sua teoria dell'Elettricità⁹. Il lavoro di Green non fu notato dai matematici, fino al 1846, e prima di questo periodo la maggior parte dei suoi teoremi più importanti erano stati ritrovati da Gauss, Chasles, Sturm e Thomson¹⁰.

Nella teoria della gravitazione, il potenziale è preso con un segno contrario a quello che impieghiamo qui; e, di conseguenza, la forza risultante in un punto qualsiasi si misura con l'aumento della funzione potenziale in questa direzione. Nelle ricerche di elettricità e di magnetismo, il potenziale è definito in modo tale che la forza risultante in una direzione data si misura con la diminuzione del potenziale in questa direzione. Impiegando l'espressione in questo modo, si fa corrispondere il suo segno a quello dell'energia potenziale, che decresce sempre quando i corpi si muovono nella direzione lungo la quale le forze agiscono su di essi.

17. La scoperta di Hamilton, sulla forma dell'*operatore* per la quale il vettore si deduce dal potenziale, getta una viva luce sulla natura geometrica della relazione che esiste tra il potenziale e il vettore che ne è ricavato.

Così come abbiamo visto, la componente del vettore in una direzione è la derivata prima del potenziale preso rispetto a una coordinata contata in questa direzione, con un segno invertito.

Ora, siano i, j, k tre vettori unitari, perpendicolari l'uno all'altro e siano X, Y, Z le componenti del vettore \mathbf{F} parallele a questo vettore: allora

$$(0.0.1) \quad \mathfrak{F} = iX + jY + kZ$$

e, in base a quanto detto prima, se Ψ è il potenziale,

$$(0.0.2) \quad F = -\left(i\frac{d\Psi}{dx} + j\frac{d\Psi}{dy} + k\frac{d\Psi}{dz}\right)$$

E se rappresentiamo con ∇ l'operatore

$$(0.0.3) \quad i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}$$

si ha

$$\mathfrak{F} = -\nabla\Psi$$

Si può dare al simbolo di operazione ∇ l'interpretazione seguente: esso indica che bisogna misurare su ciascuna delle tre direzioni rettangolari l'aumento di Ψ ; poi, considerando le quantità così trovate come vettori, che bisogna comporle in una sola. Questo è ciò che indica la (3). Ma si può anche considerarla come indicante che bisogna trovare la direzione per la quale Ψ cresce più in fretta, e di portare su questa direzione un vettore rappresentante tale aumento.

⁸*Mécanique céleste*, lib. III.

⁹*Essai d'application de l'Analyse mathématique à la théorie de l'électricité du Magnétisme* (Nottigham, 1828), ristampato nel *Journal de Crelle* o nell'edizione delle Oevres de Green, di M. Ferrers.

¹⁰Thomson e Tait, *Natural Philosophy*, § 483.

Lamè, nel suo Trattato delle funzioni inverse, impiega il termine di *parametro differenziale* per esprimere la grandezza di questo aumento massimo; ma né il termine stesso, né il modo in cui Lamè lo ha usato, indicano solo che la grandezza indicata ha una direzione propria così come una intensità. Nelle rare occasioni in cui dovrà considerare questa relazione come puramente geometrica, chiamerò il vettore \mathfrak{F} il *gradiente* della funzione scalare Ψ , impiegando il termine *gradiente* per indicare la direzione così come il modulo della caduta più rapida di Ψ .

18. Vi sono tuttavia casi in cui le condizioni perché

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

sia un differenziale esatto, cioè

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 0 \quad \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = 0 \quad \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0$$

sono verificate in una certa regione dello spazio e dove tuttavia l'integrale preso da A a P può assumere valori diversi per due contorni, entrambi interamente compresi nella regione. Questo caso si può presentare se la regione è a forma d'anello e se le due linee A e P sono poste in segmenti opposti dell'anello. Non si può, in questo caso, passare da un contorno all'altro con un moto continuo senza uscire dalla regione. Siamo portati così a considerazioni che rientrano nella Geometria di posizione, argomento poco studiato, sebbene la sua importanza sia stata segnalata da Leibniz e messa in luce da Gauss. Il lavoro più completo su questo tema è stato dato da J. B. Listing¹¹.

Siano p punti nello spazio e l linee congiungenti questi punti di modo che mai due linee non si incontrano e che nessun punto non sia lasciato isolato. Chiameremo *diagramma* una figura composta in questo modo. Di queste linee, $p - 1$ bastano per collegare i p punti e formare un sistema collegato. Ogni linea inoltre darà luogo a un anello chiuso, o, come lo chiameremo, a un ciclo. Il numero di cicli indipendenti nel diagramma è

$$k = l - p + 1$$

Ogni contorno chiuso, descritto secondo le linee del diagramma, si compone di questi cicli indipendenti presi ciascuno un numero di volte e in una direzione qualsiasi.

L'esistenza di cicli è detta *circularità*, e il numero di cicli di un diagramma *numero ciclomatico*.

Circularità delle superfici e delle regioni. Le superfici possono essere *complete* o *limitate*. Le superfici complete sono infinite o chiuse. Le superfici limitate finiscono con una o più linee chiuse, che, nel caso limite, si possono ridurre linee finite doppie o a punti. Una regione finita dello spazio è limitata da una o più superfici chiuse. Per questo, una delle superfici è esterna; le altre vi sono comprese, sono esterne le une alle altre e sono dette le *superfici interne*.

Se la regione è limitata da una sola superficie, si può supporre che questa superficie si contragga senza cessare di essere continua o senza intersecarsi con se stessa. Se la regione è a semplice continuità, come lo è una sfera, questa operazione potrà essere continuata finché la regione sia ridotta a un punto; ma, se la regione ha la forma di un anello, si otterrà infine una curva chiusa; e se la regione ha numerose connessioni, il risultato sarà un diagramma di linee, il cui numero ciclomatico è quello della regione. Lo spazio esterno alla regione ha lo stesso numero ciclomatico della regione e, di conseguenza, se la regione è limitata da superficie interne ed esterne, il suo numero ciclomatico è la somma dei numeri corrispondenti a tutte queste superfici.

Quando una regione racchiude altre regioni, essa è detta *perifrattica*.

Il numero di superfici limitate interne di una regione è chiamata col suo *numero perifrattico*. Una superficie chiusa è perifrattica e il suo numero è l'unità.

Il numero ciclomatico di una superficie *chiusa* è il doppio di quello dell'una o dell'altra delle regioni che essa limita. Per trovare il numero ciclomatico di una superficie limitata, si suppone che tutti limiti si contraggano senza cessare di essere continui, fino ad incontrarsi. La superficie è allora ridotta a un punto nel caso di superfici *acicliche*, a un diagramma di linee nel caso di superfici *cicliche*. Il numero ciclomatico di questo diagramma è quello della superficie.

¹¹Der Census räumlicher Complexe (Gött. Abh., vol. X, p. 97, 1861).

TEOREMA 1. **19.** *Se, in tutta l'estensione di una regione ciclica*

$$Xdx + Ydy + Zdz = -d\Psi$$

il valore dell'integrale preso da un punto A a un punto P, lungo un contorno qualsiasi interno alla regione, è costante.

Mostriamo dapprima che l'integrale preso lungo un circuito chiuso qualsiasi interno alla regione è uguale a zero.

Supponiamo tracciate le superfici equipotenziali. Queste sono tutte, o superfici chiuse, o superfici completamente limitate dalla superficie della regione; di conseguenza, una linea chiusa, interna alla regione, che taglia una di queste superfici in un punto del suo contorno, deve forzatamente tagliare questa stessa superficie in senso inverso, in qualche altro punto del suo contorno; le parti corrispondenti dell'integrale di linea essendo uguali e contrarie, il valore totale è zero.

Di conseguenza, se AQP e $AQ'P$ sono due contorni tracciati tra A e P , l'integrale secondo $AQ'P$ è la somma di quello secondo AQP e di quello secondo il contorno chiuso $AQ'PQA$, ed essendo l'integrale secondo il contorno chiuso nullo, i due integrali sono uguali.

Pertanto, se il potenziale è dato in un punto qualsiasi di una simile regione, è determinato in ogni altro punto.

TEOREMA 2. **20.** *In una regione ciclica per tutta l'estensione della quale è soddisfatta l'equazione*

$$Xdx + Ydy + Zdz = -d\Psi$$

l'integrale da A a P non è in generale determinato, se non si specifica il canale lungo il quale si va da A a P.

Sia k il numero ciclotomico della regione: si possono fare nella regione k sezioni per mezzo di superfici che chiameremo *diaframmi*, e così chiudere k canali di giunzione; la regione è così ricondotta ad essere aciclica senza che la sua continuità sia eliminata.

L'integrale preso da A a P lungo una linea che non taglia alcuno di questi diaframmi sarà, dal teorema precedente, di valore determinato.

Supponiamo ora A e P infinitamente vicini tra loro, ma posti da una parte e dall'altra di un diaframma: sia K l'integrale lungo il percorso AP .

Siano A' e P' due altri punti da una parte e dall'altra dello stesso diaframma e infinitamente vicini tra loro, e sia K' l'integrale lungo il percorso $A'P'$. Dico che $K = K'$.

Infatti, tracciamo AA' e PP' : essendo queste linee quasi coincidenti, sebbene da una parte e dall'altra del diaframma, gli integrali, presi lungo ciascuna di esse, saranno uguali. Supponiamo ciascuno uguale a L : l'integrale di linea lungo $A'P'$ sarà allora uguale a quello lungo

$$AA' + AP + PP' = -L + K + L = K = \text{integrale lungo } AP$$

Pertanto, l'integrale preso lungo un contorno chiuso che attraversa un diaframma del sistema in una direzione data è una quantità costante K , che si chiama *costante ciclica* corrispondente al ciclo dato.

Sia una curva chiusa qualsiasi tracciata all'interno della regione e intersecante il diaframma del primo ciclo p volte nella direzione positiva e p' volte nella direzione negativa; e sia $p - p' = n_1$. L'integrale di linea lungo la curva chiusa sarà $n_1 K_1$.

Analogamente, l'integrale di linea lungo un curva chiusa qualsiasi sarà

$$n_1 K_1 + n_2 K_2 + \dots + n_k K_k$$

dove n_k rappresenta l'eccesso del numero di passaggi positivi sul numero di passaggi negativi della curva attraverso il diaframma del ciclo K .

Se due curve sono tali che si possa passare dall'una all'altra con un movimento continuo, senza mai attraversare alcuna parte dello spazio per il quale la condizione di avere un potenziale non

sia verificata, le due curve sono dette *curve riducibili*. Le curve per le quali questa trasformazione non si può fare sono dette *curve irriducibili*¹².

La condizione che $Xdx + Ydy + Zdz$ sia il differenziale esatto di una certa funzione Ψ per tutti i punti interni a una certa regione si incontra in diverse ricerche fisiche, nelle quali la grandezza direzionale e il potenziale hanno significati fisici diversi.

In Cinematica pura, si può supporre che X, Y, Z siano le componenti dello spostamento di un punto appartenente a un corpo continuo, le cui coordinate iniziali siano x, y, z ; allora la condizione esprime che l'insieme degli spostamenti costituisce una traslazione senza rotazione¹³.

Se X, Y, Z rappresentano le componenti di velocità di un fluido nel punto (x, y, z) , la condizione esprime che il movimento del fluido si effettua senza rotazione.

Se X, Y, Z rappresentano le componenti della forza nel punto (x, y, z) , la condizione esprime che il lavoro compiuto durante il passaggio di un punto materiale da una posizione a un'altra è la differenza dei potenziali in queste due posizioni, e questa differenza ha lo stesso valore per tutti i contorni riducibili compresi tra queste sue posizioni.

Integrali su una superficie. 21. Siano dS l'elemento di superficie, ϵ l'angolo che forma con la direzione del vettore R la normale tracciata alla superficie dalla parte positiva di essa. Allora $\iint R \cos \epsilon dS$ è detto l'integrale di R sulla superficie S .

TEOREMA 3. *L'integrale di un flusso attraverso una superficie chiusa si può esprimere con l'integrale della sua convergenza estesa a tutto il volume compreso all'interno della superficie.*

Siano X, Y, Z le componenti di R ; l, m, n i coseni degli angoli formati con gli assi dalla normale a S diretti verso l'interno di questa superficie. L'integrale di R sulla superficie S è

$$(0.0.4) \quad \iint R \cos \epsilon dS = \iint X l dS + \iint Y m dS + \iint Z n dS = \\ = \iint X dydz + \iint Y dzdx + \iint Z dxdy$$

essendo i valori X, Y, Z quelli in un punto della superficie, e le integrazioni si estendono su tutta la superficie.

Se la superficie è chiusa, per valori dati di y e z , la coordinata x deve avere un numero pari di valori; poiché una linea parallela a x , dell'istante che essa incontra la superficie, deve penetrare nello spazio chiuso e uscirne uno stesso numero di volte.

Consideriamo un punto che va da $x = -\infty$ a $x = +\infty$; esso penetra nello spazio per la prima volta per $x = x_1$, ne esce per $x = x_2$ e così di seguito; e siano X_1, X_2, \dots i valori di X in questi punti: allora

$$(0.0.5) \quad \iint X dydz = \iint (X_2 - X_1) + (X_4 - X_3) + \dots (X_{2n} - X_{2n-1}) dydz$$

Se X è una quantità continua e non ha valori infiniti tra x_1 e x_2 ,

$$(0.0.6) \quad X_2 - X_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dX}{dx} dx$$

estendendosi l'integrazione da x_1 a x_2 , cioè lungo il primo segmento di x compreso all'interno della superficie chiusa. Tenendo conto di tutti i segmenti che sono compresi all'interno della superficie chiusa, troviamo

$$(0.0.7) \quad \iint X dydz = \iiint \frac{dX}{dx} dx dydz$$

essendo l'integrale doppio limitato alla superficie chiusa e l'integrale triplo, al contrario, esteso a tutto il volume compreso all'interno di questa superficie. Pertanto, se X, Y, Z sono continui e

¹²Si veda sir W. Thomson, *On vortex motion* (Trans. R. S. Edin., 1869)

¹³[Cioè che esistono in ciascun punto del corpo tre direzioni trirettangolari, che restano parallele a se stesse durante una deformazione]. Si veda Thomson e Eait, *Natural philosophy*, § 190, (i).

finiti all'interno di una superficie chiusa, l'integrale di R su questa superficie completa sarà

$$(0.0.8) \quad \iint R \cos \epsilon dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) dx dy dz$$

essendo l'integrale triplo esteso a tutto il volume interno a S .

Supponiamo ora che X, Y, Z non siano continui all'interno della superficie chiusa; ma che, su una certa superficie $F(x, y, z) = 0$, i valori di X, Y, Z saltino bruscamente da X, Y, Z sulla parte negativa a X', Y', Z' sul lato positivo della superficie.

Se questa discontinuità si presenta tra x_1 e x_2 , per esempio, il valore di $X_2 - X_1$ sarà

$$(0.0.9) \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{dX}{dx} dx + (X' - X)$$

dove si deve considerare nell'espressione sotto il segno \int solo i valori finiti della derivata di X .

Pertanto, in questo caso, l'integrale di R sulla superficie chiusa sarà espresso da

$$(0.0.10) \quad \iint R \cos \epsilon dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) dx dy dz + \iint (X' - X) dy dz + \\ = + \iint (Y' - Y) dz dx + \iint (Z' - Z) dx dy$$

oppure, se l', m', n' sono i coseni direttori della normale alla superficie di discontinuità, e dS' un elemento di questa superficie

$$(0.0.11) \quad \iint R \cos \epsilon dS = \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz + \iint [l' (X' - X) + m' (Y' - Y) + n' (Z' - Z)] dS'$$

dovendo l'integrazione essere estesa, nell'ultimo termine, a tutta la superficie di discontinuità.

Se, in ogni punto dove X, Y, Z sono continui,

$$(0.0.12) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

e se, su ciascuna superficie dove sono discontinui,

$$(0.0.13) \quad l' X' + m' Y' + n' Z' = l' X + m' Y + n' Z$$

l'integrale su una superficie chiusa qualsiasi è nullo e si dice che la distribuzione del vettore è solenoidale.

Indicheremo la (12) sotto il nome di *condizione solenoidale generale* e la (13) sotto il nome di *condizione solenoidale alla superficie*.

22. Consideriamo ora il caso in cui, per tutti i punti interni alla superficie S , l'equazione (12) è soddisfatta nello stesso tempo che X, Y, Z sono continui. La conseguenza è che l'integrale sulla superficie chiusa è uguale a zero.

Supponiamo ora che la superficie chiusa S sia formata di tre parti S_1, S_0 e S_2 ; che S_1 sia una superficie di forma qualsiasi limitata da una linea L_1 e che S_0 sia formata tracciando da tutti i punti di L_1 delle linee nella direzione di R . Se l, m, n sono i coseni direttori della normale in un punto qualsiasi della superficie S_0

$$(0.0.14) \quad R \cos \epsilon = Xl + Ym + Zn = 0$$

Pertanto, gli elementi dell'integrale corrispondente a questa superficie S_0 sono nulli.

Sia S_2 un'altra superficie di forma qualsiasi, limitata dalla curva L_2 lungo la quale essa incontra la superficie S_0 .

Siano Q_1, Q_0, Q_2 gli integrali sulle superfici S_1, S_0, S_2 e sia Q l'integrale di superficie sulla superficie chiusa S . Allora

$$(0.0.15) \quad Q = Q_1 + Q_0 + Q_2 = 0$$

e noi sappiamo che

$$(0.0.16) \quad Q_0 = 0$$

pertanto

$$(0.0.17) \quad Q_2 = -Q_1$$

cioè che l'integrale su S_2 è uguale e di segno contrario all'integrale su S_1 , qualunque siano la forma e la posizione di S_2 , purché la superficie intermedia S_0 sia costantemente tangente a R .

Se supponiamo che L_1 sia una curva chiusa di area poco considerevole, S_0 sarà una superficie tubolare che gode di questa proprietà, che l'integrale preso su una sezione qualunque del tubo è costante.

Tutto lo spazio interno alla superficie S può essere diviso in tubi di questa natura, purché valga la (12); una distribuzione di una quantità vettoriale soddisfacente a questa condizione è detta *distribuzione solenoidale*.

Tubi e linee di flusso. Se lo spazio è diviso in tubi, di modo che l'integrale su una sezione qualunque di ogni tubo sia l'unità, i tubi sono detti *tubi unitari* e l'integrale preso su una superficie finita S , limitata da una curva chiusa L , è uguale al numero di questi tubi che attraversano la superficie S nel verso positivo, o, analogamente, che passano attraverso la curva chiusa L .

Pertanto l'integrale su S dipende solo dalla forma del suo limite L e non dalla forma della superficie all'interno di questo limite.

Regioni perifrattiche. Se, in tutta l'estensione di una regione limitata esteriormente da una sola superficie chiusa S_1 , la condizione solenoidale

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

è soddisfatta, l'integrale preso su una superficie chiusa qualsiasi interna alla regione è nulla e l'integrale preso su una superficie limitata, interna alla regione, dipende solo dalla forma della curva chiusa che funge da limite.

Ma questi risultati non sono veri in generale, se la regione per la quale la condizione solenoidale è soddisfatta è limitata in altro modo da una superficie unica.

Poiché, se essa è limitata in altro modo da una sola superficie continua, una delle superfici limite è la superficie esterna; le altre sono le superfici interne, e la regione S è perifrattica poiché essa racchiude altre regioni che essa circonda interamente.

Sia S_1 una di queste regioni circondate, per la quale la condizione solenoidale non è soddisfatta e sia

$$Q_1 = \iint R \cos \epsilon dS_1$$

l'integrale di superficie per la superficie che limita questa regione; siano Q_2, Q_3, \dots quantità corrispondenti per le altre regioni inglobate.

Se una superficie chiusa S' è tracciata all'interno della regione S , l'integrale corrispondente non sarà uguale a zero a meno che questa superficie S' non racchiuda alcuna delle superfici inglobate S_1, S_2, \dots . Se essa ne racchiude qualcuna, il suo integrale di superficie è la somma degli integrali di superficie per le diverse superfici inglobate che essa comprende.

Per la stessa ragione, l'integrale preso su una superficie limitata da una curva chiusa non è la stessa, per altre superfici limitate dalla stessa curva, che se le superfici sono riducibili alla superficie data da un movimento continuo all'interno della regione S .

Quando dobbiamo occuparci di una regione perifrattica, la prima cosa da fare è riportarla ad essere aperifrattica, tracciando linee che congiungono le differenti superfici limite. Ognuna di queste linee, purché non colleghino due superfici che sono già in comunicazione continua, riduce di una unità il numero perifrattico; di modo che il numero totale di linee da tracciare per far scomparire la perifrassia è uguale al numero perifrattico, o al numero delle superfici interne.

Quando queste linee sono state tracciate, possiamo affermare che, se la condizione solenoidale è soddisfatta nella regione s , ogni superficie chiusa, tracciata all'interno della regione e non intersecante alcuna linea, dà luogo a un integrale nullo.

Tracciando queste linee, ci dobbiamo ricordare che ogni linea congiungente superfici già collegate non diminuisce il numero perifrattico, ma aumenta il numero ciclomatico.

L'esempio più familiare di una regione perifrattica, all'interno della quale la condizione solenoidale è soddisfatta, è la regione che circonda una massa che esercita un'attrazione o una repulsione inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Abbiamo in questo caso

$$X = \frac{\mu x}{r^2} \quad Y = \frac{\mu y}{r^2} \quad Z = \frac{\mu z}{r^2}$$

essendo μ la massa supposta collocata nell'origine delle coordinate. In un punto qualsiasi a distanza finita r ,

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

ma nell'origine queste quantità divengono infinite. Per ogni superficie chiusa non contenente l'origine, l'integrale di superficie è nullo; se la superficie chiusa contiene l'origine, l'integrale di superficie è $4\pi\mu$.

Se, per un motivo qualunque, vogliamo trattare una regione circondante μ come se non fosse perifrattica, dovremmo tracciare una linea da μ all'infinito e ricordarci, prendendo gli integrali su una superficie chiusa, che bisogna aggiungere $4\pi\mu$ tutte le volte che questa linea passa dalla parte negativa a quella positiva della superficie¹⁴.

Relazioni destrogire o levogire nello spazio. 23. In questo trattato, si ammette che il movimento di traslazione lungo un asse, o di rotazione attorno a un asse, sono dello stesso segno quando le loro direzioni corrispondono ai movimenti di traslazione e di rotazione di una vite ordinaria o vite destra¹⁵.

Per esempio, se si conta positivamente l'effettiva rotazione della Terra da ovest a est, la direzione positiva sull'asse della Terra è presa da sud a nord; per un uomo che cammina diritto davanti a lui nella direzione positiva, la rotazione positiva si effettuerà, partendo dalla testa, per la mano destra, i piedi e la mano sinistra.

Se ci poniamo su una superficie, dalla parte positiva, il verso positivo su una curva che limita questa superficie sarà inverso del senso di moto delle lancette di un orologio il cui quadrante è girata verso di noi.

Tale è il sistema "a destra" adottato nella *Natural Philosophy* di Thomson e Tait, § 243; il sistema opposto, o sistema "a sinistra", è adottato nei *Quaternions* di Hamilton e Tait. L'operazione che consiste nel passare da un sistema all'altro è detta da Listing *alterazione*.

L'immagine di un oggetto visto per riflessione in uno specchio è un'immagine *alterata* di questo oggetto.

Quando impiegheremo assi coordinati cartesiani x, y, z , li tratteremo in modo che la convenzione ordinaria sull'ordine di successione dei simboli ci porte nello spazio a un sistema di direzione destra.

¹⁴Infatti, una superficie che racchiude l'origine è riducibile a una sfera avente questa come centro e di raggio R piccolo, ma finito; per tutti i punti di questa sfera, $\frac{l}{x} = \frac{m}{y} = \frac{n}{z} = \frac{1}{R}$ e $(lX + mY + nZ)$ si riduce a $\frac{\mu dS}{R^2}$, il cui integrale è $\frac{\mu}{R^2} \iint dS$ o $4\pi\mu$.

¹⁵L'azione combinata dei muscoli del braccio, quando ruotiamo all'infuori la parte superiore della mano destra, contemporaneamente la tendiamo in avanti, impresso nella nostra memoria, meglio di ogni definizione, la natura del moto di una vite a destra. Un comune cavatappi può servire come simbolo materiale di questo stesso movimento.

Il professor W.N. Miller mi ha fatto osservare che i viticci della vigna sono arrotolati a destra e quelli del luppolo a sinistra e che si potrebbe chiamare i due sistemi di rotazione nello spazio *sistema della vigna* e *sistema del luppolo*.

Il sistema della vigna, che noi adottiamo, è quello di Linnè e quello dei fabbricanti di viti in tutti i paesi civilizzati, tranne il Giappone. De Candolle è il primo che ha chiamato viticci a destra quelli del luppolo; in ciò è stato seguito da Listing e dalla maggior parte di coloro che hanno scritto sulla polarizzazione rotatoria della luce. Viti fatte come i viticci del luppolo servono a collegare tra loro i vagoni della ferrovia e per fissare le ruote a sinistra delle vetture ordinarie; ma coloro che li impiegano li chiamano sempre viti a sinistra.

L'area di superfici sarà contata positivamente se l'ordine di integrazione è conforme all'ordine di successione dei simboli. Così l'area di una curva chiusa tracciata nel piano xy , che è $\iint dx dy$, si può scrivere

$$\int x dy \quad \text{o} \quad - \int y dx$$

essendo l'ordine di integrazione x, y nel primo caso, e y, x nel secondo.

La relazione tra i due prodotti $dx dy$ e $dy dx$ si può confrontare alla relazione che esiste, nella teoria dei quaternioni, tra i prodotti di due vettori perpendicolari tra loro, prodotti il cui segno dipende dall'ordine di moltiplicazione, o dall'inversione del segno in un determinante dove si scambiano tra loro due linee o colonne consecutive.

Per la stessa ragione, un integrale di volume deve essere contato positivamente se l'ordine di integrazione è l'ordine di successione delle variabili x, y, z , e negativamente se è invertito.

Introduciamo ora un teorema molto utile che stabilisce una relazione tra un integrale preso su una superficie limitata e un integrale preso lungo suoi limiti.

TEOREMA 4. *Un integrale preso lungo una curva chiusa si può esprimere per mezzo di un integrale preso su una superficie avente la curva come limite.*

Siano X, Y, Z le componenti di un vettore \mathfrak{A} , il cui integrale deve essere preso lungo una linea chiusa s .

Sia S una superficie continua e finita qualunque, interamente limitata dalla curva s , e siano ξ, η, ζ le componenti di un altro vettore \mathfrak{B} , legato a X, Y, Z dalle equazioni

$$(0.0.18) \quad \xi = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \quad \eta = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \quad \zeta = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}$$

Dico che l'integrale di superficie di \mathfrak{B} , preso sulla superficie S , è uguale all'integrale di linea di \mathfrak{A} , preso lungo la curva s . È chiaro che ξ, η, ζ soddisfano la condizione sinusoidale

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

Siano l, m, n i coseni direttori della normale a un elemento di superficie dS contata nella direzione positiva. Allora il valore dell'integrale di superficie di \mathfrak{B} si può scrivere

$$(0.0.19) \quad \iint (l\xi + m\eta + n\zeta) dS$$

Per farci un'idea esatta di ciò che si deve intendere con l'elemento di superficie dS , supporremo che i valori delle coordinate x, y, z siano dati per ogni punto della in funzione di due variabili indipendenti α, β . Se, restando β , α varia, il punto (x, y, z) descrive una curva sulla superficie; e se si assegna a β una serie di valori, una serie di simili curve saranno descritte. tutte situate sulla superficie S . Analogamente, se si assegna ad α una serie di valori costanti, si tratterà una seconda serie di curve taglianti la prima serie e dividendo tutta la superficie in parti elementari, di cui una qualunque può essere presa per rappresentare l'elemento dS .

La proiezione di questo elemento sul piano yz è, dalla formula ordinaria, che dà la superficie di un parallelogramma infinitamente piccolo,

$$(0.0.20) \quad l dS = \left(\frac{dy}{dz} \frac{ds}{d\beta} - \frac{dy}{d\beta} \frac{dz}{d\alpha} \right) d\beta d\alpha$$

Le espressioni di $m dS$ e di $n dS$ si dedurranno da queste con una permutazione circolare. L'integrale da valutare è

$$\iint (l\xi + m\eta + n\zeta) dS$$

o, sostituendo a ξ, η, ζ i loro valori in funzione di X, Y, Z

$$(0.0.21) \quad \iint \left(m \frac{dX}{dz} - n \frac{dX}{dy} + n \frac{dY}{dx} - l \frac{dY}{dz} + l \frac{dZ}{dy} - m \frac{dZ}{dx} \right) dS$$

La parte di questo integrale che dipende da X si può scrivere

$$(0.0.22) \quad \iint \left[\frac{dX}{dz} \left(\frac{dz}{d\alpha} \frac{dx}{d\beta} - \frac{dz}{d\beta} \frac{dx}{d\alpha} \right) - \frac{dX}{dy} \left(\frac{dx}{d\alpha} \frac{dy}{d\beta} - \frac{dx}{d\beta} \frac{dy}{d\alpha} \right) \right] d\beta d\alpha$$

che diviene, aggiungendo e sottraendo $\frac{dX}{dx} \frac{dx}{d\alpha} \frac{dx}{d\beta}$

$$(0.0.23) \quad \iint \left[\frac{dx}{d\beta} \left(\frac{dX}{dx} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{dX}{dy} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{dX}{dz} \frac{dz}{d\alpha} \right) - \frac{dx}{d\alpha} \left(\frac{dX}{dx} \frac{dx}{d\beta} + \frac{dX}{dy} \frac{dy}{d\beta} + \frac{dX}{dz} \frac{dz}{d\beta} \right) \right] d\beta d\alpha = \\ = \iint \left(\frac{dX}{dx} \frac{dx}{d\beta} - \frac{dX}{d\beta} \frac{dx}{d\alpha} \right) d\beta d\alpha$$

Supponiamo ora che le curve per le quali α è costante formino una serie di curve chiuse circondanti il punto della superficie per il quale α ha il suo valore minimo α_0 , l'ultima curva della serie, per la quale $\alpha = \alpha_1$, coincidente con la curva chiusa iniziale s .

Supponiamo, inoltre, che le curve per le quali β è costante formino una serie di linee tracciate dal punto per il quale $\alpha = \alpha_0$ fino alla curva s , confondendosi la prima curva β_0 e l'ultima β_1 .

Integrando per parti la (23), il primo termine rispetto ad α e il secondo rispetto a β , gli integrali doppi si eliminano tra loro: l'integrale

$$\int_{\beta_0}^{\beta_1} \left(X \frac{dx}{d\beta} \right)_{\alpha=\alpha_0} d\beta$$

è nullo, poiché la curva $\alpha = \alpha_0$ si riduce a un punto, per il quale vi è un solo valore di X e di x .

I due integrali

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(X \frac{dx}{d\alpha} \right)_{\beta=\beta_0} d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(X \frac{dx}{d\alpha} \right)_{\beta=\beta_1} d\alpha$$

si determinano l'un l'altro, poiché il punto (α, β_0) si confonde con il punto (α, β_1) .

La (23) si riduce quindi a

$$(0.0.24) \quad \int_{\beta_0}^{\beta_1} \left(X \frac{dx}{d\beta} \right)_{\alpha=\alpha_0} d\beta$$

e, poiché la curva $\alpha = \alpha_1$ è identica alla curva s , possiamo scrivere questa espressione

$$(0.0.25) \quad \int X \frac{dx}{ds} ds$$

effettuandosi l'integrazione lungo la curva s . Si tratteranno allo stesso modo le parti dell'integrale di superficie che dipendono da Y e Z , di modo che si ha infine

$$(0.0.26) \quad \iint (l\xi + m\eta + n\zeta) dS = \iint \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds$$

estendendosi il primo integrale alla superficie S e il secondo alla curva limite s ¹⁶.

Effetto dell'operatore ∇ su una funzione vettoriale. 25. Abbiamo visto che l'operazione rappresentata da ∇ è quella per la quale si deduce un vettore dal suo potenziale. La stessa operazione, applicata a una funzione vettoriale, dà risultati che intervengono in due dei teoremi precedentemente stabiliti (III e IV). L'estensione di questo operatore agli spostamenti vettoriali e la maggior parte degli sviluppi che seguono sono dovuti al professor Tait¹⁷.

Sia σ una funzione vettoriale di ρ , il vettore di un punto variabile. Poniamo, secondo l'uso

$$\rho = ix + jy + kz$$

¹⁶Questo teorema è stato dato dal professor Stokes (*Smith's prize Examination*, 1854, problema 8). È dimostrato nella *Natural Philosophy* di Thomson e Tait.

¹⁷Si veda *Proc. R. S. Edin.*, 28 aprile 1862; *Sur le théoreme de Green ed d'autres qui en dépendent* (*Proc. R. S. Edin.*, 1869.70), Memoria molto importante; e *Sur quelques intégrales de quaternions* (*Proc. R. S. Edin.*, 1870-71).

e

$$\sigma = iX + jY + kZ$$

dove $X; Y; Z$ sono le componenti di σ , lungo le direzioni degli assi. Dobbiamo effettuare su σ l'operazione

$$\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}$$

Effettuiamo questa operazione applicando le regole della moltiplicazione di i, j, k ; troviamo che $\nabla\sigma$ si compone di due parti, una scalare e l'altra vettoriale.

La parte scalare è

$$S\nabla\sigma = - \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right)$$

(si veda il Teorema III) e la parte vettoriale è

$$V\nabla\sigma = i \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) + j \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) + k \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right)$$

e, se la relazione tra X, Y, Z e ξ, η, ζ è quella che è stata data dalla (18) del teorema precedente, possiamo scrivere

$$V\nabla\sigma = i\xi + j\eta + k\zeta$$

(si veda il Teorema IV).

Si vede quindi che le funzioni di X, Y, Z che si presentano nei due teoremi si ottengono entrambe effettuando l'operazione ∇ sul vettore le cui componenti sono X, Y, Z . I teoremi stessi si possono scrivere

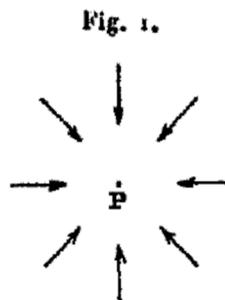
$$(0.0.27) \quad \iiint S\nabla\sigma dS = \iint S \cdot \sigma U\nu ds$$

e

$$(0.0.28) \quad \int S\sigma d\rho = \iint S \cdot \nabla\sigma U\nu ds$$

dove dS è un elemento di volume, ds un elemento di superficie, $d\rho$ un elemento di curva e $U\nu$ un vettore unitario, diretto lungo la normale.

Per comprendere il significato di queste funzioni di un vettore, supponiamo che σ_0 sia il valore di σ in un punto P ed esaminiamo quale è il valore di $\sigma - \sigma_0$ nelle vicinanze di P . Se, attorno al punto P , tracciamo una superficie chiusa e che l'integrale di σ su questa superficie sia diretto verso l'interno¹⁸, $S\nabla\sigma$ sarà positivo, e, dappertutto nell'intorno del punto P , il vettore $\sigma - \sigma_0$ sarà diretto verso questo punto, così come indicato nella figura 1.

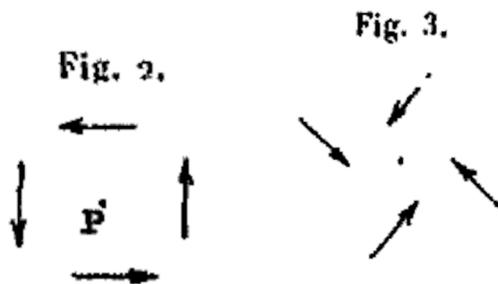


Per questo propongo di chiamare la parte scalare di $\nabla\sigma$ la convergenza di σ al punto P .

Per determinare il verso della parte vettoriale di $\nabla\sigma$, supponiamo di guardare nella direzione del vettore le cui componenti sono ξ, η, ζ ed esaminiamo il vettore $\sigma - \sigma_0$ vicino al punto P . Si vedrà che, come sulla fig. 2, il vettore è dappertutto disposto tangenzialmente e in una direzione opposta al movimento delle lancette di un orologio.

¹⁸Cioè se si considera la parte interna di questa superficie come positiva.

Propongo, ma senza grande fiducia, di chiamare la parte vettoriale di $\nabla\sigma$ il *vortice* o la *versione* di σ nel punto P .



La fig. 3 mostra un esempio di versione e di convergenza combinate. Consideriamo ora il significato dell'equazione

$$V\nabla\sigma = 0$$

Essa implica che $\nabla\sigma$ è scalare, o che il vettore σ è il gradiente di qualche funzione scalare Ψ . Queste applicazioni del simbolo di operazione ∇ sono dovute al professor Tait¹⁹. Uno sviluppo più completo di questa teoria è dato nella Memoria *Sur le théorème de Green, e sur d'autres qui en dépendent*, al quale rinvio il lettore per lo studio delle proprietà del simbolo ∇ per mezzo dei soli metodi dei quaternioni²⁰.

26. Una delle proprietà più significative del simbolo d'operazione ∇ è che, ripetuto, diviene

$$\nabla^2 = - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right)$$

simbolo che si presenta in tutte le parti della Fisica e che chiameremo *simbolo di Laplace*.

Questo simbolo è essenzialmente scalare: quando è applicato a una funzione scalare, il risultato è scalare; quando è applicato a un vettore, il risultato è un vettore.

Se da un punto P come centro tracciamo una piccola sfera di raggio r , e se q_0 è il valore di q al centro, \bar{q} il suo valore medio per tutti i punti posti all'interno della sfera,

$$q_0 - \bar{q} = \frac{1}{10} r^2 \nabla^2 q$$

di modo che il valore di q al centro è maggiore o minore del valore medio, secondo che $\nabla^2 q$ è positivo o negativo²¹.

¹⁹*Proceedings R. s. Edin.* 1862.

²⁰*Trans. R. S. Edin.*, 1869-70.

²¹[Infatti, per un punto di questa sfera,

$$q = q_0 + \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + k \frac{\partial}{\partial z}z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y}xy + \dots \right)$$

il valore medio è

$$\frac{3}{4\pi r^3} \iiint q dx dy dz$$

ma, se $d\omega$ rappresenta $dx dy dz$, si ha per la sfera

$$\int x d\omega = \int y d\omega = \int z d\omega = \int yz d\omega = \int xz d\omega = \int xy d\omega = 0$$

e

$$\int x^2 d\omega = \int y^2 d\omega = \int z^2 d\omega = \frac{1}{3} \int r^2 d\omega = \frac{1}{3} \int_0^r 4\pi r^4 d\omega = \frac{1}{15} \pi r^4$$

da cui, infine,

$$\frac{3}{4\pi r^3} \iiint q dx dy dz = \bar{q} + \frac{1}{10} r^2 \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right)$$

(P.)]

Per questo propongo di chiamare $\nabla^2 q$ la concentrazione di q nel punto P , poiché indica l'eccesso del valore di q in questo punto sul suo valore medio nell'intorno di questo punto.

Se q è una funzione scalare, si conosce il modo di trovare il suo valore medio. Se una funzione vettoriale, si troverà il suo valore medio per mezzo delle regole sull'integrazione delle funzioni vettoriali. Il risultato è naturalmente un vettore.

Parte 1

ELETTROSTATICA

Descrizione dei fenomeni

27. Esperienze I¹. - Se un pezzo di vetro e un pezzo di resina, non presentano alcuna proprietà elettrica, vengono strofinati tra loro, essi non manifestano proprietà elettriche; ma, separandoli, si attirano l'un l'altro.

Se un secondo pezzo di vetro è strofinato contro un secondo pezzo di resina, ed entrambi, dopo essere stati separati, vengono sospesi nelle vicinanze dei primi pezzetti di vetro e di resina, si osserva che:

- 1° I due pezzi di vetro si respingono tra loro;
- 2° ogni pezzo di vetro attrae ognuno dei pezzi di resina;
- 3° i due pezzi di resina si respingono tra loro.

Si chiamano *fenomeni elettrici* questi fenomeni di attrazione e di repulsione; i corpi che li presentano sono detti *elettrizzati* o *carichi di elettricità*.

I corpi possono essere elettrizzati in modi diversi dallo sfregamento.

Le proprietà di due pezzi di vetro sono simili tra loro e opposte a quelle di due pezzi di resina: il vetro attrae ciò che la resina respinge, e respinge ciò che la resina attrae.

Se un corpo, che è stato elettrizzato in un modo qualunque, si comporta come il vetro, cioè, se respinge il vetro e attrae la resina, si dice che è carica di elettricità vetrosa; se esso attrae il vetro e respinge la resina, si dice che ha elettricità resinosa. Si constata che tutti i corpi elettrizzati hanno uno l'altro tipo di elettricità.

La convenzione d'uso introdotta dagli scienziati chiama *positiva* l'elettricità vetrosa e *negativa* quella resinosa. I due tipi di elettricità avendo proprietà esattamente opposte, ci consentono di indicarle con segni contrari: a chi bisogna assegnare il segno + è stabilito solo da una convenzione; così come per una analoga convenzione, nelle figure matematiche si contano positivamente le lunghezze dirette verso destra.

Non si può osservare alcuna forza di attrazione o di repulsione che si esercita tra un corpo elettrizzato e un altro che non lo è. In tutti i casi dove si constata un'azione di un corpo elettrizzato sugli altri corpi che non avevano ricevuto carica preliminare, questi corpi sono *elettrizzati per induzione*.

Elettrizzazione per induzione. 28. Esperienza II². - Si sospende con dei fili di seta bianca un contenitore di metallo cavo e si attacca il suo coperchio a un filo simile, di modo che si possa aprire e chiudere il contenitore senza toccarlo.

Si sospendono i pezzi di vetro e di resina e li si elettrizza come in precedenza.

Allora, non avendo il contenitore alcuna carica elettrica iniziale, si sospende (fig. 4) con il suo filo il pezzo di vetro all'interno del recipiente, ma senza che vi sia contatto con esso; si chiude il coperchio e si trova che l'esterno del contenitore ha una carica vetrosa; si può mostrare che l'elettrizzazione è esattamente la stessa all'esterno del recipiente, in qualsiasi punto sia sospeso il vetro.

Se ora, senza toccare il contenitore, si ritrae il vetro, esso possiede la stessa elettrizzazione di prima della sua introduzione; quella del recipiente è scomparsa.

¹Si veda Sir William Thomson, *Sur la théorie mathématique de l'électricité* (Cambridge and Dublin *Mathematica Journal*, marzo 1848).

²Questa esperienza e numerose altre che seguono, sono dovute a Faraday: *Sur l'induction électrique statique* (*Phil. Mag.*, 1843), e *Exp. Res.*, vol. II, p. 279.



Questa elettrizzazione, che si produce fintanto che il vetro è all'interno del recipiente, che scompare quando il vetro è tolto, si chiama *elettrizzazione per induzione*.

Effetti simili si produrrebbero se si sospendesse il vetro vicino e al di fuori del contenitore; ma, in questo caso, si troverebbe su una parte della superficie esterna una elettrizzazione vetrosa e sull'altra parte una elettrizzazione resinosa. Quando il vetro è all'interno, tutta la superficie esterna ha l'elettrizzazione vetrosa, tutta la superficie interna quella resinosa.

Elettrizzazione per conduzione. 29. Esperienza III. - Si elettrizza il contenitore di metallo per induzione, come nell'esperienza precedente; si sospende nelle vicinanze, con fili di seta bianca, un secondo corpo metallico; e un filo di metallo, sospeso parallelamente, è portato a far toccare il recipiente elettrizzato e il corpo metallico.

Si trova allora che il secondo corpo ha una elettrizzazione vetrosa e che l'elettrizzazione vetrosa del recipiente è diminuita.

Lo stato elettrico è stato trasmesso dal recipiente al secondo corpo per mezzo del filo metallico. Questo filo è detto un *conduttore di elettricità*, e si dice che il secondo corpo è stato *elettrizzato per conduzione*.

Conduttori e isolanti. Esperienza IV. Se, invece del filo di metallo, si fosse impiegato un'asta di vetro, una bacchetta di resina o di guttaperca, o un filo di seta bianca, non si osserverebbe alcun trasporto di elettricità. Per questo motivo, queste sostanze sono dette *non conduttori di elettricità*. I non conduttori servono, nelle esperienze di elettricità, a sostenere i corpi elettrizzati, senza eliminare la loro elettricità. Sono chiamati *isolanti*.

I metalli sono buoni conduttori; l'aria, il vetro, la resina, la guttaperca, il caucciù vulcanizzato, la paraffina, sono buoni isolanti; ma, come vedremo in seguito, tutte le sostanze presentano della resistenza al passaggio dell'elettricità e tutte la lasciano passare, sebbene a livelli estremamente diversi. Questo argomento sarà esaminato quando tratteremo il movimento dell'elettricità. Per ora, considereremo solo due classi di corpi, i buoni conduttori e i buoni isolanti.

Nell'esperienza II, un corpo elettrizzato produce elettrizzazione del contenitore metallico, dal quale è separato dall'aria, mezzo non conduttore. Un simile mezzo, considerato trasmettere senza conduzione gli effetti elettrici, è stato chiamato da Faraday *mezzo dielettrico*; l'azione che si produce attraverso questo mezzo è detta *induzione*.

Nell'esperienza III, il contenitore elettrizzato ha prodotto l'elettrizzazione del secondo corpo metallico tramite l'intermediazione del filo metallico. Supponiamo di togliere questo filo e il pezzo di vetro elettrizzato ritirato dal recipiente senza toccarlo e allontanato a una distanza sufficiente. Il secondo corpo continuerà a mostrare una elettrizzazione vetrosa; ma il recipiente, dopo che il vetro sarà stato tolto, avrà una elettrizzazione resinosa. Se ora mettiamo il filo metallico a contatto con i due corpi, vi sarà conduzione lungo il filo e tutta l'elettrizzazione sparirà dai due corpi, ciò che mostra che essi erano elettrizzati allo stesso modo ma di segno contrario.

30. Esperienza V. - L'esperienza II ha fatto vedere che, se, dopo aver elettrizzato un pezzo di vetro sfregandolo contro della resina, lo si sospende all'interno di un contenitore metallico, si osserva all'esterno del contenitore una elettrizzazione che non dipende dalla posizione del vetro.

Se ora, senza toccare né recipiente né il pezzo di resina, si introduce nello stesso recipiente il pezzo di resina contro il quale il vetro è stato sfregato, si osserva che non vi è più all'esterno del contenitore alcuna elettrizzazione. Si conclude da ciò che l'elettrizzazione della resina è esattamente uguale e opposta a quella del vetro. Introducendo un numero qualsiasi di corpi carichi in un modo qualunque, si può mostrare che l'elettrizzazione esterna del recipiente è quella che produrrebbe la somma algebrica di tutte le elettrizzazioni, essendo le cariche resinose contate con il segno $-$. Abbiamo così un metodo pratico per sommare gli effetti elettrici di numerosi corpi senza alterare in nulla l'elettrizzazione di ciascuno di essi.

31. Esperienza VI³. - Prendiamo un secondo contenitore metallico isolato B ; mettiamo nel primo recipiente A il pezzo di vetro elettrizzato, nel secondo B il pezzo di resina elettrizzato; poi mettiamo i due contenitori in comunicazione con il filo di metallo, come nell'Esperienza III. Ogni traccia di elettrizzazione scompare.

Togliamo ora il filo metallico, senza toccare i contenitori, ritiriamo i pezzi di vetro e di resina. Troviamo che A è carico di elettricità resinosa e B di elettricità vetrosa.

Se ora introduciamo il vetro e il recipiente A in un contenitore più grande isolato C , troviamo che non vi è elettrizzazione all'esterno di C . Ciò mostra che l'elettrizzazione di A è esattamente uguale e contraria a quella del pezzo di vetro; e si farà vedere analogamente che l'elettrizzazione di B è esattamente uguale e contraria a quella del pezzetto di resina.

Abbiamo così un metodo per caricare un recipiente con una quantità di elettricità esattamente uguale e contraria a quella che si trova su un corpo elettrizzato, e ciò senza alterare per nulla l'elettrizzazione di quest'ultimo; e possiamo in questo modo caricare un numero qualsiasi di recipienti di quantità esattamente uguali di elettricità dell'uno o dell'altro tipo, quantità che possiamo prendere per unità provvisorie.

32. Esperienza VII. - Si carica il contenitore B di una quantità di elettricità positiva che, per il momento, chiameremo l'*unità*; poi lo si introduce nel grande contenitore isolato C , senza che vi sia contatto. Si produce una elettrizzazione positiva all'esterno di C . Si fa allora toccare B contro l'interno di C . Non si osserva alcun cambiamento nell'elettrizzazione esterna di C ; ma, se si toglie B da C , senza che vi sia contatto, e che lo si sposti ad una distanza sufficiente, si riconosce che B è interamente scarico, ma che C è caricato dell'unità di elettricità positiva.

Abbiamo quindi un metodo per far passare su C la carica di B .

Si carica di nuovo B dell'unità di elettricità positiva, lo si introduce nel contenitore C che ha già una carica, lo si fa toccare la superficie interna e lo si toglie. Si trova che, questa volta ancora, B è completamente scarico e che, di conseguenza, la carica C è raddoppiata.

Ripetendo questa operazione, si trova che, per quanto intensa sia la carica preliminare di C , e in qualunque maniera venga caricato B , dall'istante in cui B è dapprima interamente circondato da C , poi portato a contatto con C , e infine tolto senza toccare C , la carica di B passa completamente su C e B è assolutamente scarico.

Questa esperienza ci dà un metodo per caricare un corpo con un numero qualunque di unità di elettricità. Quando passeremo alla teoria matematica dell'elettricità, vedremo che il risultato di questa esperienza ci fornisce una prova rigorosa dell'esattezza della teoria.

33. Prima di passare allo studio delle leggi delle forze elettriche, riassumiamo i fatti stabiliti.

Ponendo un sistema elettrizzato qualsiasi all'interno di un contenitore conduttore cavo isolato ed esaminando l'effetto prodotto all'esterno del contenitore, determiniamo la natura della elettrizzazione totale nel sistema interno, e ciò, senza che vi sia comunicazione di elettricità tra i diversi corpi del sistema.

³[Questa esperienza è a mala pena realizzabile e, come la precedente, soggetta alla stessa obiezione per quanto riguarda le misura. (C).

Possiamo studiare l'elettrizzazione dell'esterno del contenitore con un procedimento molto delicato, consistente nel mettere il contenitore in comunicazione con un elettroscopio.

Possiamo supporre che l'elettroscopio sia formato da una foglia d'oro sospesa tra due corpi carichi, uno positivamente e l'altro negativamente. Se la foglia d'oro è elettrizzata, essa inclinerà verso il corpo che ha una carica contraria alla sua. Aumentando opportunamente l'elettrizzazione dei due corpi e la delicatezza della sospensione, possiamo rendere aumentare notevolmente la sensibilità della foglia d'oro.

Quando descriveremo gli elettrometri e i moltiplicatori, vedremo che vi sono metodi ancora più perfetti per scoprire l'esistenza di una carica e per verificare l'esattezza dei nostri teoremi; ma, per ora, ammetteremo che la prova si faccia collegando il contenitore cavo a un elettroscopio a foglie d'oro.

Questo è il metodo utilizzato da Faraday per la sua pregevole dimostrazione delle leggi dei fenomeni elettrici⁴.

34. 1° L'elettrizzazione totale di un corpo o di un sistema di corpi resta sempre la stessa, a meno che non riceva elettricità o ne ceda ad altri corpi.

In tutte le esperienze di elettricità, si trova che l'elettrizzazione dei corpi è variabile, ma sempre si riconosce che queste variazioni sono dovute a difetti di isolamento; e migliorando i procedimenti di isolamento, la perdita diminuisce. Si è quindi in diritto di affermare che l'elettrizzazione di un corpo posto in un mezzo perfettamente isolante resterà perfettamente costante.

2° Quando un corpo ne elettrizza un altro per conduzione, la carica totale dei due corpi rimane costante, cioè che, tanta elettricità positiva perde un corpo o tanta positiva ne guadagna altrettanta ne guadagna l'altro di positiva o ne perde di negativa.

Infatti, se i due corpi sono racchiusi in un contenitore cavo, non si osserva alcun cambiamento nell'elettrizzazione totale.

3° Quando si produce l'elettrizzazione mediante sfregamento, o con un altro metodo noto, si formano quantità uguali di elettricità positiva e di elettricità negativa.

Infatti, si può esaminare la carica totale del sistema con il contenitore cavo, o effettuare all'interno del recipiente stesso le operazioni che producono l'elettrizzazione; per quanto energica sia l'elettrizzazione delle parti del sistema, la carica dell'insieme, come indicata dall'elettroscopio a foglie d'oro, è invariabilmente nulla.

Pertanto l'elettrizzazione di un corpo è una grandezza fisica che può essere misurata e si può, combinando sperimentalmente due o più elettrizzazioni, ottenere un risultato analogo a quello che dà la somma algebrica di due quantità. Possiamo quindi impiegare un linguaggio che, nell'elettrizzazione, intende la quantità così come la qualità, e di parlare di un corpo elettrizzato come "di un corpo caricato con una certa quantità di elettricità positiva o negativa".

35. Quando accordiamo all'elettricità, così come abbiamo fatto, la qualità di grandezza fisica, non dobbiamo ammettere in modo troppo frettoloso, che essa è o non è una sostanza, che è o non è una forma di energia, o che essa appartiene a qualcuna delle specie note di grandezze fisiche. Tutto ciò che abbiamo provato è che non la si può né creare né distruggere, e che, di conseguenza, se la quantità totale di elettricità compresa all'interno di una superficie aumenta o diminuisce, questa quantità in più o in meno deve necessariamente aver attraversato la superficie per entrare o uscire.

È ciò che è vero pure per la materia, e si esprime con l'equazione nota in Idrodinamica sotto il nome di *equazione di continuità*.

Non è più vero per il calore, poiché il calore contenuto all'interno di una superficie chiusa può aumentare o diminuire senza che entri del calore o che ne esca attraverso la superficie; vi può essere trasformazione in calore di qualche altra forma di energia, o di calore in energia.

Non è vero per l'energia in generale, se ammettiamo l'azione diretta di corpi a distanza; poiché allora un corpo esterno alla superficie chiusa può scambiare energia con il corpo compreso

⁴On static electrical inductive action (Phil. Mag., 1843), e *Exp. Res.*, vol. II, p. 249.

nella superficie. Al contrario, se tutto ciò che sembra un'azione a distanza risulta da un'azione tra le parti di un mezzo intermediario, e se comprendiamo chiaramente la natura di questa azione tra le parti del mezzo, si concepisce che, in tutti i casi in cui l'energia aumenta o diminuisce all'interno di una superficie chiusa, potremmo cogliere al passaggio l'energia che entra o esce nella superficie.

Vi è ancora un altro motivo che ci permette di affermare che l'elettricità, considerata come grandezza fisica, e sinonimo di carica totale del corpo, non è come il calore, una forma di energia. Un sistema elettrizzato possiede una certa energia; questa si può calcolare moltiplicando la quantità di elettricità che si trova su ogni parte del sistema per un'altra grandezza fisica, il potenziale di questa parte del sistema, e prendendo la metà della somma di questi prodotti. Le grandezze *elettricità* e *potenziale*, moltiplicate tra loro, producono la grandezza *energia*. È quindi impossibile che l'elettricità e l'energia siano grandezze della stessa specie, essendo l'elettricità solo uno dei fattori dell'energia, mentre l'altro è il potenziale.

L'energia, che è il prodotto di questi due fattori, può anche essere considerata come il prodotto di diversi altri gruppi di due fattori; così:

Una forza per una distanza lungo la quale agisce la forza

Una massa per la gravità agente lungo un certo percorso verticale

Una massa per la metà del quadrato della sua velocità

Una pressione per un volume di fluido introdotto nel recipiente a questa pressione.

Una affinità chimica per un cambiamento chimico misurato dal numero di equivalenti elettrochimici che entrano in combinazione.

Se arriviamo a farci idee meccaniche distinte sulla natura del potenziale elettrico, potremo, combinandole all'idea di energia, determinare la categoria fisica nella quale deve essere classificata l'elettricità.

36. Nella maggior parte delle teorie su questo aspetto, si tratta l'elettricità come una sostanza; ma, siccome vi sono due tipi di elettrizzazione, che, combinate tra loro, si annullano, e siccome non concepiamo due sostanze che si annullano tra loro, si è stabilita una distinzione tra l'elettricità libera e quella combinata.

Teoria dei due fluidi. Nella teoria dei *due fluidi*, si suppone che tutti i corpi che non sono elettrizzati sono carichi di quantità uguali di elettricità positiva e negativa. Si ammette che queste quantità sono così grandi che, con nessun procedimento di elettrizzazione, si possa togliere a un corpo tutta la sua elettricità dell'una o dell'altra specie. In questa teoria, l'operazione che costituisce l'elettrizzazione consiste nel prendere a un corpo *A* una certa quantità *P* di elettricità positiva per darla a un corpo *B*, oppure prendere a *B* una quantità *N* di elettricità negativa che si dà ad *A*, o nel combinare in qualche maniera queste due operazioni.

Il risultato sarà che *A* avrà $P + N$ unità di elettricità negativo in aggiunta alla sua carica positiva restante, la quale è supposta combinata a una quantità uguale di elettricità negativa. Questa quantità $P + N$ è ciò che viene detta l'*elettricità libera*, il resto è ciò che si chiama l'*elettricità combinata, latente o fissata*.

Esponendo questa teoria, si sono in genere chiamate le due elettricità *fluidi*, poiché essi si possono trasportare da un corpo su un altro e sono molto mobili nei corpi conduttori. Le altre proprietà dei fluidi, inerzia, peso, elasticità, non sono stati loro attribuiti dagli autori che hanno fatto uso di questa teoria solo in ricerche matematiche; ma l'impiego di questa parola di *fluido* ha indotto in errore il senso comune e con esso molti scienziati che non erano fisici e che hanno colto questa parola di *fluido*, il solo termine che parve loro intelligibile nell'esposizione della teoria.

Vedremo che lo sviluppo della teoria matematica è dovuta in larga misura ad autori che si esprimevano nel linguaggio della teoria dei due fluidi. Ma i loro risultati sono stati dedotti interamente da dati che si possono stabilire con l'esperienza, e che, di conseguenza, sono forzatamente veri, che noi adottiamo oppure no la teoria dei due fluidi. E, di conseguenza, la

verifica sperimentale di questi risultati matematici non prova nulla, né pro né contro le dottrine particolari di questa teoria.

La considerazione dei due fluidi ci permette di considerare l'elettrizzazione negativa di A e l'elettrizzazione positiva di B come l'effetto di una qualunque delle tre diverse operazioni che portano allo stesso risultato. Abbiamo già supposto che essa è dovuta al trasporto di P unità di elettricità positiva di A su B , e di N unità di elettricità negativa da B su A . Ma se $P + N$ unità di elettricità positiva fossero state trasportate da B su A , o se $P + N$ unità di elettricità negativa fossero state trasportata da B su A , il risultato sarebbe lo stesso di prima per quanto riguarda l'elettricità libera su A o su B ; ma la quantità di elettricità combinata lasciata su A sarà minore nel secondo caso, e maggiore nel terzo di quanto sarebbe nel primo.

Risulterà quindi da questa teoria che è possibile alterare, non soltanto la quantità di elettricità libera di un corpo, ma anche la sua quantità di elettricità combinata. Non si è mai osservato sui corpi elettrizzati alcun fenomeno che si possa attribuire a una variazione della quantità di elettricità combinata. Pertanto, o le elettricità combinate non hanno proprietà osservabili, o non vi è variazione possibile della quantità di elettricità combinata. La prima di queste ipotesi non presenta difficoltà dal punto di vista puramente matematico, poiché non attribuendo ai fluidi altre proprietà che quelle di attrazione e repulsione, a riguardo delle quali i due fluidi si annullano l'un l'altro puramente e semplicemente, l'effetto di questi fluidi combinati è veramente e identicamente nullo. Ma, per coloro che non possono impiegare il termine fluido senza avere l'idea di una sostanza, è difficile immaginare che la combinazione dei due fluidi non abbia proprietà del tutto, che l'aggiunta su un corpo di quantità più o meno grandi di questa combinazione non abbia alcun effetto su questi corpi, che essa non aumenti né la sua massa né il suo peso, né cambi alcuna delle sue proprietà. Certe persone sono state così portate a supporre che ogni volta che vi è una elettrizzazione, quantità esattamente uguali di ogni fluido sono trasportate in direzioni opposte, di modo che la quantità totale dei due fluidi presi insieme resta sempre la stessa su tutti i corpi. Con questa nuova legge, essi cercano di salvare le apparenze, dimenticando che non si ha per nulla bisogno della loro legge, se non per accordare la teoria dei due fluidi con l'esperienza, e per impedirle di predire fenomeni che non si producono.

Teoria di un solo fluido. 37. Nella teoria di un solo fluido, tutto è simile alla teoria dei due fluidi, salvo che invece di supporre due sostanze uguali e opposte, ve n'è una sola, in genere il fluido negativo, alla quale si attribuiscono le proprietà e il nome della materia ordinaria, conservando tra l'altro il nome di *fluido elettrico*. Si suppone che le molecole del fluido si respingano tra loro secondo la legge dell'inverso del quadrato delle distanze, e che esse attraggano le molecole materiali secondo la stessa legge. Se la quantità di fluido elettrico contenuto in un corpo è tale che, per una molecola di fluido elettrico esterno al corpo, la repulsione dovuta al fluido elettrico del corpo sia uguale all'attrazione dovuta alla sua massa materiale, si dice che il corpo è saturo. Se la quantità di fluido del corpo è maggiore di quella che determina la saturazione, l'eccesso è detto *fluido eccedente*, e si dice che il corpo è sovraccarico. Se la quantità di fluido è minore di quanto serve per la saturazione, si dice che il corpo è sotto caricato, e si chiama talvolta *fluido carente* la quantità di fluido che sarebbe necessaria per saturarlo. Il numero di unità di elettricità necessaria per saturare 1 g di materia comune deve essere molto grande; infatti 1 g di oro può essere battuto fino a presentare una superficie di $1 m^2$ e sotto questa forma può prendere una carica negativa di almeno 60000 unità di elettricità. Per saturare la foglia d'oro, bisogna fornirgli questa quantità di fluido elettrico: di modo che la quantità totale necessaria per saturarla deve essere ancora più grande. Si suppone che tra due corpi saturi, l'attrazione che si esercita tra la materia e il fluido è un poco più grande della repulsione che agisce tra le due parti di fluido e le due parti di materia; e si suppone che questa forza residua renda conto dell'attrazione gravitazionale.

Questa teoria non ha il torto di spiegare troppo, come quella dei due fluidi; e tuttavia esige che ammettiamo che la massa di fluido elettrico sia così piccola, che nessuna delle elettrizzazioni positiva o negativa che siamo in grado di produrre non possa accrescere o diminuire in modo apprezzabile né la massa né il peso di un corpo; e, inoltre, essa non ha potuto finora fornire

ragioni valide per supporre che l'elettrizzazione vetrosa piuttosto che quella resinosa siano dovuta ad un eccesso di elettricità.

Una obiezione è stata qualche volta opposta a questa teoria, da persone che dovrebbero meglio ragionare. Si è detto che l'ipotesi di una repulsione tra le particelle di materia non combinata all'elettricità è in contraddizione formale con questo fatto ben stabilito che, in tutto l'universo, tutte le particelle di materia si attraggono reciprocamente. Se la teoria di un solo fluido fosse vera, i corpi celesti dovrebbero respingersi tra loro.

Ma è evidente che, in questa teoria, se i corpi celesti fossero formati di materia non combinata a dell'elettricità, essi sarebbero allo stato più elevato di elettrizzazione negativa e si respingerebbero. Ora non abbiamo alcun motivo di credere che essi siano né che possano mantenersi in questo stato di elettrizzazione elevata. La terra e tutti i corpi dei quali abbiamo osservato l'attrazione sono ben piuttosto in uno stato di non elettrizzazione, cioè che questi corpi hanno la loro carica normale di elettricità e che la sola azione che si esercita tra di essi è la forza residua di cui si è prima parlato. Infatti, il modo artificiale con cui questa forza residua è introdotta costituisce una obiezione assai seria contro la teoria.

In quest'Opera e in diversi punti del nostro studio, mi propongo di mettere alla prova le diverse teorie, chiarendomi con certi fenomeni di altra natura. Da parte mia, cerco di chiarirmi sulla natura dell'elettricità studiando ciò che avviene nello spazio che separa i corpi elettrizzati. È la caratteristica essenziale del metodo di ricerca seguito da Faraday nelle sue *Experimental Researches*: mentre progrediremo, mi propongo di sviluppare, collegandoli sotto una forma matematica, i risultati ottenuti da Faraday, W. Thomson, ecc.; potremo vedere così quali fenomeni sono ben spiegati da tutte le teorie e quali altri rivelano le difficoltà proprie a ciascuna ipotesi.

Misura della forza che si esercita tra i corpi elettrizzati. 38. Le forze si possono misurare in diversi modi. Si può sospendere uno dei corpi a uno dei bracci di una bilancia sensibile e aggiungere pesi all'altro braccio fino al raggiungimento dell'equilibrio, quando il corpo non è elettrizzato. L'altro corpo è poi posto sotto il primo a una distanza nota di modo che l'attrazione o la repulsione dei due corpi, quando sono elettrizzati, aumenta o diminuisce il peso apparente del primo corpo. Il peso che bisogna aggiungere o togliere sull'altro braccio, espresso in unità dinamiche, misura la forza che agisce tra i corpi. Questa disposizione è stata impiegata da Sir Snow Harris, ed è quella che è stata adottata nell'elettrometria assoluta di Sir W. Thomson (si veda §217).

Qualche volta è più comodo impiegare una bilancia di torsione: un'asta orizzontale è sospesa a un filo sottile di metallo o di seta, e può oscillare attorno a questo filo verticale come asse. Il corpo è attaccato a un terminale di questa asta e la forza agisce su di esso in una direzione tangenziale, in modo da far ruotare l'asta attorno al suo asse verticale e a torcerlo di un certo angolo. Si determina la resistenza del filo a torsione, osservando la durata delle oscillazioni dell'asta, di cui si conosce il momento d'inerzia. Dall'angolo di torsione e dalla resistenza del filo si può dedurre la forza di attrazione o di repulsione. La bilancia di torsione è stata immaginata da Michell per determinare la forza gravitazionale che si esercita tra corpi di piccole dimensioni ed è stata utilizzata a questo fine da Cavendish. Coulomb, lavorando indipendentemente da questi due fisici, la inventò a sua volta, e l'applicò molto positivamente alla ricerca della legge delle forze elettrica e magnetica: da allora, la bilancia di torsione è sempre stata impiegata nelle ricerche in si devono misurare forze deboli (§215).

39. Supponiamo che, con uno di questi due metodi, possiamo misurare la forza che si esercita tra due corpi elettrizzati. Ammetteremo che le dimensioni dei corpi siano piccole rispetto alla distanza che li separa, di modo che il risultato non possa essere molto modificato dalle ineguaglianze possibili nella distribuzione dell'elettrizzazione su questi corpi; supporremo che questi corpi siano sospesi nell'aria a una distanza considerevole da ogni altro corpo sul quale essi potrebbero indurre una carica.

Troviamo allora che i corpi, essendo posti a una distanza fissa l'uno dall'altro ed essendo caricati rispettivamente di e ed e' delle nostre unità provvisorie di elettricità, si respingono tra loro con una forza proporzionale al prodotto ee' . Se e o e' è negativa, la forza diviene attrattiva; se e ed e' sono entrambe negative, la forza è di nuovo repulsiva.

Possiamo supporre che il primo corpo A sia carico di m unità di elettricità vetrosa e di n unità di elettricità negativa, e si può immaginare che i due tipi di elettricità siano posti in due punti diversi del corpo, come nell'esperienza V.

Supponiamo che il secondo corpo B sia carico di m' unità di elettricità positiva e di n' unità di elettricità negativa.

Allora, ognuna delle m unità positive di A respingerà ognuna delle m' unità positive di B con una forza f , ciò produrrà un effetto totale uguale a $mm'f$.

Poiché l'effetto dell'elettricità negativa è esattamente uguale e contrario a quello dell'elettricità positiva, ognuna delle m unità positive di A attirerà ognuna delle n' unità negative di B con una forza f , producendo un effetto totale uguale a $mn'f$.

Analogamente, le n unità negative di A attireranno le m' unità positive di B con una forza $nm'f$ e respingeranno le n' unità negative di B con una forza $nn'f$.

La repulsione totale sarà quindi $(mm' + nn')f$ e l'attrazione totale $(mn' + nm')f$.

La repulsione risultante sarà

$$(mm' + nn' - mn' - nm')f \quad \text{o} \quad (m - n)(m' - n')f$$

Ora, $m - n = e$ è il valore algebrico della carica di A e $m' - n' = e'$ è la carica di B , di modo che la repulsione risultante si può scrivere $ee'f$, essendo sempre ben chiaro che le quantità e ed e' sono prese con il loro proprio segno.

Variatione della forza con la distanza. 40. Dopo aver stabilito la legge della forza a distanza costante, possiamo misurare la forza che si esercita tra corpi con cariche costanti e poste a diverse distanze. Si trova, con misure dirette, che la forza, attrattiva o repulsiva, varia in ragione inversa del quadrato della distanza; di modo che, se f è la repulsione tra due unità all'unità di distanza, la repulsione alla distanza r sarà fr^{-2} , e l'espressione generale della repulsione tra e ed e' unità alla distanza r sarà

$$fee'r^{-2}$$

Definizione dell'unità elettrostatica di elettricità. 41. Finora abbiamo impiegato come unità di elettricità un campione assolutamente arbitrario, cioè, l'elettrizzazione di un certo pezzo di vetro, come se ci trovassimo all'inizio delle nostre esperienze. Siamo ora in grado di scegliere una unità secondo un principio stabilito, e, perché questa unità possa appartenere a un sistema generale, la definiremo in modo che f sia uguale all'unità; in altri termini:

L'unità elettrostatica di elettricità è la quantità di elettricità che, posta all'unità di distanza da una quantità uguale, la respinge con l'unità di forza.

Questa unità è detta *elettrostatica*, per distinguerla dall'unità *elettromagnetica*, che sarà definita in seguito.

Possiamo ora scrivere la legge generale delle azioni elettriche sotto la semplice formula

$$F = ee'r^{-2}$$

o: La repulsione che si esercita tra due corpi di piccole dimensioni rispettivamente di e ed e' unità di elettricità è numericamente uguale al prodotto delle cariche diviso per il quadrato della distanza.

Dimensione dell'unità elettrostatica di grandezza. 42. Se $[Q]$ è l'unità elettrostatica di grandezza presa per se stessa; se e ed e' sono i valori numerici di grandezze particolari, r il valore numerico della distanza e F il valore numerico della forza, l'equazione diviene

$$F[F] = ee'r^{-2} [Q^2] [L^{-2}]$$

da cui

$$[Q] = [L] \left[F^{\frac{1}{2}} \right] = \left[L^{\frac{3}{2}} T^{-1} M^{\frac{1}{2}} \right]$$

Questa unità è detta l'*unità elettrostatica di elettricità*. Si possono impiegare altre unità nelle applicazioni pratiche o in altri settori della scienza elettrica: ma, nelle equazioni dell'elettrostatica, è inteso che le grandezze di elettricità sono valutate in unità elettrostatiche; così come, in Astronomia fisica, si impiega un'unità di massa basata sui fenomeni della gravitazione, e differenti unità di massa abitualmente in uso.

Dimostrazione della legge della forza elettrica. 43. Si può considerare la legge della forza elettrica come stabilita entro certi limiti di esattezza dalle esperienze di Coulomb per mezzo della bilancia di torsione, ma esperienze di questa natura sono rese difficili e, fino a un certo punto, incerte per diverse cause di errore di cui bisogna rendersi conto per effettuare le correzioni necessarie.

In primo luogo, per essere capaci di ricevere cariche che bastano a produrre effetti misurabili, i corpi devono avere dimensioni apprezzabili relativamente alla loro distanza. Di conseguenza, l'azione di ogni corpo produce un certo effetto sulla distribuzione dell'elettricità dell'altro corpo, e non si possono più considerare le cariche come ugualmente distribuite sulla superficie, o riunite nel suo centro di gravità; ma bisogna calcolare il loro effetto con un studio complicato. Ciò è stato fatto da Poisson, nel caso di due sfere, nel modo più favorevole, e questo studio è stato grandemente semplificato dalla *Théorie des Images électriques* di Sir W. Thomson (§ 172-174).

Un'altra difficoltà riguarda l'azione dell'elettricità indotta sulle pareti della gabbia che contiene lo strumento. Se si ha cura di fare l'interno di questa gabbia esattamente cilindrico, e di ricoprirla di metallo, questo effetto può essere definito e misurato.

Una difficoltà di altra natura è l'isolamento imperfetto dei corpi, da cui risulta che la loro carica diminuisce costantemente. Coulomb ha studiato la legge della dispersione e corretto le sue esperienze per questo errore.

Dopo il tempo di Coulomb, i procedimenti per isolare i corpi elettrizzati o per misurare gli effetti elettrici sono stati alquanto perfezionati, soprattutto da Sir W. Thomson: tuttavia queste non sono esperienze, né misure dirette, che hanno stabilito la perfetta esattezza della legge di Coulomb, di cui sono piuttosto esempi numerici, ma lo studio matematico dei fenomeni descritti nell'esperienza VII, cioè che un corpo conduttore elettrizzato B , dopo aver toccato l'interno del conduttore cavo chiuso C , ed esserne stato tolto senza toccare C , si trova completamente scarico, qualunque sia l'elettrizzazione esterna di C . Per mezzo di un elettroscopio sensibile, è facile mostrare che non resta elettricità su B dopo questa operazione; e, secondo la teoria matematica che sarà data al § 74, non può che essere così se la forza varia in ragione inversa del quadrato della distanza; per ogni altra forma della legge, B sarebbe stato elettrizzato.

Il campo elettrico. 44. Il campo elettrico è la porzione di spazio vicina ai corpi elettrizzati, considerata dal punto di vista dei fenomeni elettrici. Può essere occupato dall'aria o da altri corpi, oppure da quello che chiamiamo *vuoto*, cioè uno spazio da cui abbiamo tolto tutte le sostanze sulle quali possiamo agire con i mezzi messi a nostra disposizione.

Se un corpo elettrizzato è introdotto in un punto di un campo elettrico, in generale determinerà un cambiamento nella distribuzione dell'elettrizzazione alla superficie degli altri corpi.

Ma, se il corpo è molto piccolo e se la sua carica è pure ugualmente piccola, l'elettrizzazione degli altri corpi non sarà sensibilmente modificata, e potremo considerare il corpo come definente, dal suo centro di gravità, un certo punto dello spazio. La forza che agisce sul corpo è allora proporzionale alla sua carica e cambia di segno quando la carica cambia di segno.

Siano e la carica del corpo, F la forza che agisce su di esso in una certa direzione. Se e è molto piccolo, F è proporzionale a e o

$$F = eR$$

essendo R una quantità che dipende dalla distribuzione dell'elettricità sugli altri corpi del campo. Se possiamo rendere la carica e uguale all'unità, senza alterare lo stato elettrico degli altri corpi, avremo $F = R$.

Chiameremo R la forza elettrica risultante nel punto considerato del campo e quando vorremo esprimere il fatto che questa grandezza è un vettore, lo indicheremo con \mathfrak{R} .

Forza elettromotrice e potenziale. 45. Se il piccolo corpo che porta la piccola carica e è spostato da un punto A fino a un punto B , lungo un percorso dato, sarà soggetto in ogni punto della sua traiettoria a una forza Re , dove R varia da un punto all'altro della traiettoria. Indichiamo con eE il lavoro totale effettuato sul corpo da queste forze elettriche: E è allora detto la *forza elettromotrice totale* lungo il percorso AB . Se il percorso forma un circuito chiuso, e se la forza elettromotrice totale lungo questo circuito non è nulla, l'elettricità non può essere in equilibrio, e si produce una corrente. Pertanto, in Elettrostatica, la forza elettromotrice totale lungo un circuito chiuso qualunque deve essere nulla; e se A e B sono due punti del circuito, la forza elettromotrice da A in B è la stessa, lungo due parti nelle quali può essere diviso il circuito; e, poiché ognuna di queste parti può essere modificata indipendentemente dall'altra, la forza elettromotrice totale da A in B è la stessa per tutti i percorsi che vanno da A a B .

Se si prende B come punto di riferimento rispetto a tutti gli altri punti, la forza elettromotrice totale da A in B è detta potenziale di A ; dipende solo dalla posizione di A . Nelle ricerche matematiche si prende generalmente B a una distanza infinita dai corpi elettrizzati.

Un corpo elettrizzato positivamente tende a muoversi da punti in cui il potenziale è più alto verso i punti dove è più basso, o verso i punti dove il potenziale è negativo; un corpo carico di elettricità negativa tende a muoversi nella direzione opposta.

Su un conduttore, l'elettricità si muove liberamente rispetto al conduttore. Se quindi due parti di un conduttore sono a potenziali diversi, l'elettricità positiva si porterà dalla parte avente il potenziale più elevato, e ciò, finché sussisterà la differenza. Un conduttore non può quindi essere in equilibrio elettrico a meno che il potenziale sia lo stesso in ognuno dei suoi punti. Questo potenziale è detto il *potenziale del conduttore*.

Superfici equipotenziali. 46. Se una superficie è descritta, o supposta descritta, nel campo elettrico, in modo che il potenziale elettrico sia lo stesso in tutti i punti di questa superficie, essa è detta *superficie equipotenziale*.

Un punto elettrizzato, obbligato a restare su una tale superficie, non avrà alcuna tendenza a muoversi da una parte o dall'altra di questa superficie, poiché il potenziale è lo stesso in tutti i punti. Una superficie equipotenziale è quindi una superficie di equilibrio o una superficie di livello.

La forza risultante in un punto di questa superficie è diretta lungo la normale alla superficie, e la intensità di questa forza è tale che il lavoro effettuato nel passaggio dell'unità elettrica dalla superficie V alla superficie V' è $V - V'$.

Due superfici equipotenziali a potenziali diversi si possono intersecare, poiché un punto può avere un solo potenziale; ma una superficie equipotenziale si può intersecare se stessa, ed è quanto avviene in tutti i punti e per tutte le linee di equilibrio.

La superficie di un conduttore in equilibrio elettrico è necessariamente una superficie equipotenziale. Se l'elettrizzazione è positiva su tutta questa superficie, il potenziale diminuirà allontanandoci dalla superficie in tutti le direzioni e il conduttore sarà circondato da una serie di superfici a potenziale più basso.

Ma, se, per l'azione di corpi elettrizzati esterni, certe regioni del conduttore sono elettrizzate positivamente, e altre negativamente, la superficie equipotenziale completa si comporrà della superficie del conduttore stesso, allo stesso tempo di un sistema di altre superfici che tagliano la superficie del conduttore lungo le linee che separano le regioni positive da quelle negative. Queste linee saranno linee di equilibrio, di modo che un punto elettrizzato posto su una di queste linee non sarà sottoposta ad alcuna forza in nessuna direzione.

Se la superficie di un conduttore è elettrizzata positivamente in certe parti e negativamente in altre, bisogna che vi siano per forza nel campo qualche altro corpo elettrizzato. Infatti, consideriamo un punto elettrizzato positivamente, che parte da una zona elettrizzata positivamente del conduttore e lasciamolo muovere costantemente nella direzione della forza risultante che agisce su di esso: il potenziale in questo punto diminuirà costantemente, fino a che questo punto o raggiunga una superficie elettrizzata negativamente a un potenziale inferiore a quello del primo conduttore, oppure se ne allontani all'infinito. E, poiché il potenziale all'infinito è zero, quest'ultimo caso si può presentare solo se il potenziale del conduttore è positivo.

Analogamente, un punto elettrizzato negativamente, partendo da una regione elettrizzata negativamente della superficie, deve o raggiungere una superficie elettrizzata positivamente, oppure allontanarsene all'infinito e ciò può avvenire solo se il potenziale è negativo.

Di conseguenza, se le due elettricità positiva e negativa esistono alla superficie del conduttore, bisogna che vi sia nel campo un altro corpo elettrizzato, il cui potenziale sia dello stesso segno di quello del corpo e di valore numerico più elevato; e se un conduttore di forma qualsiasi è solo nel campo, la carica in ciascuno dei suoi punti è dello stesso segno del potenziale del conduttore.

La superficie interna di un contenitore cavo, che non contiene corpi elettrizzati, è interamente priva di carica. Poiché, se una parte di questa superficie avesse una carica positiva, una molecola di elettricità positiva, che si muove nella direzione della forza che agisce su di essa, dovrebbe raggiungere una superficie carica negativamente e a potenziale meno elevato. Ora, tutta la superficie interna ha lo stesso potenziale: essa non può quindi avere carica.

Un conduttore posto all'interno del recipiente e comunicante con esso può essere considerato come limitato dalla superficie interna. Un tale conduttore non può quindi avere carica.

Linee di forza. 47. Le linee descritte da un punto che si muove sempre nella direzione della forza risultante è detta *linea di forza*. Essa taglia ad angolo retto le superfici equipotenziali. Più avanti, si esporranno più completamente le proprietà delle linee di forza, avendo Faraday espresso un gran numero di leggi dell'azione elettrica per mezzo della sua idea di linee di forza tracciate nel campo elettrico e rappresentanti in ognuno dei suoi punti l'intensità e la direzione della forza.

Tensione elettrica. 48. Poiché la superficie del conduttore è una superficie equipotenziale, la forza risultante è normale a questa superficie e, come si vedrà al § 78, essa è proporzionale alla densità superficiale dell'elettrizzazione. di conseguenza, l'elettricità, distribuita su una piccola area presa sulla superficie, sarà soggetta all'azione di una forza tendente ad allontanarla dal conduttore e proporzionale al prodotto della forza risultante e della densità, cioè al quadrato della forza risultante.

Questa forza, che agisce su ogni parte del conduttore come una tensione diretta verso l'esterno, è detta *tensione elettrica*. La si misura, come una tensione meccanica ordinaria, con la forza esercitata sull'unità di superficie.

La parola *tensione* è stata impiegata dagli elettrici in numerosi significati mal definiti; si è cercato di impiegarla nel linguaggio matematico come sinonimo di potenziale; ma, dopo aver esaminato i casi nei quali si è impiegata questa parola, credo che è più conforme all'uso e alle analogie meccaniche intendere per tensione una forza di trazione che si esercita in ragione di tante libbre per pollici quadrati sulla superficie di un conduttore, o in tutt'altro ambito. Vedremo che l'idea avanzata da Faraday, che questa tensione esiste non solo alla superficie del conduttore, ma anche lungo le linee di forza, ci porta a concepire l'azione elettrica come un fenomeno di deformazione di un mezzo.

Forza elettromotrice. 49. Quando due conduttori a potenziali diversi sono collegato con un filo conduttore sottile, la tendenza dell'elettricità a scorrere lungo il filo ha per misura la differenza di potenziale dei due corpi. Per questo motivo, si chiama *forza elettromotrice tra due punti* la differenza di potenziale tra questi punti.

La forza elettromotrice non può sempre essere espressa sotto forma di una differenza di potenziale, ma non trattiamo questi casi particolari nell'elettricità statica. Li esamineremo

quando tratteremo dei circuiti eterogenei, delle azioni chimiche, dei movimenti di magneti, delle differenze di temperatura, ecc.

Capacità di un conduttore. 50. Se un conduttore è isolato, mentre si mantengono tutti i conduttori vicini a potenziale zero mettendoli in comunicazione con la Terra, e se questo conduttore, caricato della quantità E di elettricità, assume il potenziale V , il rapporto tra E e V è detta *capacità del conduttore*. Se il conduttore è interamente chiuso in un recipiente conduttore che non tocca, la sua carica è uguale e opposta a quella della faccia interna del conduttore esterno, e uguale alla sua capacità moltiplicata per la differenza dei potenziali dei due conduttori.

Accumulatori elettrici. Un sistema formato da due conduttori, le cui superfici sono separate da uno strato sottile di un mezzo isolante, è detto *accumulatore elettrico*. Si chiamano *elettrodi* i due conduttori, e *dielettrico* il mezzo isolante. La sua capacità è proporzionale all'area delle superfici di fronte, e inversamente proporzionale allo spessore dello strato che le separa. Una bottiglia di Leyda è un accumulatore nel quale a volte detto *condensatore*; ma preferisco riservare il termine condensatore a uno strumento che serve, non a contenere elettricità, ma ad aumentare la sua densità superficiale.

Proprietà dei corpi relativamente all'elettricità statica

Resistenza al passaggio dell'elettricità attraverso un corpo. 51. Quando una carica di elettricità è comunicata a una parte di una massa di metallo, l'elettricità si distribuisce rapidamente dai punti in cui il potenziale è elevato a quelli dove il potenziale è basso, e questo, fino a che il potenziale sia divenuto lo stesso in tutta la massa. Nel caso di pezzi di metallo che servono nelle esperienze comuni, questa operazione si conclude in un tempo troppo breve perché sia osservabile; ma, nel caso di fili molto lunghi e sottili, come quelli dei telegrafi, il potenziale diviene uniforme solo dopo un tempo valutabile, a causa della resistenza che il filo oppone al passaggio dell'elettricità.

La resistenza al passaggio dell'elettricità è estremamente diversa per le differenti sostanze, come si può vedere nelle tabelle dei §362, 366, 369, che saranno spiegate quando si tratterà delle *correnti elettriche*.

Tutti i metalli sono buoni conduttori; tuttavia la resistenza del piombo è dodici volte quella del rame o dell'argento, quella del ferro sei volte, quella del mercurio sessanta volte quella del rame. La resistenza di tutti i metalli cresce al crescere della temperatura.

Un grande numero di liquidi conducono l'elettricità per elettrolisi. Questo modo di conduzione sarà studiato nella seconda Parte. Per ora, possiamo considerare tutti i liquidi contenenti dell'acqua, e tutti i corpi umidi, come conduttori, assai inferiori ai metalli, ma incapaci tuttavia di mantenere una carica di elettricità isolata per un tempo apprezzabile.

D'altra parte, i gas presi a pressione atmosferica, secchi o umidi, sono, per piccole tensioni elettriche, isolanti così vicini alla perfezione, che non si è potuto osservare nulla finora che indichi che l'elettricità possa attraversarli tramite conduzione. La parte graduale della carica dei corpi elettrizzati può, in tutti i casi, essere attribuita a un isolamento imperfetto da parte dei supporti, sia che l'elettricità attraversi la sostanza del supporto, sia che essa fugga lungo la superficie. Di conseguenza, se due corpi elettrizzati sono sospeso uno vicino all'altro, essi dovranno essi dovranno conservare le loro cariche più a lungo se sono elettrizzati in senso inverso che se fossero dello stesso tipo. Infatti, sebbene la forza elettromotrice che tende a far passare l'elettricità da un corpo ad un altro attraverso l'aria sia ben maggiore quando le cariche sono contrarie, non si ha in questo caso una perdita apprezzabile. La perdita si produce attraverso i supporti, e la forza elettromotrice che spinge l'elettricità attraverso i supporti è più grande, quando le cariche sono della stessa natura; e questo risultato non sembra anomalo se si attribuisce la perdita al passaggio dell'elettricità attraverso l'aria che separa i corpi.

Il passaggio dell'elettricità attraverso il gas si produce comunemente per via della scarica distruttiva e non inizia prima che la forza elettromotrice che può essere sviluppata in un

dielettrico, senza che si produca scarica, è detta *forza elettrica del dielettrico*. La forza elettrica dell'aria diminuisce al diminuire della pressione, dalla pressione atmosferica fino a circa 3 mmHg . Se si continua a diminuire la pressione, la forza elettrica aumenta rapidamente; e se la rarefazione è spinta fino agli estremi limiti che sappiamo oggi raggiungere, la forza elettromotrice necessaria per produrre una scintilla di un quarto di pollice è maggiore di quella che darebbe una scintilla di 8 pollici nell'aria, alla pressione ordinaria.

Così nel vuoto, cioè ciò che rimane in un contenitore dopo aver tolto tutto quanto possiamo, costituisce un isolante di forza elettrica molto grande.

La forza elettrica dell'idrogeno è molto minore di quella nell'aria.

Certi tipi di vetro sono, a freddo, isolanti di una meravigliosa perfezione. sir W. Thomson ha potuto conservare per anni cariche elettriche in ampolle ermeticamente chiuse. Lo stesso vetro diviene conduttore a una temperatura inferiore a quella dell'acqua bollente.

La guttaperca, il caucciù, la vulcanite, la paraffina, le resine sono buoni isolanti: la resistenza della guttaperca a $75^\circ F$ è di circa $6 \cdot 10^{19}$ volte quella del rame.

Il ghiaccio, i cristalli, gli elettroliti solidificati sono pure buoni isolanti.

Certi liquidi, come il petrolio, la terebentina, alcuni oli, sono pure isolanti, ma inferiori alla maggior parte degli isolanti solidi.

Dielettrici

Potere induttore specifico. 52. Faraday ha chiamato dielettrici tutti i corpi il cui potere isolante è tale che, se li si pone tra due conduttori a potenziali diversi, la forza elettromotrice che agisce su di essi non distribuisce immediatamente le loro elettricità, per portare il potenziale allo stesso valore.

Risulta dalle ricerche ancora inedita di Cavendish⁵ che, prima del 1773, aveva misurato la capacità delle piastre di vetro, di resina, di cera e di gomma-lacca, e che aveva determinato in quale rapporto queste capacità sono maggiori di quelle di lamine di aria delle stesse dimensioni.

Faraday, al quale questi lavori erano sconosciuti, ha scoperto che la capacità di un accumulatore dipende dalla natura del mezzo isolante posto tra i due conduttori, così come dalle dimensioni e dalla posizione relativa dei conduttori stessi. Sostituendo all'aria altre sostanze come dielettrici di un accumulatore che non mutava in nessun altro punto, ha trovato che la capacità dell'accumulatore rimane la stessa quando si prende come mezzo isolante l'aria o un altro gas, ma che questa capacità aumenta in un rapporto differente per ogni sostanza, quando si sostituisce all'aria della gomma-lacca, dello zolfo, del vetro, ecc.

Grazie a un metodo di misura più sensibile, Boltzmann è riuscito ad osservare la variazione del potere induttore specifico dei gas a diverse pressioni.

Questa proprietà dei dielettrici, che Faraday chiamò *potere induttore specifico*, è pure indicata sotto il nome di *costante dielettrica della sostanza*. Per definizione, è il rapporto delle capacità di un accumulatore, quando ha per dielettrico la sostanza data o il vuoto.

Se il dielettrico non è un buon isolante, è difficile misurare la sua capacità induttiva specifica, poiché l'accumulatore non conserva la sua carica tanto a lungo da poterla misurare; ma è certo che la capacità induttiva non è una proprietà speciale dei buoni isolanti, è probabile che esista presso tutti i corpi.

Assorbimento dell'elettricità. 53. In accumulatori formati da certi dielettrici, si sono osservati i fenomeni seguenti:

Un accumulatore che, dopo essere stato elettrizzato per un certo tempo, è scaricato bruscamente, poi nuovamente isolato, manifesta una carica dello stesso segno di prima, ma meno energica; di modo che se ne possono ricavare ancora numerosi scariche successive che vanno sempre diminuendo. Questo fenomeno è detto *scarica residua*.

⁵[Queste ricerche sono state pubblicate dopo da Maxwell, sotto il titolo: *The electrical Researches of the honourable Henry Cavendish*.

La scarica istantanea sembra essere sempre proporzionale alla differenza di potenziale tra le armature al momento della scarica e il rapporto tra queste grandezze è la capacità reale dell'accumulatore; ma se si prolunga il contatto dell'eccitatore per lungo tempo per comprendere una parte della scarica residua la capacità apparente dell'accumulare, calcolata dopo la scarica così osservata, sarà troppo grande.

L'accumulatore che è stato caricato, poi isolato, sembra perdere la sua carica per conduzione; ma si trova che questa perdita è in proporzione ben più grande all'inizio che successivamente e che, di conseguenza, una misura della conducibilità dedotta da quanto si produce nei primi momenti sarebbe assai maggiore. Così, quando si fa il collaudo d'isolamento di un cavo sottomarino, l'isolamento sembra migliorare quando si prolunga l'elettrizzazione.

Fenomeni termici, che sembrano analoghi a prima vista, si producono, nel caso della propagazione del calore, attraverso un corpo le cui parti opposte sono mantenute a temperature diverse. Nel caso del calore, sappiamo che questi fenomeni sono dovuti al calore assorbito e ceduto dai corpi stessi. Si è pertanto supposto, nel caso dei fenomeni elettrici, che l'elettricità è assorbita e restituita dalle parti del corpo. Vedremo tuttavia, al §329, che questi fenomeni si possono spiegare senza l'ipotesi dell'assorbimento dell'elettricità, se si suppone che il dielettrico non sia interamente omogeneo.

Questo fenomeno, che si chiama *assorbimento elettrico*, non è un assorbimento effettivo di elettricità da parte del corpo: si lo può evidenziare caricando il corpo in un modo qualunque, mentre è racchiuso in un contenitore metallico chiuso e isolato. Se, quando il corpo è stato caricato e isolato, il contenitore è scaricato in un istante, poi nuovamente isolato, non riceve più alcuna carica mentre si dissipa gradualmente l'elettrizzazione del corpo carico che esso contiene.

54. Questo fatto è espresso dall'enunciato di Faraday: è impossibile comunicare alla materia una carica assoluta e indipendente di un solo tipo di elettricità⁶.

Infatti, da tutte le esperienze che sono state provate, risulta che, quelle che sono le azioni elettriche che si producono in un sistema di corpi circondati da un contenitore metallico, la carica sulla superficie esterna del contenitore non cambia.

Ora, se una quantità di elettricità, qualunque sia, potesse penetrare nel corpo ed essere da lui assorbita, o divenire latente, o esistere in uno stato qualunque, senza essere collegata da linee di induzione a una quantità uguale di elettricità contraria; o se, dopo essere stata assorbita, potesse ritornare alla superficie al suo modo di azione ordinario, troveremmo cambiamenti nell'elettrizzazione del contenitore esterno.

E poiché mai si trova qualcosa di simile, Faraday concluse che è impossibile comunicare alla materia una carica assoluta e che mai nessun cambiamento di stato può, in alcune parti della materia, produrre o nascondere una o l'altra specie di elettricità. Di conseguenza, considerava l'induzione "come la funzione essenziale e per la produzione iniziale dell'elettricità, e per i fenomeni ulteriori". Per lui, , "l'induzione" è uno stato di polarizzazione delle molecole del dielettrico, nel quale ogni molecola è positiva da una parte e negativa dall'altra, essendo le elettrizzazioni positiva e negativa sempre esattamente uguali su ogni molecola.

Scarica distruttiva⁷. 55. Se la forza elettromotrice che agisce in un punto di un dielettrico cresce gradualmente, essa raggiunge infine un limite per il quale si produce attraverso il dielettrico una scarica elettrica brusca, in genere accompagnata da luce e rumore, così come di una rottura temporanea o permanente del dielettrico.

L'intensità della forza elettromotrice per la quale questa scarica si produce è la misura di ciò che possiamo chiamare la *forza elettrica del dielettrico*. Essa dipende dalla natura del dielettrico; è maggiore per l'aria densa che per quella rarefatta, maggiore per il vetro che per l'aria; ma, in tutti i casi, se la forza elettromotrice diviene sufficientemente grande, il dielettrico cede, e il suo potere isolante è distrutto, di modo che esso è attraversato da una corrente di elettricità. È per

⁶*Exp. Res.*, vol. I, serie XI, §II (*On the absolute charge of matter*); e 1244.

⁷Si veda, Faraday, *Exp. Res.*, vol. I, serie XII e XIII.

questo motivo che la distribuzione di elettricità che darebbe in un punto qualunque una forza risultante infinita non possono esistere in natura.

L'effluvio elettrico. Per esempio, se si elettrizza un conduttore che presenta un punto acuminato, la teoria, fondata sull'ipotesi che il conduttore conserva la sua carica, ci porta alla conclusione che, avvicinandosi alla punta, la densità superficiale dell'elettricità va crescendo senza limite e che sulla punta stessa la densità superficiale e, di conseguenza, la forza elettrica risultante divengono infinite. Se l'aria, o ogni altro mezzo che circonda il corpo, aveva un potere isolante assoluto, questo risultato si presenterà effettivamente; ma, in realtà, dal momento che la forza risultante ha raggiunto un certo limite vicino alla punta, il potere isolante dell'aria diviene insufficiente e l'aria diviene conduttrice vicino alla punta. A una certa distanza dalla punta, la forza risultante non è più sufficiente a vincere la resistenza dell'aria: la corrente elettrica è allora bloccata, e l'elettricità si accumula nell'aria attorno alla punta.

Questa punta è quindi circondata da molecole d'aria cariche della stessa specie di elettricità della punta. L'effetto di quest'aria carica circondante la punta è di alleviare l'aria, che è alla punta stessa, di una parte di questa forza elettromotrice enorme alla quale sarebbe sottoposta se il conduttore soltanto fosse elettrizzato. Infatti, la superficie del corpo elettrizzato non è più appuntita: poiché la punta è circondata da una massa arrotondata di aria elettrizzata, la cui superficie, piuttosto che quella del conduttore solido, può essere considerata come formante la superficie esterna del conduttore.

Se questa porzione d'aria elettrizzata poteva essere mantenuta a riposo, il corpo elettrizzato conserverebbe la sua carica, se non su se stesso, almeno nelle sue vicinanze. Ma le molecole di aria elettrizzata, libere di muoversi sotto l'azione della forza elettrica, tendono ad allontanarsi dal corpo elettrizzato, poiché è carico di elettricità della stessa specie. Le molecole d'aria elettrizzata tendono quindi ad allontanarsi lungo la direzione delle linee di forza e ad avvicinarsi ai corpi circostanti che sono carichi di elettricità di segno contrario. Quando esse sono partite, altre molecole d'aria non elettrizzate prendono il loro posto attorno alla punta; e, poiché queste non possono più garantire a quelle che sono poste sulla punta stessa una tensione elettrica eccessiva, si produce una nuova scarica, dopo la quale le molecole che vengono elettrizzate si allontanano; e così di seguito, finché il corpo resta elettrizzato.

In questo modo, si producono i seguenti fenomeni:

Sulla punta e a lato di essa, vi un effluvio permanente dovuta alle scariche continue che si producono tra la punta e l'aria che si trova nelle immediate vicinanze.

Le molecole di aria elettrizzate, che tendono ad allontanarsi nella stessa direzione generale, producono una corrente d'aria partente dalla punta, formata dalle molecole d'aria elettrizzate e, probabilmente, dalle altre ancora trasportate dalle prime. Favorendo, con un mezzo artificiale, questa corrente d'aria, possiamo aumentare l'effluvio; la impediremo di continuare se ostacoliamo la formazione della corrente⁸.

Il *vento* elettrico è qualche volta molto rapido vicino alla punta, ma perde ben presto la sua velocità e l'aria con le sue molecole elettrizzate è trascinata nei moti generali dell'atmosfera, formando una nube elettrica invisibile. Quando le sue molecole cariche arrivano vicino a una superficie conduttrice, un muro per esempio, essi inducono su questa superficie una carica opposta alla loro e sono allora attratte verso il muro; ma, siccome la forza elettromotrice è piccola, essa possono rimanere a lungo senza essere attratte fino alla sua superficie e senza essere scaricate. Esse formano così un'atmosfera elettrica aderente al conduttore, la cui presenza può talvolta essere riconosciuta per mezzo dell'elettrometro. Le forze elettriche che agiscono tra grandi masse d'aria elettrizzata e gli altri corpi sono estremamente deboli in confronto alle forze che producono i venti in ragione della ineguaglianze di densità dovute alle diverse temperature; è quindi poco probabile che una parte apprezzabile dei moti delle comuni nubi temporalesche sia dovuta a cause elettriche.

⁸Si veda Priestley, *Histoire de l'électricité*, p. 117 e 591; e Cavendish, *Electrical researches* (*Phil. Trans.*, 1771, §4); o *Reimpression des Oeuvres de Cavendish*, §125.

Il trasporto di elettricità da un punto a un altro, con il moto delle molecole elettrizzate, è detto la *convenzione elettrica* o la *scarica convettiva*.

L'effluvio elettrico è quindi prodotto da un passaggio continuo di elettricità attraverso una piccola quantità d'aria nella quale la tensione è molto elevata; le molecole d'aria circostanti sono così caricate e trascinate dal vento elettrico, che è un elemento essenziale del fenomeno.

L'effluvio si stabilisce più facilmente nell'aria rarefatta che in quella densa, con una punta positiva che con una negativa. Questa differenza e numerose altre, tra l'elettricità positiva e quella negativa, devono essere studiate da coloro che desiderano scoprire qualcosa rispetto alla natura dell'elettricità. Non le si è ancora ricondotte in modo soddisfacente a nessuna delle teorie esistenti.

Il pennacchio elettrico. 56. Il pennacchio elettrico è un fenomeno che si può produrre elettrizzando una punta a legaccio, o una piccola sfera, in modo da produrre un campo elettrico nel quale la tensione diminuisce allontanandosi dalla superficie, ma meno rapidamente di prima. Esso consiste in una successione di scariche, che si ramificano e divergono dalla sfera all'aria e che finiscono sia caricando certe parti dell'aria, sia raggiungendo un altro conduttore. Esso è accompagnato da un suono, la cui altezza dipende dagli intervalli che separano le scariche successive e non vi è corrente d'aria come nel caso del lampo.

La scintilla elettrica. 57. Se la tensione è notevole, in tutto lo spazio che separa due conduttori, per esempio nel caso di due sfere la cui distanza non è grande rispetto ai loro raggi, la scarica, quando si produce, assume di solito la forma di una scintilla, tramite la quale quasi tutta l'elettrizzazione si scarica di colpo.

In questo caso, se una parte del dielettrico tende a cedere, le parti che sono, da una parte all'altra, nella direzione della forza elettrica, sono messe in uno stato di tensione maggiore e cedono pure e la scarica cammina tutta diritta attraverso il dielettrico; così, se si fa una piccola incisione sul bordo di un foglio di carta e si applica poi una tensione nella direzione del bordo del foglio, questo si lacera e lo strappo, iniziando dall'incisione, si piega lungo i punti deboli della carta. È così che la scintilla elettrica inizia dal primo punto dove la tensione elettrica prevale sulla resistenza del mezzo isolante, poi avanza lungo un cammino irregolare in apparenza, che, infatti, comprende gli altri punti deboli, come i granelli di polvere fluttuanti nell'aria.

Tutti questi fenomeni differiscono notevolmente nei diversi gas e in uno stesso gas a differenti densità. Alcune forme di scarica nei gas rarefatti sono pienamente significative. In certi casi, vi sono alternanze regolari di strisce nere e luminose; così, per esempio, quando dell'elettricità passa lungo un tubo contenente molto poco gas, si vede disposta, lungo l'asse del tubo, a intervalli pressoché uguali, una serie di dischi luminosi separati da strisce oscure. Se si aumenta l'intensità della corrente, si produce un nuovo disco; e questo e i precedenti si dispongono in ordine più serrato. In un tubo descritto da M. Gassiot⁹, la luce di ogni disco è bluastra dalla parte negativa, rossastra dal lato positivo e di un rosso vivo nella parte centrale.

Questi fenomeni e altri ancora relativi alla scarica elettrica, sono estremamente importanti: quando essi saranno meglio compresi, getteranno senza dubbio una viva luce sulla natura dell'elettricità, così come sulla natura dei gas e del mezzo che riempie lo spazio. Ma, per ora, bisogna considerarle come al di fuori del campo della teoria matematica dell'elettricità.

Fenomeni elettrici della tormalina. 58. Certi cristalli di tormalina e di altri minerali possiedono ciò che si chiama la *polarità elettrica*. Supponiamo un cristallo di tormalina a una temperatura uniforme e privo di ogni elettricità alla sua superficie. Innalziamo ora la temperatura, lasciando il cristallo isolato. Troviamo che una parte di cristallo assume una elettricità positiva e l'altra una elettrizzazione negativa. Aumentiamo sulla sua superficie questa elettrizzazione apparente per mezzo di una fiamma o di qualche altro mezzo: se si scalda il cristallo ancora di più, appare una elettrizzazione dello stesso tipo della precedente; se si raffredda, il lato che era positivo quando si scaldava il cristallo diventa negativo.

⁹*Intellectual Observer*, marzo 1806.

Queste elettrizzazioni si osservano alle estremità dell'asse cristallografico. Alcuni cristalli terminano da una parte con una piramide a sei facce e l'altra con una piramide a tre facce. In questi cristalli, è la parte dove la piramide ha sei facce che diviene positiva quando si scalda il cristallo.

Sir W. Thomson suppone che ogni parte di questo cristallo e di ogni altro cristallo emiedrico ha una polarità elettrica definita, la cui intensità dipende dalla temperatura. Quando si passa la superficie in una fiamma, ognuna delle sue parti si elettrizza molto per neutralizzare in tutti i punti esterni gli effetti della polarità interna. Allora il cristallo non ha azione elettrica esterna, né una tendenza a cambiare lo stato della sua elettrizzazione. Ma, se lo si scalda o lo si raffredda, la polarità interna di ogni molecola del cristallo è alterata e non può più essere equilibrata dall'elettrizzazione superficiale: vi è quindi un'azione esterna risultante.

Piano di questa Opera

59. In quest'Opera, mi propongo di esporre la teoria delle azioni elettriche, teoria che le considera come dipendenti solo dai corpi elettrizzati e dalle posizioni rispettive di questi corpi e che non considera i fenomeni che possono prodursi nei mezzi circostanti. Stabiliremo così la legge dell'inverso del quadrato della distanza, la teoria del potenziale e le equazioni di Laplace e Poisson, Considereremo poi le cariche e i potenziali di un sistema di corpi elettrizzati; e, dalle equazioni che li collegano, equazioni nelle quali si può sempre supporre che i coefficienti siano stati determinati dall'esperienza nei casi in cui i metodi matematici attuali non sono applicabili, dedurremo le forze meccaniche che agiscono tra i diversi corpi elettrizzati.

Studieremo poi certi teoremi generali, per mezzo dei quali Green, Gauss e Thomson hanno mostrato come si possono risolvere i problemi della distribuzione elettrica. Uno dei risultati di questi teoremi è che, se l'equazione di Poisson è soddisfatta da un certa funzione che, alla superficie di ciascun conduttore, ha per valore quello del potenziale di questo conduttore, questa funzione rappresenta in tutti i punti il potenziale del sistema. Ne dedurremo così un metodo per risolvere i problemi che richiedono una soluzione esatta.

Nel teorema di Thomson, l'energia totale di un sistema si esprime con l'integrale di una certa quantità presa in tutto lo spazio compreso tra i corpi elettrizzati, o da un altro integrale che si estende solo alle superfici elettrizzate, sia come effetto dello stato nel quale si trova il mezzo che separa i corpi, sia come risultato di una azione diretta che si esercita a distanza tra i corpi. Se adottiamo quest'ultima idea, possiamo determinare la legge dell'azione, ma non possiamo spingere oltre le nostre speculazioni sulla causa di tale azione. Se, al contrario, accettiamo l'idea di un'azione che si esercita attraverso un mezzo, siamo portati a ricercare la natura di questa azione in ogni punto del mezzo.

Risalta da questo teorema che, se vogliamo vedere la sede dell'azione elettrica nelle diverse parti del mezzo dielettrico, l'energia di una piccola parte di questo mezzo deve dipendere dal prodotto del quadrato dell'intensità della forza elettromotrice risultante in questo punto moltiplicata per un coefficiente che si chiama *potere induttore specifico del mezzo*.

Tuttavia, considerando la teoria dei dielettrici dal punto di vista più generale, vale meglio fare una distinzione tra l'intensità elettromotrice in un punto e la polarizzazione elettrica del mezzo in questo punto: infatti, in certe sostanze solide, queste due grandezze direzionali, sebbene legate tra loro, non hanno la stessa direzione. L'espressione più generale dell'energia elettrica per l'unità di volume del mezzo è il semi prodotto dell'intensità elettromotrice e della polarizzazione elettrica per il coseno dell'angolo compreso tra le loro direzioni.

Se calcoliamo, in questa ipotesi, l'energia totale del mezzo, la troviamo uguale all'energia che sarebbe dovuta all'elettrizzazione dei conduttori nell'ipotesi di un'azione diretta a distanza. Pertanto, dal punto di vista matematico, le due ipotesi sono equivalenti.

Se esaminiamo allora lo stato meccanico del mezzo, nell'ipotesi che l'azione meccanica osservata tra i corpi elettrizzati si eserciti attraverso e per l'intervento del mezzo; come negli esempi familiari dove un corpo agisce su un altro tramite una corda tesa, o di un'asta appiattita, troviamo che il mezzo deve essere in uno stato di deformazione meccanica.

Così come l'ha indicato Faraday¹⁰, questa deformazione consiste in una estensione diretta lungo le linee di forza, combinata a una compressione uguale lungo tutte le direzioni perpendicolari a queste linee. La grandezza di queste deformazioni è proporzionale all'energia dell'elettrizzazione per unità di volume, o, in altri termini, al quadrato della forza elettromotrice risultante moltiplicata per la capacità induttiva specifica del mezzo.

Questa distribuzione di pressione e di tensione è la sola che è in accordo con le azioni meccaniche osservate tra i corpi elettrizzati, e con l'equilibrio che si osserva pure nel fluido dielettrico che circonda i corpi elettrizzati. Ho quindi pensato che le regole della ricerca scientifica mi autorizzino a compiere questo passo, ad ammettere l'esistenza effettiva di questo stato di deformazione e a seguire questa ipotesi nelle sue conseguenze. Trovando che il termine di *tensione elettrica* è stato impiegato con parecchi significati mal definiti, ho provato a riservarlo esclusivamente per questa concezione che io credo essere stata nell'idea di parecchi di coloro che hanno utilizzato questo termine, per questo stato di deformazione del mezzo dielettrico che produce il movimento dei corpi elettrizzati e che, costantemente accresciuto, conduce alla scarica distruttiva. In questo senso, la tensione elettrica è una tensione di natura assolutamente simile alla tensione di una corda e si può misurare allo stesso modo; e, potendo il mezzo dielettrico supportare una certa tensione, ma non una più considerevole, si può dire che vi è una certa forza, esattamente nello stesso senso in cui si dice che una corda ha una certa forza. Così, per esempio, Thomson ha trovato che alla temperatura e alla pressione ordinaria l'aria può sostenere una pressione elettrica di 9600 grani per piede quadrato prima di lasciar passare una scintilla¹¹.

60. Dall'ipotesi che l'azione elettrica non è un'azione diretta che si esercita a distanza tra i corpi, ma che si esercita attraverso un mezzo che si trova tra i corpi, abbiamo dedotto che questo mezzo doveva essere in uno stato di deformazione. Abbiamo pure determinato la natura di tale deformazione, e l'abbiamo confrontata a quelle che si possono presentare nei corpi solidi. Lungo le linee di forza, vi è una tensione; perpendicolarmente a queste linee, vi è una pressione; i valori numerici di queste due forze sono uguali e ognuna di esse è proporzionale al quadrato della forza risultante nel punto considerato. Dopo aver stabilito questi risultati, siamo preparati a fare un nuovo passo, e a farci un'idea della natura della polarizzazione elettrica nel mezzo dielettrico.

Si può dire che un elemento di un corpo è polarizzato, quando acquista delle proprietà uguali e contrarie su due facce opposte. La nozione di polarità interna può essere studiata con grande beneficio nell'esempio che forniranno i magneti permanenti; noi la spiegheremo più a lungo quando tratteremo del Magnetismo.

La polarizzazione elettrica del dielettrico è uno stato di deformazione nel quale i corpi sono gettati dall'azione della forza elettromotrice, e che scompare contemporaneamente a questa forza. Possiamo immaginare che consiste in ciò che si può chiamare uno *spostamento* elettrico prodotto dall'intensità elettromotrice. Quando una forza elettromotrice agisce su un mezzo conduttore, essa vi produce una corrente; ma se il mezzo è un non conduttore o dielettrico, la corrente non si può stabilire attraverso il mezzo: l'elettricità tuttavia è spostata nel mezzo, nella direzione della forza elettromotrice e l'estensione di questo spostamento dipende dalla intensità della forza elettromotrice; di modo che, se la forza elettromotrice aumenta o diminuisce, lo spostamento elettrico aumenta o diminuisce nello stesso rapporto.

La grandezza dello spostamento ha per misura la quantità di elettricità che attraversa l'unità di superficie, mentre lo spostamento cresce da zero al suo valore massimo. Tale è, di conseguenza, la misura della polarizzazione elettrica.

L'analogia tra l'azione di una forza elettromotrice che produce uno spostamento elettrico e quella di una forza meccanica ordinaria che sposta un corpo elastico è così evidente, che mi sono spinto a chiamare *coefficiente di elasticità elettrica del mezzo* il rapporto tra la forza

¹⁰*Exp. Res.*, serie XI, 1297.

¹¹[Il grano valendo 0,06479895 g e il piede 30,479449 cm, la tensione di 9600 grani per piede quadrato corrisponde a 0,669615 g o 657 dyne per cm².]

elettromotrice e lo spostamento elettrico corrispondente. Questo coefficiente è differente per i diversi mezzi e varia in ragione inversa del potere induttore specifico di ogni mezzo.

Le variazioni di spostamento elettrico producono evidentemente correnti elettriche. Ma queste correnti non possono esistere che mentre lo spostamento varia e, di conseguenza, lo spostamento non potendo superare un certo valore senza produrre una scarica distruttiva, non possono continuare indefinitamente nella stessa direzione come fanno le correnti nei conduttori.

È probabile che esista nella tormalina e negli altri cristalli piroelettrici uno stato di polarizzazione elettrica, che dipende dalla temperatura e che non richiede per prodursi una forza elettromotrice esterna. Se l'interno del corpo è in uno stato di polarizzazione elettrica permanente, l'esterno dovrà poco a poco cambiarsi in modo da neutralizzare in tutti i punti esterni al corpo l'azione dell'elettrizzazione interna. Questa carica esterna superficiale non potrà essere rivelata da alcuna prova ordinaria, né essere eliminata da alcuno dei metodi che servono abitualmente a togliere una carica superficiale. La polarizzazione interna del corpo non potrà quindi essere scoperta che da un mezzo, un cambiamento di temperatura per esempio, che permetta di aumentare o diminuire la polarizzazione interna. Allora l'elettrizzazione superficiale non basterà a neutralizzare al di fuori l'azione della polarizzazione interna, e si osserverà una elettrizzazione apparente, come nel caso della tormalina.

Se una carica e è uniformemente distribuita sulla superficie di una sfera, la forza risultante in un punto qualunque del mezzo che circonda la sfera è numericamente uguale alla carica e divisa per il quadrato della distanza tra il punto e il centro della sfera. Secondo la nostra teoria, questa forza risultante produce uno spostamento di elettricità in una direzione che allontana dalla sfera.

Tacciamo ora una superficie sferica concentrica di raggio r ; lo spostamento totale E attraverso questa superficie sarà proporzionale alla forza risultante moltiplicata per l'area della superficie sferica. Ma la forza risultante è proporzionale alla carica e , e inversamente proporzionale al quadrato del raggio, mentre l'area è proporzionale al quadrato del raggio.

Pertanto lo spostamento totale E è proporzionale alla carica e , e indipendente dal raggio.

Per determinare il rapporto tra la carica e e la quantità di elettricità E spostata attraverso la superficie sferica verso l'esterno di una superficie sferica, consideriamo il lavoro effettuato nel mezzo, nella regione compresa tra due superfici sferiche concentriche, mentre lo spostamento aumenta da E a $E + \delta E$. Se V_1 e V_2 indicano rispettivamente i potenziali della superficie interna e di quella esterna, la forza elettromotrice che produce lo spostamento addizionale è $(V_1 - V_2)$, di modo che il lavoro speso per aumentare lo spostamento è $(V_1 - V_2) \delta E$.

Se ora facciamo coincidere la superficie della sfera interna con quella della sfera elettrizzata, e se poniamo il raggio dell'altra infinito, V_1 diviene V , il potenziale della sfera, e V_2 diviene nullo: il lavoro totale effettuato nel mezzo è quindi $V \delta E$.

Ma, secondo la teoria ordinaria, il lavoro effettuato per aumentare la carica $V \delta E$; e se, come supponiamo, è speso per aumentare lo spostamento, $\delta E = \delta e$ e, poiché E ed e si annullano insieme, $E = e$, cioè

Lo spostamento verso l'esterno attraverso una superficie sferica qualsiasi concentrica alla sfera elettrizzata è uguale alla carica di questa sfera.

Per fissare le nostre idee sullo spostamento elettrico, consideriamo un accumulatore formata da due piastre conduttrici A e B , separate da uno strato di dielettrico C . Sia W un filo conduttore congiungente A con B , e supponiamo che, per l'azione di una forza elettromotrice, una quantità Q di elettricità positiva sia trasportata da B verso A . L'elettrizzazione positiva di A e quella negativa di B producono una certa forza elettromotrice agente da A verso B nello strato dielettrico, e questa forza elettromotrice produce uno spostamento elettrico di A verso B nel dielettrico. La grandezza di questo spostamento, misurata dalla quantità di elettricità spinta attraverso una sezione ideale che dividerebbe il dielettrico in due strati, sarà, secondo la nostra teoria, esattamente uguale a Q . (Si vedano §75, 76, 111).

Si vede quindi che, nello stesso tempo che una quantità di elettricità Q è trasportata dalla forza elettromotrice lungo il filo da B ad A , attraversando tutte le sezioni del dielettrico da A a B , grazie allo spostamento elettrico.

I movimenti di elettricità inversa si produrranno durante la scarica dell'accumulatore. Nel filo, la scarica è Q da A verso B ; nel dielettrico, lo spostamento di ferma è una quantità Q attraversa tutte le sezioni da B verso A .

Tutti i casi di elettrizzazione e di scarica possono quindi essere considerato come movimenti che avvengono in un circuito chiuso tale, che nello stesso istante, passa in ogni sezione la stessa quantità di elettricità; è così, non solo nel circuito voltaico, per il quale la cosa era sempre stata riconosciuta, ma anche nei casi in cui si supponeva in genere che l'elettricità si accumulasse in certi punti.

61. Siamo così condotti a una conseguenza molto significativa della teoria che esaminiamo; cioè che i movimenti dell'elettricità sono simili a quelli di un fluido incomprimibile, in modo che la quantità totale contenuta all'interno di una superficie chiusa fittizia determinata resta sempre la stessa. Questo risultato sembra, a prima vista, in contraddizione diretta con il fatto che si può caricare un conduttore, poi introdurlo in uno spazio chiuso e cambiare così la quantità di elettricità contenuta in tale spazio. Ma ci dobbiamo ricordare che la teoria ordinaria non tiene conto dello spostamento elettrico attraverso le sostanze dielettriche, e che essa limita la propria attenzione all'elettrizzazione delle superfici che separano i conduttori e i dielettrici. Nel caso di un conduttore carico, supponiamo la carica positiva; allora, se il dielettrico circostante si estende da tutte le parti attorno alla superficie chiusa, vi sarà polarizzazione elettrica e spostamento dall'interno verso l'esterno su tutta l'estensione della superficie chiusa; e l'integrale dello spostamento, preso su tutta la superficie, è uguale alla carica del conduttore chiuso nella superficie.

Così, quando il conduttore carico è introdotto nello spazio chiuso, vi è anzitutto uno spostamento dall'interno verso l'esterno attraverso la superficie, di una quantità di elettricità uguale alla carica, di modo che la quantità totale di elettricità contenuta nella superficie rimane la stessa.

La teoria della polarizzazione elettrica sarà discussa più a lungo nel Cap. V, e le si darà al §336 una rappresentazione meccanica; ma la sua importanza potrà essere ben compresa solo dopo lo studio dei fenomeni elettromagnetici.

62. I tratti particolari della teoria che svilupperemo sono i seguenti:

L'energia dell'elettrizzazione risiede nel mezzo dielettrico, che sia solido, liquido o gassoso, denso o rarefatto o anche interamente privo di materia ponderabile, purché sia sempre in grado di trasmettere l'azione elettrica.

L'energia è immagazzinata in ogni punto del mezzo sotto la forma di uno stato di deformazione detta *polarizzazione elettrica*, la cui grandezza dipende dalla forza elettromotrice risultante in questo punto.

La forza elettromotrice agente su un dielettrico produce ciò che abbiamo chiamato *spostamento elettrico*; la relazione tra la forza e lo spostamento, nel caso più generale, sarà studiata più avanti trattando della conduzione; ma, nei casi più importanti, lo spostamento è nella stessa direzione della forza, e, numericamente, è uguale all'intensità moltiplicato per $\frac{1}{4\pi}K$, dove K è il potere induttore specifico del dielettrico.

L'energia dovuta alla polarizzazione elettrica è uguale, per l'unità di volume del dielettrico, alla metà del prodotto dell'intensità elettromotrice per lo spostamento elettrico, e se c 'è, per il coseno dell'angolo tra le loro direzioni.

Nei dielettrici fluidi, la polarizzazione elettrica è accompagnata da una tensione lungo la direzione delle linee di induzione, e da una pressione uguale lungo tutte le direzioni perpendicolari alle linee di induzione, essendo la grandezza di questa tensione o pressione riferita all'unità di superficie numericamente uguale all'energia per unità di volume, nello stesso punto.

Se supponiamo il volume del dielettrico diviso in parti elementari, dobbiamo pensare le superfici di questi elementi come elettrizzate, in modo tale che la densità superficiale in un punto qualsiasi della superficie sia uguale in grandezza allo spostamento che si produce in questo punto attraverso la superficie, *questo spostamento contato verso l'interno*; cioè, se lo spostamento avviene nella direzione positiva, la superficie dell'elemento deve essere elettrizzata negativamente dal lato positivo, e positivamente dal lato negativo. Queste cariche superficiali si annullano in genere l'un l'altra quando si considerano elementi consecutivi, salvo nei punto dove il dielettrico ha una carica interna, o sulla superficie del dielettrico.

Qualunque sia la natura dell'elettricità, e cosa intendiamo per movimento di elettricità, il fenomeno che abbiamo chiamato *spostamento elettrico* è un movimento di elettricità, nello stesso verso in cui il trasporto di una quantità determinata di elettricità attraverso un filo è un movimento di elettricità. La sola differenza consiste nel fatto che nel dielettrico vi è una forza, che abbiamo chiamato *elasticità elettrica*, che si oppone allo spostamento elettrico e che riporta l'elettricità indietro prima che la forza elettromotrice sia soppressa; al contrario, in un filo conduttore, l'elasticità elettrica è costantemente superata, di modo che si stabilisce una corrente di conduzione propriamente detta e che la resistenza dipende, non dalla quantità totale di elettricità spostata dalla sua posizione di equilibrio, ma dalla quantità che attraversa una sezione del conduttore in un tempo dato.

In tutti i casi, il movimento dell'elettricità è soggetto alla stessa condizione di quello di un fluido incomprimibile, cioè che in ogni istante deve entrare in uno spazio chiuso qualsiasi tanta elettricità quanta ne esce.

Risulta da ciò che ogni corrente elettrica deve formare un circuito chiuso. Si vedrà l'importanza di questo risultato quando studieremo le leggi dell'elettromagnetismo.

Poiché, come abbiamo visto, la teoria dell'azione diretta a distanza è, dal punto di vista matematico, identica alla teoria di una azione che si esercita attraverso un mezzo, i fenomeni che si incontrano si possono spiegare con una teoria così come con l'altra, a condizione di introdurre ipotesi opportune, quando si incontrano difficoltà. Così, Mossotti ha dedotto la teoria matematica dei dielettrici dalla teoria ordinaria dell'attrazione, semplicemente dando un'interpretazione elettrica invece di una magnetica, ai simboli di cui Poisson si è servito per dedurre la teoria dell'induzione magnetica dalla teoria dei fluidi magnetici. Egli ammette che esistono nel dielettrico piccoli elementi conduttori, in grado di avere le loro estremità elettrizzate in senso inverso per induzione, ma incapaci di guadagnare o perdere una quantità qualsiasi di elettricità, poiché essi sono isolati tra loro da un mezzo non conduttore. Questa teoria dei dielettrici concorda con le leggi dell'elettricità; essa può essere effettivamente vera. Se è vera, il potere induttore specifico del mezzo può essere più grande, ma mai più piccolo di quello dell'aria o del vuoto. Finora, non si è trovato un esempio di dielettrico avente un potere induttore più piccolo di quello dell'aria; se se ne trovasse uno, bisognerà abbandonare la teoria di Mossotti, ma le sue formule resteranno tutte esatte e noi dovremo cambiare solo il segno di un coefficiente.

Nella teoria che mi propongo di sviluppare, i metodi matematici sono fondati sul minor numero possibile di ipotesi; si trova così che equazioni della stessa forma si applicano a fenomeni che sono certamente di natura ben diversa: per esempio, l'induzione elettrica attraverso i dielettrici, la conduzione nei conduttori e l'induzione magnetica. In tutti questi casi, la relazione tra la forza e l'effetto che essa produce si esprime con una serie di equazioni dello stesso tipo; di modo che se un problema è risolto per uno di questi fenomeni, il problema e la soluzione possono essere tradotti nel linguaggio di altri, e i risultati, nella loro nuova forma, saranno ancora veri.

Teoria matematica elementare dell'elettricità statica

Definizione dell'elettricità considerata come grandezza matematica. 63. Abbiamo visto che le proprietà dei corpi elettrizzati sono tali che la carica di un corpo può essere uguale a quella di un altro, o alla somma delle cariche di due altri corpi; che, quando si pongono nello stesso tempo all'interno di un recipiente conduttore chiuso e isolato due corpi elettrizzati ugualmente e di segno contrario, questi non producono effetti elettrici sui corpi esterni. Tutti questi risultati si possono esprimere insieme in forma concisa, dicendo che un corpo elettrizzato è caricato da *una certa quantità di elettricità* che si può indicare con e . Se la carica è positiva, cioè vetrosa, secondo la convenzione abituale, e sarà una quantità positiva. Se la carica è negativa o resinosa, e sarà una quantità negativa, e la quantità $-e$ si può interpretare sia come una quantità negativa di elettricità vetrosa, sia come una quantità positiva di elettricità resinosa.

La somma di due cariche elettriche uguali e contrarie, $+e$ e $-e$, produce uno stato di non elettrizzazione rappresentata dallo zero. Possiamo quindi considerare un corpo non elettrizzato come virtualmente carica di cariche uguali e opposte, di grandezza indefinita; e un corpo elettrizzato, come virtualmente carico di quantità diverse di elettricità positiva e negativa, costituendo la loro somma algebrica l'elettrizzazione osservata. Ma è chiaro che questo modo di considerare un corpo elettrizzato è del tutto artificiale, e che esso si può paragonare al modo in cui consideriamo la velocità di un corpo come risultante da due o più velocità diverse, nessuna delle quali è quella del corpo.

Densità elettrica

Distribuzione nello spazio. 64. Definizione. - La densità elettrica riferita al volume, o densità volumetrica, in un punto dato dello spazio, è il limite rapporto tra la quantità di elettricità contenuta all'interno di una sfera avente il punto come centro e il volume di questa sfera, quando il raggio della sfera decresce indefinitamente.

Indicheremo questo rapporto con il simbolo ρ , che può essere positivo o negativo.

Distribuzione su una superficie. Deriva dalla teoria così come dall'esperienza che, in certi casi, la carica di un corpo è interamente sulla sua superficie. La densità in un punto della superficie, definita con il metodo precedente, sarà infinita. Dobbiamo quindi impiegare un altro procedimento per misurare la densità riferita alla superficie.

Definizione. - La densità elettrica in un punto dato di una superficie, una densità superficiale, è il limite del rapporto tra la quantità di elettricità contenuta in una sfera, avente questo punto per centro, e l'area della superficie compresa all'interno della sfera, quando il raggio decresce indefinitamente.

Indicheremo con il simbolo σ la densità riferita alla superficie.

Gli autori che hanno considerato l'elettricità come un fluido materiale, o come un insieme di molecole, sono stati obbligati, in questo caso, a supporre che l'elettricità si distribuisce sulla superficie sotto forma di strato di un certo spessore θ e di densità ρ_0 , essendo ρ_0 il valore che assumerebbe ρ , se le molecole avessero tra loro il contatto più stretto possibile. È chiaro che in questa teoria

$$\rho_0\theta = \sigma$$

In questa teoria, quando σ è negativo, un certo strato di spessore θ è lasciato interamente privo di elettricità positiva, e interamente riempito di elettricità negativa, o, nell'ipotesi di un solo fluido, di materia ordinaria.

Ma l'esperienza non indica, né che lo strato elettrico abbia un qualunque spessore, né che l'elettricità sia un fluido o un insieme di molecole. Preferiamo quindi non introdurre simboli per lo spessore dello strato, e impiegare un simbolo speciale per la densità riferita alla superficie.

Distribuzione su una linea. Qualche volta è vantaggioso supporre che l'elettricità distribuita su una linea, cioè su un corpo lungo e sottile, del quale si trascura lo spessore. Si può allora definire la densità riferita alla lunghezza, o densità lineare in un punto, come il limite del rapporto tra la carica distribuita su un elemento della linea e la lunghezza di tale elemento, quando esso decresce indefinitamente.

Se λ rappresenta la densità lineare, la quantità totale di elettricità distribuita sulla curva sarà

$$e = \int_0^s \lambda ds$$

dove ds è l'elemento della curva.

Analogamente, se σ è la densità superficiale, la quantità totale di elettricità distribuita sulla superficie sarà

$$e = \iint \sigma dS$$

dove dS è l'elemento di superficie.

E se ρ è la densità di volume in un punto dello spazio, la quantità totale di elettricità compresa in un certo volume è

$$e = \iiint \rho dx dy dz$$

dove $dx dy dz$ è l'elemento di volume. In questi tre casi, i limiti di integrazione sono quelli della linea, della superficie, del volume considerati.

È chiaro che e, λ, σ, ρ sono quantità di tipo differente, avente ognuna di essere una dimensione lineare minore della precedente; di modo che, se l è una linea, le quantità $e, l\lambda, l^2\sigma$ e $l^3\rho$ sono tutte della stessa natura; e se $[L]$ è l'unità di lunghezza e $[\lambda], [\sigma], [\rho]$ le unità di diversi tipi di densità, $[e], [L\lambda], [L^2\sigma], [L^3\rho]$ rappresenteranno tutte una unità di elettricità.

Definizione dell'unità di elettricità. 65. Siano A e B due punti la cui distanza è uguale all'unità di lunghezza. Siano due corpi, di dimensione piccola rispetto alla distanza AB , carichi di quantità uguali di elettricità positiva e posti rispettivamente in A e in B e supponiamo che le loro cariche siano tali che la forza con la quale si respingono sia l'unità di forza misurata come al §6. Si dice allora che la carica di ciascuno dei corpi è una unità di elettricità.

Se la carica del corpo posto in B fosse una unità di elettricità negativa, l'azione che si esercita tra i corpi cambierebbe di verso, e avremmo un'attrazione uguale all'unità di forza. Se la carica A fosse negativa, e uguale all'unità, la forza sarebbe repulsiva e uguale all'unità.

Poiché l'azione che si esercita tra due quantità di elettricità non è modificata dalla presenza di altre quantità, la repulsione tra e unità di elettricità poste in A ed e' poste in AB sarà ee' , essendo la distanza AB l'unità (si veda §39).

Legge della forza agente tra i corpi elettrizzati. 66. Coulomb ha mostrato sperimentalmente che la forza che agisce tra corpi le cui dimensioni sono piccole rispetto alla loro separazione varia in ragione inversa del quadrato della distanza. La repulsione tra due simili corpi carichi di quantità e ed e' e posti alla distanza r è quindi

$$\frac{ee'}{r^2}$$

Mostriamo al § 74 che questa legge è la sola che sia compatibile con l'osservazione che un corpo conduttore, posto all'interno di un conduttore cavo e messo a contatto con esso, perda tutta la carica elettrica. E, se siamo convinti che la legge dell'inverso del quadrato delle distanze

è esatta, è su esperienze di questo tipo piuttosto che sulle misure dirette di Coulomb che si basa il nostro convincimento.

Forza risultante tra due corpi. 67. Per calcolare le forza risultante che agisce tra due corpi, possiamo dividere ciascuno di essi in elementi di volume e considerare la repulsione che agisce tra l'elettricità di ognuno degli elementi del primo corpo e l'elettricità di ognuno degli elementi del secondo. Avremo così un sistema di forza, il cui numero è uguale al prodotto dei numeri degli elementi nei quali abbiamo diviso ciascuno dei due corpi, e dovremo comporre gli effetti di queste forze secondo le regole ordinarie della Statica. Così, per trovare la componente nella direzione delle x , dovremo trovare il valore dell'integrale sestuplo

$$\int \int \int \int \int \int \frac{\rho \rho' (x - x') dx dy dz dx' dy' dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

dove x, y, z sono le coordinate di un punto del primo corpo dove la densità è ρ e x', y', z' le quantità corrispondenti per il secondo corpo e dove l'integrazione deve essere estesa dapprima a uno dei corpi e poi all'altro.

Intensità risultante in un punto. 68. Per semplificare le operazioni matematiche, conviene considerare l'azione di un corpo elettrizzato, non su un altro corpo di forma qualunque, ma su un corpo infinitamente piccolo, carico di una quantità infinitamente piccola di elettricità, e posto in uno qualunque dei punti dello spazio ai quali si estende l'azione elettrica. Prendendo la carica di questo corpo infinitamente piccola, rendiamo insignificante la sua azione perturbatrice sulla carica del primo corpo.

Sia e la carica del piccolo corpo e sia Re la forza che agisce su di esso quando è posto nel punto (x, y, z) ; siano l, m, n i coseni direttori della forza; si può allora indicare con R l'intensità elettrica risultante al punto (x, y, z) .

Indichiamo con X, Y, Z le componenti di R : allora

$$X = Rl \quad Y = Rm \quad Z = Rn$$

Quando parliamo dell'intensità elettrica risultante in un punto, intendiamo dire con ciò che in questo punto non si esercita realmente alcuna forza; diciamo solo che, se un corpo avente una carica e di elettricità fosse posto in questo punto, sarebbe sottoposto all'azione di una forza Re ¹.

Definizione. - L'intensità elettrica risultante in un punto è la forza che agirebbe su un piccolo corpo caricato con l'unità di elettricità positiva, se fosse posto in questo punto senza alterare la distribuzione effettiva dell'elettricità.

Questa forza tende, non solo a muovere un oggetto carico di elettricità, ma anche a spostare l'elettricità in questo corpo in modo che l'elettricità positiva tende a muoversi nella direzione di R e l'elettricità negativa nella direzione opposta. Per questo si chiama la quantità R intensità elettromotrice nel punto (x, y, z) .

Quando vorremo esprimere questo fatto, che l'intensità risultante è un vettore, la indicheremo con la lettera in grassetto \mathfrak{E} . Secondo la teoria adottata in quest'Opera, se il corpo è un dielettrico, l'elettricità è spostata e la quantità di elettricità che è cacciata nella direzione di \mathfrak{E} attraverso l'unità di superficie contata normalmente a \mathfrak{E} è

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K \mathfrak{E}$$

dove \mathfrak{D} è lo spostamento, \mathfrak{E} l'intensità risultante e K il potere induttore specifico del dielettrico.

Se il corpo è conduttore, lo stato di deformazione non si può mantenere un istante e una corrente di conduzione si stabilisce e si mantiene così a lungo che \mathfrak{E} continua ad agire sul mezzo.

¹Le intensità elettriche e magnetiche corrispondono, nell'elettricità e nel magnetismo, all'intensità del peso, comunemente indicato con g , nella teoria dei corpi pesanti.

Integrale dell'intensità elettrica, o forza elettromotrice lungo un arco di curva.

69. La forza elettromotrice lungo un arco di curva assegnato AP ha per misura numerica il lavoro della forza elettrica mentre l'unità di elettricità positiva si sposta iniziando da A fino a P .

Se s è la lunghezza dell'arco misurata a partire da A e se l'intensità risultante R in ogni punto della curva forma un angolo ϵ con la tangente tracciata in questo punto nella direzione positiva, il lavoro effettuato per spostare l'unità di elettricità lungo un elemento ds della curva sarà

$$R \cos \epsilon ds$$

e la forza elettromotrice totale E sarà

$$E = \int_0^s R \cos \epsilon ds$$

estendendosi l'integrazione da un capo all'altro dell'arco.

Se ci serviamo di componenti dell'intensità, l'espressione diviene

$$E = \int_0^s \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds$$

Se X, Y, Z sono tali che $Xdx + Ydy + Zdz$ sia il differenziale totale di una funzione $-V$ di x, y, z si avrà

$$E = \int_A^P (Xdx + Ydy + Zdz) = - \int_A^P dV = V_A - V_P$$

essendo effettuata l'integrazione in un modo qualunque dal punto A al punto P , lungo la curva data o lungo tutt'altra linea che va da A a P .

In questo caso, V è una funzione scalare della posizione di un punto dello spazio, cioè che, se si conoscono le coordinate del punto, il valore di V è determinato e indipendente dalla posizione e dalla direzione degli assi (si veda § 16).

Funzione della posizione di un punto. Quando, in quanto segue, definiremo una quantità come funzione della posizione di un punto, intenderemo con questo che, per ogni posizione del punto, la funzione ha un valore determinato. Ciò non vuole dire che questo valore possa sempre essere espresso dalla stessa formula per tutti i punti dello spazio; poiché essa può pure essere espressa da una formula di un lato della superficie data e da un'altra formula per l'altro lato.

Funzioni potenziali. 70. La quantità $Xdx + Ydy + Zdz$ è un differenziale esatto, tutte le volte che la forza è dovuta ad attrazioni o a repulsioni la cui intensità è una funzione delle distanze da un numero qualsiasi di punti.

Sia infatti r_1 la distanza di uno dei punti al punto (x, y, z) , e sia R_1 la repulsione: allora

$$X_1 = R_1 \frac{x - x_1}{r_1} = R_1 \frac{dr_1}{dx}$$

Si hanno per Y_1 e Z_1 espressioni analoghe, di modo che

$$X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz = R_1 dr_1$$

e poiché R_1 è una funzione di r_1 soltanto, $R_1 dr_1$ è il differenziale esatto di una certa funzione di r_1 , cioè $-V_1$.

Analogamente, per un'altra forza R_2 agente a partire da un centro posto alla distanza r_2 ,

$$X_2 dx + Y_2 dy + Z_2 dz = R_2 dr_2 = -dV_2$$

ma $X = X_1 + X_2 + \dots$ e Y e Z sono composti allo stesso modo; di conseguenza,

$$Xdx + Ydy + Zdz = -(dV_1 + dV_2 + \dots) = -dV$$

L'integrale di questa quantità, che soddisfa alla condizione di annullarsi a una distanza infinita, è detta la *funzione potenziale*.

L'uso di questa funzione nella teoria delle attrazioni è stata introdotta da Laplace, per calcolare l'attrazione della Terra. Green, nella sua "Application de l'Analyse mathématique à la théorie del l'électricité", le ha dato il nome di *funzione potenziale*. Gauss, nei suoi lavori indipendenti da quelli di Green, ha pure impiegato il termine *potenziale*. Clausius e altri hanno applicato questo termine di potenziale al lavoro che sarebbe effettuato, se si spostassero tra loro due corpi o un sistema di corpi a una distanza infinita. Impiegheremo questo termine nel senso delle Opere inglesi recenti, e, per evitare ogni ambiguità, adotteremo la definizione seguente dovuta a Sir W. Thomson.

Definizione di potenziale. - Il potenziale in un punto è il lavoro che sarebbe effettuato se, posta l'unità di elettricità positiva in un punto senza alterare la distribuzione elettrica effettiva, le forze elettriche agenti su di esso e la trasportassero da questo punto fino a una distanza infinita; o, analogamente, il lavoro che deve compiere un agente esterno per portare un'unità di elettricità positiva dall'infinito, o da ogni punto dove il potenziale è zero fino al punto considerato.

Espressione dell'intensità risultante e delle sue componenti, in funzione del potenziale. 71. Poiché la forza elettromotrice totale lungo un arco AB qualsiasi è

$$E_{AB} = V_A - V_B$$

prendendo ds per questo arco AB , avremo per componente della forza nella direzione di ds

$$R \cos \epsilon = -\frac{dV}{ds}$$

dove, prendendo ds parallelo a ognuno degli assi in successione

$$X = -\frac{dV}{dx} \quad Y = -\frac{dV}{dy} \quad Z = -\frac{dV}{dz}$$

$$R = \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Indicheremo l'intensità stessa, il cui modulo è R e le cui componenti sono X, Y, Z , con la lettera C , come al § 68.

Il potenziale è lo stesso in tutti i punto posti all'interno di un conduttore. 72. Un conduttore è un corpo nel quale l'elettricità che vi è contenuta è libera di muoversi da un punto ad un altro, quando esso è sottoposto all'azione di una forza elettromotrice. Se l'elettricità è in equilibrio, non può esistere forza elettromotrice agente all'interno del conduttore; di conseguenza, $R = 0$ on tutto lo spazio occupata dal conduttore. Da ciò, risulta che

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad \frac{dV}{dy} = 0 \quad \frac{dV}{dz} = 0$$

e che in ogni punto del conduttore

$$V = C$$

essendo C una quantità costante.

Poiché il potenziale di tutti i punti compresi all'interno del conduttore è C , tale grandezza è detta il *potenziale del conduttore*. Si può definire C : il lavoro che dovrebbe compiere un agente esterno per portare una unità di elettricità dall'infinito fino sul conduttore, supponendo che la presenza di questa unità non influisca sulla distribuzione presente dell'elettricità.

Si vedrà al § 246 che in generale, quando due corpi di specie diversa sono messi a contatto, una forza elettromotrice agisce dall'uno verso l'altro attraverso la superficie di contatto; di modo che, in condizione di equilibrio, il potenziale dell'uno è più alto di quello dell'altro. Ma, per un istante, supporremo che tutti i nostri conduttori siano fatti di uno stesso metallo e mantenuti alla stessa temperatura.

Se i potenziali dei conduttori A e B sono rispettivamente V_A e V_B la forza elettromotrice che agisce lungo un filo metallico congiungente A con B sarà

$$V_A - V_B$$

nella direzione AB , cioè che l'elettricità positiva tenderà a passare dal conduttore dove il potenziale è più alto al conduttore dove il potenziale è più basso.

In elettrostatica, esiste tra il potenziale e l'elettricità lo stesso rapporto che vi è in Idrostatica tra la pressione e il fluido, e in Termodinamica tra la temperatura e il calore. L'elettricità, il fluido, il calore tendono a passare da un luogo ad un altro, se il potenziale, la pressione, la temperatura sono maggiori nel primo punto che nel secondo. Un fluido è certamente una sostanza, e certamente anche il calore non è una sostanza: quindi, se possiamo trarre profitto da analogie di questo genere, per farci un'idea precisa delle relazioni che esistono tra le grandezze elettriche, dobbiamo prestare attenzione che l'una o l'altra di queste analogie non ci induca a credere che l'elettricità è una sostanza come l'acqua, o uno stato di moto come il calore.

Potenziale di un sistema elettrico qualunque. 73. Sia un punto isolato carico di una quantità e di elettricità posta a una distanza r dal punto (x', y', z') ; allora

$$V = \int_r^{\infty} R dr = \int_r^{\infty} \frac{e}{r^2} dr = \frac{e}{r}$$

Supponiamo che vi sia un numero qualunque di punti elettrizzati, le cui coordinate sono $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots$; le cariche e_1, e_2, \dots ; e le distanze dal punto (x', y', z') , r_1, r_2, \dots . Il potenziale del sistema in (x', y', z') sarà

$$V = \sum \left(\frac{e}{r} \right)$$

Sia ρ la densità elettrica in un punto (x, y, z) posto all'interno di un corpo elettrizzato: il potenziale dovuto a questo corpo sarà

$$V = \iiint \frac{\rho}{r} dx dy dz$$

dove

$$r = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

e dove l'integrazione è estesa a tutto il volume del corpo.

Sulla dimostrazione della legge dell'inverso del quadrato delle distanze. 74a. Si può ammettere che le esperienze dirette fatte da Coulomb, per mezzo della bilancia di torsione, hanno stabilito che la forza agente tra i corpi elettrizzati è in ragione inversa del quadrato della distanza. Tuttavia i risultati che si deducono da simili esperienze devono essere considerato come affetti da un errore che dipende dall'errore probabile di ogni esperienza: ora, a meno che l'abilità dell'operatore sia molto grande, l'errore probabile di una esperienza fatta con la bilancia di torsione è considerevole.

Una verifica ben più rigorosa della legge delle forze elettriche può essere ricavata da una esperienza simile a quella che è stata descritta al § 92 (Esp. VII).

Cavendish, nella sua Opera ancora inedita sull'elettricità, fa dipendere da una esperienza di questa natura la dimostrazione della legge delle forze elettriche.

Fissava una sfera su un supporto isolante, attaccava con manici di vetro due emisferi a due supporti di legno mobili attorno ad un asse: quando si avvicinavano, gli emisferi formavano, concentricamente alla sfera, un involuppo sferico isolato.

Si poteva poi far comunicare la sfera con gli emisferi per mezzo di un corpo filo metallico, che era attaccato a sua volta a una corda di seta, in modo da poter essere poi tolto senza scaricare lo strumento.

Essendo la sferetta in comunicazione con gli emisferi, Cavendish caricava gli emisferi con una bottiglia di Leyda, della quale aveva preliminarmente misurato il potenziale per mezzo di un elettrometro; subito dopo, ritirava con la sua corda di seta il filo di comunicazione, separava gli emisferi, li scaricava ed esaminava lo stato elettrico della sfera, per mezzo dell'elettrometro a palline di sambuco.

Mai l'elettrometro a palline di sughero, che, in quell'epoca (1773), passava per l'elettrometro più sensibile, poté rivelare alcuna traccia di elettrizzazione.

Poi, Cavendish comunicava alla sfera una frazione nota della carica inizialmente fornita agli emisferi, poi esaminava di nuovo la sfera per mezzo del suo elettrometro.

Trovò così che, nella prima esperienza, la carica della sfera aveva dovuto essere inferiore a $\frac{1}{60}$ della carica totale dello strumento, poiché, se fosse stata maggiore, sarebbe stata segnalata dall'elettrometro.

Calcolò poi il rapporto tra la carica della sfera e quella degli emisferi, nell'ipotesi che la repulsione fosse in ragione inversa di una potenza della distanza diversa leggermente da 2; trovò così che, se la differenza fosse stata di $\frac{1}{60}$, la carica della sfera sarebbe stata di $\frac{1}{51}$ della carica degli emisferi e, di conseguenza, avrebbe potuto essere scoperta per mezzo dell'elettrometro.

74b. L'esperienza è stata ripetuta recentemente al laboratorio Cavendish in forma un poco differente.

Gli emisferi erano montati su un supporto isolante e la sfera fissata all'interno in una posizione voluta, per mezzo di un anello di ebanite. Grazie a questa disposizione, il supporto isolante della sfera non era mai sottoposto all'azione di alcuna forza elettromotrice apprezzabile e, di conseguenza, non si caricava; mai e l'influenza perturbatrice dell'elettricità, che si sviluppava lungo degli isolanti, si trovava completamente eliminata.

Invece di togliere gli emisferi prima di esaminare il potenziale della sfera, li si lascia sul posto e li si scarica mettendoli a terra. L'effetto di una carica data restante sulla sfera non era così grande come se gli emisferi fossero stati tolti, ma questa differenza era più che compensata dalla protezione assoluta che il recipiente conduttore assicurava contro tutte le influenze perturbatrici esterne.

Il filo metallico corto, che stabiliva la comunicazione tra la sfera e il suo rivestimento, era fissato a un piccolo disco metallico, che formava come il coperchio di un piccolo foro praticato nel rivestimento: quando il filo e il coperchio erano stati tolti per mezzo di una corda di seta, si poteva passare attraverso il foro l'elettrodo di un elettrometro e farlo posare sulla sfera interna.

L'elettrometro era quello a quadranti di Thomson, che è descritto al § 219. La gabbia dell'elettrometro e uno dei suoi elettrodi erano costantemente collegati a terra; l'elettrodo utilizzato per l'esperienza rimaneva a terra, finché il rivestimento sferico fu scaricato.

Per valutare la carica iniziale di questo rivestimento, una piccola sfera di rame era posta un supporto isolante a una distanza considerevole dal rivestimento.

Le operazioni erano svolte come segue:

Il rivestimento era caricato mettendolo a contatto con una bottiglia di Leyda.

La piccola sfera era messa a terra per darle per induzione una carica negativa; poi era lasciata isolata.

Il filo di comunicazione della sfera con il rivestimento era tolto per mezzo di un cordone di seta.

Il rivestimento era scaricato e lasciato a contatto con la terra.

L'elettrodo per l'esperienza era staccato da terra, passato attraverso il foro del rivestimento e messo a contatto con la sfera.

Non si poté osservare il minimo effetto sull'elettrometro.

Per testare la sensibilità dello strumento, si staccava dalla terra il rivestimento sferico e si scaricava a terra la piccola sfera. Si osservava allora all'elettrometro una deviazione positiva D .

La carica negativa della sfera era di circa $\frac{1}{54}$ della carica iniziale del rivestimento sferico; e la carica positiva indotta dalla sfera sul rivestimento messo a terra era di circa $\frac{1}{9}$ della carica di questa sfera.

Pertanto, quando la piccola sfera era messa a terra, il potenziale del rivestimento era circa $\frac{1}{486}$ del suo potenziale iniziale.

Se la repulsione fosse proporzionale a r^{q-2} , il potenziale della sfera interna sarebbe stato, dall'equazione (22), § 74, $d - 0,1478q$ di quella del rivestimento.

Pertanto, se $\pm d$ è la massima deviazione dell'elettrometro che possa sfuggire all'osservazione, q non può essere superiore a

$$\frac{1}{72} \frac{d}{D}$$

Anche in un'esperienza grossolana, D era superiore a $300d$; q non poteva quindi superare

$$\pm \frac{1}{21600}$$

Teoria dell'esperienza. 74c. *Trovare in un punto qualsiasi il potenziale dovuto a uno strato sferico uniforme, essendo la repulsione tra due unità di materia una funzione data della distanza.*

Sia $\phi(r)$ la repulsione tra due unità di materia poste alla distanza r , e sia $f(r)$ tale che

$$(2.0.1) \quad \frac{df(r)}{dr} (= f'(r)) = r \int_r^{\infty} \phi(r) dr$$

Siano a il raggio dello strato sferico e σ la sua densità superficiale; se α indica la massa totale dello strato

$$(2.0.2) \quad \alpha = 4\pi a^2 \sigma$$

Siano b la distanza del punto dato dal centro dello strato, e r la sua distanza da un punto qualunque dello strato.

Se riferiamo questo punto dello strato a un sistema di coordinate sferiche il cui polo è al centro della sfera e il cui asse è la retta tracciata dal punto dato,

$$(2.0.3) \quad r^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

La massa di un elemento dello strato è

$$(2.0.4) \quad \sigma a^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

e il potenziale dovuto a questo elemento in un punto dato è

$$(2.0.5) \quad \sigma a^2 \frac{f'(r)}{r} a^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

espressione che deve essere integrata in ϕ da $\phi = 0$ a $\phi = 2\pi$, ciò che dà

$$(2.0.6) \quad 2\pi \sigma a^2 \frac{f'(r)}{r} a^2 \sin \theta d\theta$$

che si deve integrare rispetto a θ da $\theta = 0$ fino a $\theta = \pi$.

Differenziando la (2-3) si trova

$$(2.0.7) \quad r dr = ab \sin \theta d\theta$$

Sostituendo nella (2-6) il valore di $d\theta$, abbiamo

$$(2.0.8) \quad 2\pi \sigma f'(r) dr$$

il cui integrale è

$$(2.0.9) \quad V = 2\pi \sigma \frac{a}{b} [f(r_1) - f(r_2)]$$

dove r_1 è il più grande valore cdi r , che è sempre $a + b$, e r_2 il suo più piccolo valore, che è $b - a$ se il punto è esterno e $a - b$ se è interno al rivestimento.

Se rappresentiamo con α la carica totale dell'involuppo e con V il suo potenziale nel punto dato, avremo, per un punto esterno al rivestimento

$$(2.0.10) \quad V = \frac{\alpha}{2ab} [f(a+b) - f(b-a)]$$

per un punto situato sull'avvolgimento stesso,

$$(2.0.11) \quad V = \frac{\alpha}{2a^2} f(2a)$$

e per un punto interno al rivestimento

$$(2.0.12) \quad V = \frac{\alpha}{2ab} [f(a+b) - f(b-a)]$$

Dobbiamo ora determinare i potenziali di due strati sferici concentrici, i cui raggi sono a per lo strato esterno e b per quello interno e le cui cariche sono α e β .

Chiamando A il potenziale dello strato esterno e B quello dello strato interno, abbiamo, da quanto precede,

$$(2.0.13) \quad A = \frac{\alpha}{2a^2} f(2a) + \frac{\beta}{2ab} [f(a+b) - f(b-a)]$$

$$(2.0.14) \quad A = \frac{\beta}{2b^2} f(2b) + \frac{\alpha}{2ab} [f(a+b) - f(b-a)]$$

Nella prima parte dell'esperienza, i due avvolgimenti sono messi in comunicazioni con il filo corto e sono portati entrambi a uno stesso potenziale V .

Ponendo $A = B = V$ e risolvendo le equazioni (2-13) e (2-14) rispetto a β , troviamo la carica dell'avvolgimento interno

$$(2.0.15) \quad \beta = 2Vb \frac{bf(2a) - a[f(a+b) - f(b-a)]}{f(2a)f(2b) - [f(a+b) - f(b-a)]^2}$$

Nell'esperienza di Cavendish, i due emisferi formanti l'avvolgimento esterno erano allontanati a una distanza che possiamo supporre infinita e scaricati. Il potenziale dello strato interno, o della sfera, diveniva allora

$$(2.0.16) \quad B_1 = \frac{\beta}{2b^2} f(2b)$$

Nella forma sotto la quale l'esperienza è stata ripetuta nel laboratorio di Cavendish, l'avvolgimento esterno era lasciato sul posto, ma collegato a terra, di modo che $A = 0$. In questo caso, troviamo che il potenziale della sfera interna ha come espressione in funzione di V

$$(2.0.17) \quad B_2 = V \left[1 - \frac{a[f(a+b) - f(b-a)]}{bf(2a)} \right]$$

74d. Supponiamo ora, con Cavendish, che la forza vari in ragione inversa di una certa potenza della distanza, poco diversa dalla seconda, e poniamo

$$(2.0.18) \quad \phi(r) = r^{q-1}$$

allora

$$(2.0.19) \quad f(r) = \frac{1}{1-q^2} r^{q+1}$$

e se supponiamo che q sia piccolo, possiamo sviluppare questa formula, secondo la proprietà degli esponenziali, nella forma

$$(2.0.20) \quad f(r) = \frac{1}{1-q^2} r \left[1 + q \log r + \frac{1}{1 \times 2} (q \log r)^2 + \dots \right]$$

e, se trascuriamo i termini contenenti q^2 , le equazioni (2-16) e (2-17) divengono

$$(2.0.21) \quad B_1 = \frac{1}{2} \frac{a}{a-b} Vq \left(\log \frac{4a^2}{a^2 - b^2} - \frac{a}{b} \log \frac{a+b}{a-b} \right)$$

$$(2.0.22) \quad B_2 = \frac{1}{2} Vq \left(\log \frac{4a^2}{a^2 - b^2} - \frac{a}{b} \log \frac{a+b}{a-b} \right)$$

dalle quali si può ricavare q per mezzo dei dati forniti dall'esperienza.

74e. Laplace ha dimostrato per primo che non vi sono altre funzioni della distanza diverse dall'inverso del quadrato, per le quali sia soddisfatta la condizione che uno strato sferico uniforme non esercita alcuna azione su un punto interno a questo strato².

Se supponiamo che, nella (2-15), β sia sempre nullo, possiamo applicare il metodo di Laplace alla determinazione della forma di $f(r)$. Abbiamo, dalla (2-15)

$$bf(2a) - af(a+b) + af(a-b) = 0$$

Differenziando due volte, rispetto a b e dividendo per a , troviamo

$$f''(a+b) = f''(a-b)$$

Se questa equazione è vera in generale,

$$f''(r) = C_0 \text{ una costante}$$

da cui

$$f'(r) = C_0 r + C_1$$

e dalla (2-1)

$$\int_r^\infty \phi(r) dr = \frac{f'(r)}{r} = C_0 + \frac{C_1}{r}$$

$$\phi(r) = \frac{C_1}{r^2}$$

Possiamo osservare che l'ipotesi di Cavendish, che suppone una forza variante secondo una certa potenza della distanza, può apparire meno generale di quella di Laplace, che suppone solo la forza funzione della distanza; ma questa ipotesi è la sola compatibile con questo fatto che figure simili possono essere elettrizzate in modo da avere proprietà elettriche simili.

Poiché, se la forza fosse una funzione della distanza diversa una potenza, il rapporto tra le forze a due distanze diverse non sarebbe più una funzione del rapporto tra le distanze, ma dipenderebbe dal valore assoluto di queste distanze; e, di conseguenza, implicherebbe il rapporto tra queste distanze una certa lunghezza assoluta.

Lo stesso Cavendish fece notare che, nella sua ipotesi sulla costituzione del fluido elettrico, è impossibile che la distribuzione di elettricità sia esattamente la stessa su due corpi geometricamente simili, se le cariche non sono proporzionali ai volumi. Poiché suppose che le molecole del fluido elettrico sono molto ravvicinate, sulla superficie del corpo, ciò porta a supporre che la legge della repulsione non è più quella dell'inverso del quadrato, ma che, dall'istante in cui le molecole arrivano a contatto, le loro repulsioni crescono ben più rapidamente di quanto le loro distanze diminuiscono.

²Méc. céle., t. I, p.2.

Integrale dell'induzione elettrica, e spostamento elettrico attraverso una superficie. 75. Sia R l'intensità risultante in un punto della superficie; sia ϵ l'angolo formato da R con la normale tracciata dalla parte positiva della superficie; $R \cos \epsilon$ è la componente dell'intensità, lungo la normale alla superficie, e, se dS è l'elemento di superficie, lo spostamento elettrico attraverso dS sarà (§ 68)

$$\frac{1}{4\pi} K R \cos \epsilon dS$$

e, poiché, non consideriamo altri dielettrici tranne l'aria, $K = 1$.

Possiamo tuttavia evitare di introdurre adesso la teoria dello spostamento elettrico, chiamando $R \cos \epsilon dS$ l'induzione attraverso l'elemento dS . Questa quantità è ben nota in Fisica matematica, ma il nome di induzione è preso da Faraday. L'integrale della superficie dell'induzione è

$$\iint R \cos \epsilon dS$$

e, dal § 21, si vede che, se X, Y, Z sono le componenti di R , e se queste quantità sono continue in una regione limitata da una superficie chiusa S , l'induzione, contata dall'interno verso l'esterno, è

$$\iint R \cos \epsilon dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) dx dy dz$$

essendo l'integrazione estesa a tutto il volume compreso all'interno della superficie.

Induzione attraverso una superficie chiusa dovuta a un solo centro di forza. 76. Sia e una quantità di elettricità, che si suppone posta in un punto O , e sia P un punto qualsiasi a una distanza r da O : la forza nel punto P sarà er^{-2} e sarà diretta lungo OP .

Tracciamo da O , fino a una distanza infinita, una linea di direzione qualunque. Se O è esterno alla superficie chiusa, questa linea o non incontrerà del tutto la superficie o vi penetrerà e ne uscirà uno stesso numero di volte. Se O è interno alla superficie, la linea deve dapprima uscire dalla superficie, poi può penetrarvi e uscirne un numero di volte qualsiasi, e finisce per uscirne.

Sia ϵ l'angolo tra OP e la normale esterna alla superficie, nei punti dove OP incontra questa superficie: tutte le volte che OP esce dalla superficie, $\cos \epsilon$ è positivo; ed è negativo tutte le volte che OP penetra nella superficie.

Descriviamo una sfera di centro O e di raggio uguale all'unità e facciamo descrivere alla linea OP una superficie conica di piccola apertura e di vertice O .

Questo cono taglierà un piccolo elemento $d\omega$ sulla superficie della sfera, e altri elementi dS_1, dS_2, \dots sulla superficie chiusa in diversi punti dove è incontrata dalla linea OP .

Ora, poiché ognuno di questi elementi taglia il cono a una r dal vertice e sotto un angolo ϵ ,

$$dS = r^2 \sec \epsilon d\omega$$

e, poiché $R = er^{-2}$, avremo

$$R \cos \epsilon dS = \pm e d\omega$$

essendo il segno $+$ preso quando r esce dalla superficie e il segno $-$ quando vi entra.

Se il punto O è esterno alla superficie chiusa, i valori positivi sono in numero uguale a quelli negativi, di modo che, per una direzione qualunque

$$\sum R \cos \epsilon dS = 0$$

e pertanto

$$\iint R \cos \epsilon dS = 0$$

essendo l'integrazione estesa all'intera superficie chiusa.

Se il punto O è interno alla superficie chiusa, il raggio vettore OP esce dapprima dalla superficie, dando un valore positivo per $e d\omega$, poi presenta un numero uguale di entrate e uscite, di modo che in questo caso

$$\sum R \cos \epsilon dS = e d\omega$$

Estendendo l'integrazione su tutta la superficie chiusa, comprendiamo tutta la superficie sferica la cui area è 4π ; di modo che

$$\iint R \cos \epsilon dS = 4\pi e$$

Concludiamo pertanto che l'induzione totale prodotta dall'interno verso l'esterno di una superficie chiusa, per l'azione di un centro di forza e posto in punto O , è nulla se il punto O è esterno alla superficie e uguale a $4\pi e$ se il punto è interno.

Poiché, nell'aria, lo spostamento è uguale all'induzione divisa per 4π , lo spostamento attraverso una superficie chiusa, contata dall'interno all'esterno, è uguale alla quantità di elettricità compresa in questa superficie.

COROLLARIO. *Risulta da ciò che, se la superficie non è chiusa, ma limitata da una curva chiusa data, l'induzione totale attraverso questa superficie è ωe , essendo ω l'angolo solido sotteso in O dalla curva data. Questa quantità non dipende quindi dalla curva chiusa, e la forma della superficie da cui questa superficie è il limite potrà essere cambiata in un modo qualsiasi, purché essa non passi da una parte all'altra del centro di forza.*

Sulle equazioni di Laplace e di Poisson. 77. Poiché il valore dell'induzione totale prodotta da un solo centro di forza attraverso una superficie chiusa dipende solo da questo punto, cioè se il centro di forza è interno o esterno alla superficie e non dipende altrimenti dalla posizione di questo punto; se abbiamo un numero qualunque di simili centri e_1, e_2, \dots interni alla superficie, e'_1, e'_2, \dots esterni alla superficie, avremo

$$\iint R \cos \epsilon dS = 4\pi e$$

indicando e la somma algebrica di tutte le quantità di elettricità poste nei diversi centri di forza interni alla superficie chiusa, cioè la quantità totale di elettricità compresa in questa superficie, essendo l'elettricità resinosa contata con il segno $-$.

Se l'elettricità è distribuita all'interno della superficie, di modo che la densità non sia in nessuna parte infinita, avremo, dal § 64,

$$4\pi e = 4\pi \iiint \rho dx dy dz$$

e dal § 75,

$$\iint R \cos \epsilon dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) dx dy dz$$

Se prendiamo come superficie chiusa la superficie dell'elemento di volume $dx dy dz$, avremo, uguagliando questa espressione

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 4\pi \rho$$

e, se esiste un potenziale V , troviamo (§ 71)

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + 4\pi \rho = 0$$

Questa equazione, nel caso in cui la densità è uguale a zero, è detta *equazione di Laplace*. Essa è stata data per la prima volta da Poisson, nella sua forma più generale. Essa ci permette di determinare la distribuzione dell'elettricità, quando conosciamo il potenziale in ogni punto.

Come al § 26, indicheremo con $\nabla^2 V$ la quantità

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

e possiamo formulare l'equazione di Poisson dicendo che la densità elettrica, moltiplicata per 4π , è uguale alla concentrazione del potenziale. Quando non vi è elettrizzazione, il potenziale non ha concentrazione e tale è l'interpretazione dell'equazione di Laplace.

Dal §* 72, V è costante all'interno di un conduttore; pertanto, all'interno di un conduttore, la densità di volume è uguale a zero, e tutta la carica deve stare sulla superficie.

Se supponiamo che, nelle distribuzioni superficiali o lineari, la densità di volume ρ di elettricità resta infinita e che l'elettricità sia sotto la forma di uno strato sottile o di un filo tenue, facendo crescere ρ e diminuendo lo spessore dello strato o la sezione del filo, tenderemo verso la distribuzione superficiale o lineare reale come limiti; e l'equazione, restando vera per tutta l'operazione, resterà vera al limite, purché la si interpreti convenientemente secondo le circostanze.

Variazione del potenziale su una superficie carica. 78a. La funzione V deve essere fisicamente continua, nel senso definito nel § 7, salvo alla superficie di separazione di due mezzi differenti; in questo caso, così come vedremo al § 246, vi può essere una differenza di potenziale tra le due sostanze, e l'elettricità sarà in equilibrio quando il potenziale in un punto vicino dell'altra sostanza, di una quantità costante C , dipendente dalla natura di due sostanze e delle loro temperature.

Ma le derivate prime di V rispetto a x, y, z possono essere discontinue, e, per la § 8, i punti in cui questa discontinuità si produce devono essere su una superficie la cui equazione può essere messa nella forma

$$(2.0.23) \quad \phi = \phi(x, y, z) = 0$$

Questa superficie separa la regione in cui ϕ è negativa da quella in cui è positiva.

Siano V_1 il potenziale in un punto dato della regione negativa, V_2 il potenziale in un punto dato della regione positiva; in un punto qualsiasi della superficie per la quale $\phi = 0$ e che si può considerare come appartenente a due regioni

$$(2.0.24) \quad V_1 + C = V_2$$

dove C è, se necessario, l'eccesso costante del potenziale della sostanza posta dalla parte positiva della superficie.

Siano l, m, n i coseni direttori della normale ν_2 tracciata in un punto dato della superficie di separazione, nella regione positiva. I coseni direttori della normale ν_1 tracciati nello stesso punto della superficie, nella regione negativa, saranno $-l, -m, -n$.

Gli incrementi di V lungo le normali saranno

$$(2.0.25) \quad \frac{dV_1}{d\nu_1} = -l \frac{dV_1}{dx} - m \frac{dV_1}{dy} - n \frac{dV_1}{dz}$$

$$(2.0.26) \quad \frac{dV_2}{d\nu_2} = l \frac{dV_2}{dx} + m \frac{dV_2}{dy} + n \frac{dV_2}{dz}$$

Tracciamo sulla superficie di separazione una linea qualsiasi e sia s la sua lunghezza misurata a partire da un punto fisso su questa linea: in ogni punto della superficie e, di conseguenza, in ogni punto della linea $V_2 - V_1 = C$.

Differenziando questa equazione rispetto a s , abbiamo

$$(2.0.27) \quad \left(\frac{dV_2}{dx} - \frac{dV_1}{dx} \right) \frac{dx}{ds} + \left(\frac{dV_2}{dy} - \frac{dV_1}{dy} \right) \frac{dy}{ds} + \left(\frac{dV_2}{dz} - \frac{dV_1}{dz} \right) \frac{dz}{ds} = 0$$

e poiché la normale è perpendicolare a questa linea

$$(2.0.28) \quad l \frac{dx}{ds} + m \frac{dy}{ds} + n \frac{dz}{ds} = 0$$

Dalle (2-25), (2-26), (2-27), (2-28) troviamo

$$(2.0.29) \quad \frac{dV_2}{dx} - \frac{dV_1}{dx} = l \left(\frac{dV_1}{d\nu_1} + \frac{dV_2}{d\nu_2} \right)$$

$$(2.0.30) \quad \frac{dV_2}{dy} - \frac{dV_1}{dy} = m \left(\frac{dV_1}{d\nu_1} + \frac{dV_2}{d\nu_2} \right)$$

$$(2.0.31) \quad \frac{dV_2}{dz} - \frac{dV_1}{dz} = n \left(\frac{dV_1}{d\nu_1} + \frac{dV_2}{d\nu_2} \right)$$

Se consideriamo la variazione dell'intensità elettromotrice in un punto, dal momento in cui questo punto attraversa la superficie, vediamo che, tra le componenti dell'intensità, quella che è normale alla superficie può subire un cambiamento brusco alla superficie, ma che le altre due componenti parallela al piano tangente restano continue quando si attraversa la superficie.

78b. Per determinare la carica della superficie, consideriamo una superficie chiusa, posta in parte nella regione positiva, in parte nella regione negativa, e contenente, di conseguenza, una parte della superficie di discontinuità.

L'integrale

$$\iint R \cos \epsilon dS$$

esteso a questa superficie, è uguale a $4\pi e$, essendo e la quantità di elettricità compresa in questa superficie chiusa.

Procedendo come al § 21, troviamo

(2.0.32)

$$\iint R \cos \epsilon dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) dx dy dz + \iint [l(X_2 - X_1) + m(Y_2 - Y_1) + n(Z_2 - Z_1)] dS$$

dove l'integrale triplo è esteso a tutto il volume compreso nella superficie chiusa e l'integrale doppio alla sola superficie di discontinuità.

Sostituendo ai termini di questa equazione i loro valori ricavati dalle (2-29), (2-30), (2-31),

$$(2.0.33) \quad 4\pi e = \iiint 4\pi \rho dx dy dz = \iint \left(\frac{dV_1}{d\nu_1} + \frac{dV_2}{d\nu_2} \right) dS$$

Ma, dalla definizione della densità del volume ρ e della densità superficiale σ ,

$$(2.0.34) \quad 4\pi e = \iiint \rho dx dy dz + 4\pi \iint \sigma dS$$

da cui, confrontando gli ultimi termini di queste due equazioni, si ricava

$$(2.0.35) \quad \frac{dV_1}{d\nu_1} + \frac{dV_2}{d\nu_2} + 4\pi\sigma = 0$$

Questa equazione è detta l'equazione caratteristica di V su una superficie elettrizzata dove la densità superficiale è σ .

78c. Se, in tutta l'estensione di una regione continua dello spazio, V è una funzione di x, y, z che soddisfa all'equazione di Laplace

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

e se, in una porzione finita di questa regione, V è costante e uguale a C , V deve essere costante e uguale a C in tutta la regione per la quale l'equazione di Laplace è soddisfatta.

Se V non è costante in tutta la regione, sia S la superficie che limita la porzione finita nella quale $V = C$.

Sulla superficie $S, V = C$.

Sia ν una normale tracciata esternamente alla superficie S . Poiché S è il limite della regione continua nella quale $V = C$, il valore di V inizia a differire da C nell'istante in cui attraversiamo la superficie S spostandoci sulla normale ν . Pertanto, immediatamente al di fuori di S , $\frac{dV}{d\nu}$ può essere positivo o negativo, ma non può essere nullo, salvo per le normali tracciate lungo la linea che separa un'area positiva da una negativa.

Ma, se ν' è la normale tracciata verso l'interno della superficie S , $V' = C$ e $\frac{dV'}{d\nu'} = 0$.

Pertanto, in ogni punto della superficie, eccetto su alcune linee che formano limite

$$\frac{dV}{d\nu} + \frac{dV'}{d\nu'} (= -4\pi\sigma) \text{ è}$$

una quantità finita, positiva o negativa; e, di conseguenza, sulla superficie S , vi è una distribuzione di elettricità che è continua in tutti i punti, tranne su certe linee che separano le aree cariche positivamente da aree cariche negativamente.

L'equazione di Laplace non è soddisfatta sulla superficie se non per i punti posti su certe linee della superficie. Di conseguenza, la superficie S , all'interno della quale C è costante, deve comprendere l'intera estensione della regione nella quale l'equazione di Laplace è soddisfatta.

Forza agente su una superficie elettrizzata. 79. L'espressione generale delle componenti della forza che agisce su un corpo elettrizzato, parallelamente ai tre assi, è della forma

$$(2.0.36) \quad A = \iiint \rho X dx dy dz$$

vi sono espressioni analoghe per le componenti B e C parallele a Oy e Oz .

Ma, sulla superficie elettrizzata, ρ è infinito, e X è discontinuo: non possiamo quindi calcolare la forza direttamente per mezzo delle espressioni di questa forma.

Ma abbiamo posto che la discontinuità vale solo per la componente dell'intensità che è normale alla superficie elettrizzata e che le altre due componenti sono continue.

Supponiamo quindi che si prenda l'asse x normale alla superficie in un punto dato; supponiamo pure, almeno per la prima parte di questo studio, che X non sia veramente discontinuo, ma che vari continuamente da X_1 a X_2 quando x varia da x_1 a x_2 . Se il risultato del nostro calcolo conduce a un valore determinato della forza come limite quando $x_2 - x_1$ decresce indefinitamente, potremo considerare questo risultato come esatto per $x_2 = x_1$ e per una superficie elettrizzata senza spessore.

Sostituendo a ρ il suo valore trovato al § 77, abbiamo

$$(2.0.37) \quad A = \frac{1}{4\pi} \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) X dx dy dz$$

Integrando questa espressione rispetto a x da $x = x_1$ a $x = x_2$, diviene

$$(2.0.38) \quad A = \frac{1}{4\pi} \iint \left[\frac{1}{2} (X_2^2 - X_1^2) + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) X dx \right] dy dz$$

Questo è il valore di A per uno strato parallelo al piano xy e di spessore $x_2 - x_1$. Poiché Y e Z sono continui, $\frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}$ è finito, e poiché X è pure finito,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) X dx < C (x_2 - x_1)$$

dove C è il più grande valore che assume $\left(\frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) X$ da $x = x_1$ a $x = x_2$.

Pertanto, quando $x_2 - x_1$ decresce oltre ogni limite, questo termine tende a zero, e il resto

$$(2.0.39) \quad A = \iint \frac{1}{8\pi} (X_2^2 - X_1^2) dy dz$$

dove X_1 è il valore di X sulla parte negativa e X_2 sulla parte positiva della superficie.

Ma dal § 78

$$(2.0.40) \quad X_2 - X_1 = \frac{dV_1}{dx} - \frac{dV_2}{dx} = 4\pi\sigma$$

di modo che possiamo scrivere

$$(2.0.41) \quad A = \iint \frac{1}{2} (X_2 + X_1) \sigma dy dz$$

Qui $dydz$ è l'elemento di superficie, σ la densità superficiale e $\frac{1}{2}(X_2 + X_1)$ è la media aritmetica delle intensità elettromotrici delle due parti della superficie.

Pertanto, un elemento di una superficie elettrizzata è soggetto all'azione di una forza la cui componente normale alla superficie è uguale al prodotto della carica dell'elemento per la media aritmetica delle intensità elettromotrici normali, da ogni lato della superficie.

Poiché le altre due componenti dell'intensità elettromotrice non sono discontinue, non vi può essere dubbio nella valutazione delle componenti corrispondenti della forza che agisce sulla superficie.

Possiamo ora supporre che la normale alla superficie abbia una direzione qualunque rispetto agli assi: l'espressione generale della forza che agisce su un elemento dS si scriverà allora

$$(2.0.42) \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \sigma dS \\ B &= \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) \sigma dS \\ C &= \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2) \sigma dS \end{aligned}$$

Superficie elettrizzata di un conduttore

80. Abbiamo già mostrato che, in tutto l'interno di un conduttore in equilibrio elettrico, $X = Y = Z = 0$ e che, di conseguenza, V è costante.

Pertanto

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 4\pi\rho = 0$$

e, di conseguenza, ρ deve essere nulla in tutto l'interno del conduttore; ossia, non vi è elettricità all'interno del conduttore.

Pertanto una distribuzione superficiale di elettricità è la sola possibile su un conduttore in equilibrio.

Estendendosi una distribuzione a tutta la massa del corpo può esistere solo se il corpo è un non conduttore.

Poiché l'intensità risultante all'interno del conduttore è zero, l'intensità risultante, immediatamente al di fuori del conduttore, deve essere diretta lungo la normale, uguale a $4\pi\sigma$, contandola dall'interno verso l'esterno del conduttore.

Questa relazione tra la densità superficiale e l'intensità risultante vicino alla superficie di un conduttore è nota con il nome di *legge di Coulomb*, avendo Coulomb stabilito dall'esperienza che l'intensità della forza elettrica, vicino a un punto dato sulla superficie di un conduttore, è normale alla superficie e proporzionale alla densità superficiale nel punto dato. La relazione numerica

$$R = 4\pi\sigma$$

è stata stabilita da Poisson.

La forza che agisce su un elemento dS della superficie carica di un conduttore è, dal § 79 (poiché l'intensità è nulla sulla parte interna della superficie)

$$\frac{1}{2}R\sigma dS = 2\pi\sigma^2 dS = \frac{1}{8\pi}R^2 dS$$

Questa forza è diretta verso l'esterno del conduttore, sia che la carica sia positiva o negativa; il suo valore, in dyne per cm^2 è

$$\frac{1}{2}R\sigma = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi}R^2$$

ed essa agisce come una pressione applicata alla superficie del conduttore e diretta verso l'esterno.

81. Se ora supponiamo di elettrizzare un corpo di forma allungata, possiamo, facendo decrescere le sue dimensioni laterali, arrivare a pensare a una linea elettrizzata.

Siano ds la lunghezza di una parte di questo corpo allungato, c la sua circonferenza, σ la densità superficiale dell'elettricità alla sua superficie; allora, se λ è la carica per unità di lunghezza, $\lambda = c\sigma$, e l'intensità elettrica risultante vicino alla superficie è

$$4\pi\sigma = 4\pi\frac{\lambda}{c}$$

Se c decresce indefinitamente, mentre λ rimane finito, l'intensità alla superficie aumenta indefinitamente. Ora, per ogni dielettrico, vi è un limite al di là del quale l'intensità non può più essere aumentata senza che vi sia una scarica distruttiva; una distribuzione nella quale una quantità finita di elettricità sarà posta su una porzione finita di una linea è quindi incompatibile con lo stato delle cose nella natura.

Quand'anche si trovasse un isolante attraverso il quale una forza infinita non farebbe passare una scarica, sarebbe impossibile caricare un conduttore lineare di una quantità finita di elettricità; poiché servirebbe una forza elettromotrice infinita per portare l'elettricità sul conduttore lineare.

Allo stesso modo, si può mostrare che un punto carico di una quantità finita di elettricità non potrebbe esistere in natura. Tuttavia è vantaggioso, parlare in certi casi di linee e punti elettrizzati e possiamo supporre che queste linee e questi punti siano raffigurati da fili elettrizzati o da piccoli corpi le cui dimensioni siano trascurabili rispetto a distanza principali considerate.

Poiché la quantità di elettricità ripartita su una lunghezza data di un filo a un potenziale dato decresce indefinitamente quando il diametro del filo decresce indefinitamente, la distribuzione di elettricità su corpi di dimensioni considerevoli non sarà sensibilmente alterata se si introducono nel campo fili metallici molto sottili, come quelli che servono a stabilire le comunicazioni elettriche tra questi corpi e la terra, una macchina elettrica o un elettrometro.

Linee di forza. 82. Se tracciamo una linea la cui direzione coincide in ogni punto con quella della forza risultante in questo punto, questa linea è detta *linea di forza*.

In tutti i punti del suo percorso, una linea di forza ca da punti dove il potenziale è più alto a quelli dove è più basso.

Una linea di forza non può quindi essere chiusa su se stessa, ma ha un'origine e una fine. L'inizio di una linea di forza deve essere su una superficie elettrizzata positivamente, la fine su una superficie elettrizzata negativamente.

Il punto iniziale e il punto terminale della linea sono detti *punti corrispondenti* sulla superficie positiva e su quella negativa.

Se la linea di forza si muove in modo che il suo punto iniziale descrive una curva chiusa sulla superficie positiva, il suo punto terminale tratterà una curva chiusa corrispondente sulla superficie negativa e la linea di forza stessa genererà una superficie tubolare, che si chiama *tubo di induzione* o un *solenoido*³.

Poiché, in un punto qualunque della superficie tubolare, la forza risultante è compresa nel piano tangente, non vi è induzione attraverso la superficie. Pertanto, se il tubo non contiene corpi carichi, il valore totale dell'induzione attraverso la superficie chiusa che formano la superficie tubolare e le sue due estremità sarà nullo, dal § 77, e i valori di $\iint R \cos \epsilon dS$ per le due estremità devono essere uguale e di segno contrario.

Se queste superficie sono di un conduttore, $\epsilon = 0$ e $R = 4\pi\sigma$ e $\iint R \cos \epsilon dS$ diviene $-4\pi \iint \rho dS$, cioè la carica della superficie moltiplicata per 4π .

Pertanto la carica positiva della superficie chiusa dentro la curva chiusa all'inizio del tubo è numericamente uguale alla carica negativa racchiusa dentro la corrispondente curva chiusa al termine del tubo.

Numerosi risultati importanti si possono dedurre dalle proprietà delle linee di forza.

La superficie interna di un recipiente conduttore chiuso è interamente libera da ogni carica, e il potenziale di tutti i punti interni è lo stesso di quello del conduttore, purché non vi siano punto all'interno del recipiente corpi carichi isolati.

Infatti, una linea di forza deve iniziare su una superficie carica positivamente e finire su una superficie carica negativamente; e, poiché non vi sono corpi carichi all'interno del contenitore, una linea di forza, se esiste all'interno del contenitore, non può cominciare e finire sulla superficie dello stesso.

Ma il potenziale deve essere più elevato all'inizio che alla fine della linea di forza; d'altra parte, il potenziale deve essere lo stesso in tutti i punti di un conduttore in equilibrio elettrico.

³Da $\sigma\omega\lambda\gamma$, un tubo. Faraday usa nello stesso senso il termine *spondiloide*.

Pertanto non può esistere alcuna linea di forza nello spazio compreso all'interno di un recipiente cavo privo di corpi carichi.

Se un conduttore, posto all'interno di un contenitore chiuso, è messo in comunicazione con questo recipiente, il suo potenziale diviene lo stesso di quello del recipiente e la sua superficie diviene il prolungamento della superficie interna del recipiente. Il conduttore deve quindi scaricarsi di ogni elettrizzazione.

Se supponiamo che la superficie di un corpo carico sia divisa in parti elementari tali che la carica di ogni elemento sia uguale all'unità, e se si tracciano nel campo di forza dei solenoidi, aventi per base questi elementi, l'integrale preso su una superficie qualunque sarà rappresentato dal numero di solenoidi che incontra questa superficie. È in questo senso che Faraday utilizza il suo concetto di linee di forza, per rappresentare in ogni punto del campo, non solo la direzione, ma anche l'intensità della forza.

Abbiamo impiegato l'espressione di *linee di forza*, poiché è quella di cui si è servito Faraday e altri. Ma, rigorosamente, queste linee dovrebbero essere chiamate *linee di induzione elettrica*.

Nei casi ordinari, le linee di induzione rappresentano in ogni punto la direzione e la grandezza dell'intensità elettromotrice risultante, poiché l'intensità e l'induzione sono nella stessa direzione e in un rapporto costante. Ma vi sono altri casi in cui è importante ricordarsi che queste linee rappresentano solo l'induzione, e che l'intensità è determinata dalle superfici equipotenziali, poiché essa è normale a queste superfici e inversamente proporzionale alla distanza tra due superfici consecutive.

Potere di induzione specifico. 83a. Nello studio degli integrali di superficie, abbiamo adottato la concezione comune di un'azione diretta a distanza, e non abbiamo considerato gli effetti che dipendono dalla natura del dielettrico all'interno del quale si osservano le forze.

Ora Faraday ha osservato che la quantità di elettricità indotta da una forza elettromotrice data sulla superficie del conduttore che limita un dielettrico non è la stessa per tutti i dielettrici. La quantità di elettricità indotta è più considerevole per la maggior parte dei dielettrici solidi o liquidi che per l'aria e i gas. Disse pure che questi corpi hanno un potere induttore specifico superiore a quello dell'aria, che è preso come mezzo standard.

Possiamo esprimere la teoria di Faraday in forma matematica dicendo che, nel mezzo dielettrico, l'induzione attraverso una superficie è uguale al prodotto della forza elettrica normale per il coefficiente del potere induttore specifico del mezzo. Se indichiamo questo coefficiente con K , dovremo, in tutti i corsi di studio degli integrali di superficie, moltiplicare X, Y, Z per K , di modo che l'equazione di Poisson diviene

$$(2.0.43) \quad \frac{d}{dx} K \frac{dV}{dx} + \frac{d}{dy} K \frac{dV}{dy} + \frac{d}{dz} K \frac{dV}{dz} + 4\pi\rho = 0$$

Alla superficie di separazione di due mezzi i cui poteri induttori sono K_1 e K_2 e i potenziali V_1 e V_2 , l'equazione caratteristica si scriverà

$$(2.0.44) \quad K_1 \frac{dV_1}{d\nu_1} + K_2 \frac{dV_2}{d\nu_2} + 4\pi\sigma = 0$$

dove ν_1 e ν_2 sono le normali tracciate nei due mezzi e σ la densità superficiale effettiva alla superficie di separazione, cioè la quantità di elettricità che esiste effettivamente alla superficie sotto forma di carica, e che non può essere alterata a meno di mettere o togliere elettricità in questo punto.

Distribuzione apparente dell'elettricità. 83b. Se, partendo dalla distribuzione effettiva del potenziale, ne deduciamo la densità di volume ρ' e la densità superficiale σ' nell'ipotesi che K è sempre uguale all'unità, possiamo chiamare ρ' la densità di volume apparente e σ' la densità superficiale apparente: poiché una distribuzione elettrica così definita renderà conto della distribuzione effettiva del potenziale, se si suppone che la legge delle forze elettriche data al § 66 non richiede di essere modificata, in ragione delle proprietà differenti dei diversi dielettrici.

La carica apparente di elettricità compresa in una regione data può aumentare o diminuire senza che passi elettricità attraverso la superficie che limita la regione. dobbiamo quindi distinguerla dalla carica vera che soddisfa all'equazione di continuità.

In un mezzo dielettrico eterogeneo, dove K varia in modo continuo, se ρ' è la densità di volume apparente,

$$(2.0.45) \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + 4\pi\rho' = 0$$

Confrontando questa con l'equazione precedente, troviamo

$$(2.0.46) \quad 4\pi(\rho - K\rho') + \frac{dK}{dx} \frac{dV}{dx} + \frac{dK}{dy} \frac{dV}{dy} + \frac{dK}{dz} \frac{dV}{dz} = 0$$

L'elettrizzazione vera, rappresentata da ρ , produrrà, nel dielettrico il cui potere induttore variabile è rappresentato da K , lo stesso potenziale in ogni punto, che darà la distribuzione apparente rappresentata da ρ' in un dielettrico il cui potere induttore sarà dappertutto uguale all'unità.

La carica superficiale apparente σ' si deduce da forze elettriche vicino alla superficie, per mezzo dell'equazione caratteristica ordinaria

$$(2.0.47) \quad \frac{dV_1}{d\nu_1} + \frac{dV_2}{d\nu_2} + 4\pi\sigma' = 0$$

Se un dielettrico solido di forma qualsiasi è un isolante perfetto, e se la sua superficie non riceve alcuna carica, l'elettrizzazione vera resta uguale a zero, qualunque siano le forze elettriche che agiscono su di esso.

Pertanto

$$K_1 \frac{dV_1}{d\nu_1} + K_2 \frac{dV_2}{d\nu_2} = 0$$

$$\frac{dV_1}{d\nu_1} = \frac{4\pi\sigma'K_2}{K_1 - K_2} \quad \frac{dV_2}{d\nu_2} = \frac{4\pi\sigma'K_1}{K_1 - K_2}$$

La densità superficiale σ' è quella dell'elettrizzazione apparente prodotta per induzione sulla superficie del dielettrico. Essa scompare interamente quando si sopprime la forza induttrice; ma se, mentre questa forza agisce, si scarica l'elettrizzazione apparente della superficie passando una fiamma su questa, si farà apparire una elettrizzazione vera opposta a σ' , non appena si sopprimerà la forza induttrice⁴.

⁴Si veda Faraday "Remark on Static Induction, *Proceedings of the Royal Institution*, 12 febbraio, 1858.

Lavoro elettrico e energia di un sistema di conduttori

Lavoro che deve eseguire un agente esterno per caricare in un modo dato un sistema elettrizzato. 84. Il lavoro speso per portare una quantità di elettricità δe dall'infinito o da ogni altro punto a potenziale zero fino a un punto dato del sistema dove il potenziale è V , è, per la definizione stessa di potenziale (§ 70),

$$V\delta e$$

L'effetto di questo trasporto è di aumentare di δe la carica in questo punto dato del sistema, di modo che, se la carica presente era e , essa diviene $e + \delta e$ dopo l'operazione.

Possiamo quindi esprimere il lavoro speso per produrre un cambiamento dato nella carica del sistema con l'integrale

$$(3.0.1) \quad W = \sum \left(\int C\delta e \right)$$

dove la sommatoria \sum si estende a tutte le parti del sistema elettrizzato.

Dall'espressione del potenziale data al § 73, risulta che il potenziale in un punto può essere considerato come la somma di un numero qualunque di parti, ognuna delle quali è il potenziale dovuto a una porzione corrispondente della carica del sistema.

Se quindi V è un punto dato il potenziale dovuto a un sistema carico, che possiamo chiamare $\sum(e)$, e se V' è, nello stesso punto, il potenziale dovuto a un altro sistema di cariche $\sum(e')$, il potenziale prodotto in questo punto dall'insieme di due sistemi di cariche esistenti simultaneamente sarà $V + V'$.

Di conseguenza, se ognuna delle cariche del sistema è alterata nel rapporto n a 1, il potenziale in un punto qualsiasi del sistema è pure modificato nel rapporto n a 1.

Supponiamo quindi che l'operazione che consiste nel caricare un conduttore sia eseguita nel modo seguente. Prendiamo dapprima il sistema libero da ogni carica e al potenziale zero, e carichiamone simultaneamente le diverse parti; ognuna proporzionalmente alla carica che essa deve possedere alla fine.

Così, essendo e la carica finale e V il potenziale finale che deve avere un punto qualunque del sistema, in un istante qualunque dell'operazione la sua carica sarà ne e il suo potenziale nV , e potremo rappresentare tutta l'operazione di carica, supponendo che n cresca in modo continuo da 0 a 1.

Mentre n cresce da n a $n + \delta n$, un punto del sistema la cui carica finale deve essere e , e il potenziale finale V , riceve un aumento di carica $e\delta n$ e il suo potenziale è nV ; il lavoro compiuto durante questa operazione è quindi $eVn\delta n$.

Il lavoro totale compiuto per caricare il sistema è

$$(3.0.2) \quad \sum ev \int_0^1 n dn = \frac{1}{2} \sum (eV)$$

cioè la semi somma dei prodotti delle cariche dei diversi punti del sistema per i loro rispettivi potenziali.

Questo è il lavoro che deve compiere un agente esterno per caricare il sistema nel modo indicato; ma, poiché il sistema è conservativo, il lavoro necessario per portarlo a questo stesso stato con ogni altro procedimento sarà per forza lo stesso.

Possiamo quindi chiamare

$$(3.0.3) \quad W = \frac{1}{2} \sum (ev)$$

l'energia elettrica del sistema, espressa in funzione delle cariche delle diverse parti e dei loro potenziali.

85a. Supponiamo ora che il sistema passi dallo stato (e, V) allo stato (e', V') con una successione di operazioni nel corso delle quali le diverse cariche crescono simultaneamente, e ognuna proporzionalmente al suo accrescimento totale $e' - e$.

Se, in un istante qualunque, la carica di una parte del sistema è $e + n(e' - e)$, il suo potenziale sarà $V + n(V' - V)$ e il lavoro necessario per far variare la carica di questa porzione sarà

$$\int_0^1 (e' - e) [V + n(V' - V)] dn = \frac{1}{2} (e' - e) (V + V')$$

così che se indichiamo con W' l'energia del sistema nello stato (e', V')

$$(3.0.4) \quad W' - W = \frac{1}{2} \sum (e' - e) (V + V')$$

Ma

$$W = \frac{1}{2} \sum (eV)$$

e

$$W' = \frac{1}{2} \sum (e'V')$$

Sostituendo questi valori nella (3-4) troviamo

$$(3.0.5) \quad \sum (eV') = \sum (e'V)$$

Pertanto, in un sistema invariabile di conduttori elettrizzati, se si considerano due stati di elettrizzazione differenti, la somma dei prodotti di cariche nel primo stato per i potenziali degli stessi punti dei conduttori nel secondo stato è uguale alla somma dei prodotti delle cariche nel secondo stato per i potenziali degli stessi punti nel primo stato.

Questo risultato corrisponde, nella teoria elementare dell'elettricità, al teorema di Green nella teoria analitica. Scegliendo opportunamente lo stato iniziale e lo stato finale del sistema, è possibile dedurne un gran numero di risultati utili.

85b. Dalle (3-4) e (3-5), ricaviamo un'altra espressione dell'aumento di energia, in funzione dell'aumento dei potenziali.

$$(3.0.6) \quad W' - W = \frac{1}{2} \sum (e' + e) (V' - V)$$

Se gli incrementi sono infinitesimali, possiamo scrivere la (3-4) e la (3-6)

$$(3.0.7) \quad dW = \sum (V \delta e) = \sum (e \delta V)$$

e se indichiamo con W_e e W_V le espressioni per W in termini rispettivamente della cariche e dei potenziali del sistema, e con $A_r \cdot e_r, V_r$ un particolare conduttore del sistema, la sua carica e il suo potenziale, allora

$$(3.0.8) \quad V_r = \frac{dW_e}{de_r}$$

$$(3.0.9) \quad e_r = \frac{dW_V}{dV_r}$$

86. Se, in un sistema invariabile di conduttori, ognuno dei quali, che indicheremo con A_t è privo di carica, sia allo stato iniziale che a quello finale, allora per questo conduttore $e_t = 0$, e $e'_t = 0$, così che i termini dipendenti da A_t , si annullano in entrambi i membri della (3-5).

Se un altro conduttore, A_u , è al potenziale zero nei due stati del sistema, $V_u = 0$ e $V'_u = 0$ così che i termini dipendenti da A_u scompaiono dai due membri della (3-5).

Se quindi tutti i conduttori del sistema, salvo due, A_r e A_s sono o isolati e privi di carica, oppure collegati a Terra, la (3-5) si riduce alla forma

$$(3.0.10) \quad e_r V'_r + e_s V'_s = e'_r V_r + e'_s V_s$$

Se nello stato iniziale

$$e_r = 1 \quad \text{ed} \quad e'_s = 0$$

e nello stato finale

$$e'_r = 0 \quad \text{ed} \quad e'_s = 1$$

la (3-10) diviene

$$(3.0.11) \quad V'_r = V_s$$

cioè se una carica uguale all'unità, comunicata ad A_r , porta A_s al potenziale V , una carica uguale all'unità, comunicata a A_s , porterà A_r allo stesso potenziale, purché ognuno degli altri conduttori del sistema sia o isolato e privo di carica, oppure messo a Terra di modo che il suo potenziale sia zero.

Questo è il primo esempio che incontriamo in elettricità di una relazione di reciprocità. Simili relazioni si trovano in tutti i settori della Scienza e permettono spesso di dedurre la soluzione di problemi nuovi da problemi più semplici e già risolti.

Così, dal fatto che in un punto esterno a una sfera conduttrice la cui carica è 1 il potenziale è r^{-1} , essendo r la distanza tra il punto e il centro della sfera, concludiamo che un piccolo corpo avente una carica 1 e posto a una distanza r dal centro di una sfera conduttrice non carica, porta il potenziale di questa sfera al valore r^{-1} .

Supponiamo ora che nello stato iniziale

$$V_r = 1 \quad \text{e} \quad V_s = 1$$

la (3-10) diviene

$$(3.0.12) \quad e_s = e'_r$$

o se, A_r portato al potenziale 1 induce su A_s una carica e , allora A_s portato al potenziale 1 indurrà su A_r una carica uguale e .

Supponiamo, in terzo luogo, che nello stato iniziale

$$V_r = 1 \quad \text{ed} \quad e_s = 0$$

e che nello stato finale

$$V'_r = 0 \quad \text{ed} \quad e'_s = 1$$

la (3-10) diviene in questo caso

$$(3.0.13) \quad e'_r + V_s = 0$$

Pertanto, se, A_s non avendo carica, il fatto di portare A_r al potenziale 1 innalza A_s al potenziale V , quando di manterrà A_r al potenziale zero, una carica uguale all'unità comunicata a A_s indurrà su A_r una carica negativa il cui valore numerico è V .

In tutti i casi esaminati, possiamo supporre che certi conduttori siano isolati e privi di carica e che gli altri siano collegati a Terra.

Il terzo caso è una forma elementare di uno dei teoremi di Green. Come esempio del modo di utilizzarlo, supponiamo di aver determinato, per i diversi elementi di un sistema conduttore mantenuto al potenziale zero, la distribuzione delle cariche elettriche indotte da una carica uguale all'unità comunicata a un corpo dato A_s del sistema.

Sia η_r la carica che prende A_r in queste circostanze. Se ora supponiamo A_s privo di carica, e gli altri corpi portati ognuno a un potenziale differente, il potenziale di A_s sarà

$$(3.0.14) \quad V_s = - \sum (\eta_r V_r)$$

Per esempio, se in un punto dato di un recipiente conduttore cavo abbiamo determinato la densità superficiale della carica indotta dall'unità di carica posta in un punto dato all'interno del recipiente, e se conosciamo il valore del potenziale in ogni punto di una superficie della stessa forma e delle stesse dimensioni della superficie interna del recipiente, potremo concludere il potenziale in un punto interno occupante una posizione corrispondente a quella dell'unità di carica.

Pertanto, se si conosce il potenziale per tutti i punti di una superficie chiusa, lo si può determinare per tutti i punti interni alla superficie, purché essa non contenga corpi elettrizzati, e per ogni punto esterno, purché non vi siano corpi elettrizzati al di fuori della superficie.

Teoria di un sistema di conduttori. 87. Siano A_1, A_2, \dots, A_n n conduttori di forma qualsiasi; siano e_1, e_2, \dots, e_n le loro cariche e V_1, V_2, \dots, V_n i loro potenziali.

Supponiamo che il mezzo dielettrico che separa i conduttori resti lo stesso e non si carichi di elettricità nel corso delle operazioni che abbiamo considerato.

Abbiamo mostrato al § 84 che il potenziale di ogni conduttore è una funzione lineare omogenea di n cariche.

Pertanto, poiché l'energia elettrica di un sistema è la semisomma del prodotto del potenziale di ogni conduttore per la sua carica, l'energia elettrica deve essere una funzione omogenea di secondo grado delle n cariche, della forma

$$(3.0.15) \quad W_e = \frac{1}{2}p_{11}e_1^2 + p_{12}e_1e_2 + \frac{1}{2}p_{22}e_2^2 + p_{13}e_1e_3 + p_{23}e_2e_3 + \frac{1}{2}p_{33}e_3^2 + \dots$$

Il suffisso e indica che W è espresso in funzione delle cariche. Quando si scrive W senza suffisso, esso denota l'espressione (3-3), nella quale sono presenti le cariche e il potenziale.

Si può dedurre da questa espressione il potenziale di uno qualunque dei conduttori; poiché il potenziale è definito come il lavoro che si deve compiere per portare l'unità di elettricità dal potenziale zero al potenziale dato, e poiché questo lavoro si spende per aumentare W , dobbiamo solo differenziare W_e rispetto alla carica di un conduttore dato per ottenere il suo potenziale. Otteniamo così

$$(3.0.16) \quad \begin{cases} V_1 & = & p_{11}e_1 \dots + p_{r1}e_r \dots + p_{n1}e_n \\ V_s & = & p_{1s}e_1 \dots + p_{rs}e_r \dots + p_{ns}e_n \\ V_n & = & p_{1n}e_1 \dots + p_{rn}e_r \dots + p_{nn}e_n \end{cases}$$

un sistema di n equazioni lineari che esprimono gli n potenziali in funzione delle n cariche.

I coefficienti p_{rs} sono detti *coefficienti di potenziale*; ognuno ha due indici corrispondenti, il primo all'indice della carica, il secondo a quello del potenziale.

Il coefficiente p_{rr} , per il quale i due indici sono gli stessi, rappresenta il potenziale di A_r , quando la sua carica è uguale all'unità e quella degli altri conduttori è zero. Vi sono n coefficienti di questa specie, uno per ogni conduttore.

Il coefficiente p_{rs} , nel quale i due indici sono differenti, rappresenta il potenziale di A_s , quando A_r riceve una carica uguale all'unità, essendo nulla la carica di tutti gli altri conduttori, tranne A_r .

Abbiamo già mostrato, al § 86, che $p_{rs} = p_{sr}$, ma lo possiamo provare in un modo più rapido, osservando che

$$(3.0.17) \quad p_{rs} = \frac{dV_s}{de_r} = \frac{d}{de_r} \frac{dW_e}{de_s} = \frac{d}{de_s} \frac{dW_e}{de_r} = \frac{dV_r}{de_s} = p_{sr}$$

Il numero dei coefficienti con due indici diversi distinti gli uni dagli altri è quindi $\frac{1}{2}n(n-1)$, poiché vi è uno di questi coefficienti per coppia di conduttori.

Risolvendo le equazioni (3-16) rispetto a e_1, e_2, \dots , abbiamo n equazioni che danno le cariche in funzione dei potenziali

$$(3.0.18) \quad \begin{cases} e_1 & = & q_{11}V_1 \dots + q_{1s}V_s \dots + q_{1n}V_n \\ \dots & \dots & \dots \\ e_r & = & q_{r1}V_1 \dots + q_{rs}V_s \dots + q_{rn}V_n \\ \dots & \dots & \dots \\ e_n & = & q_{n1}V_1 \dots + q_{ns}V_s \dots + q_{nn}V_n \end{cases}$$

Si ha in questo caso, $q_{rs} = q_{sr}$, per

$$(3.0.19) \quad q_{rs} = \frac{de_r}{dV_s} = \frac{d}{dV_s} \frac{dW_V}{dV_r} = \frac{d}{dV_r} \frac{dW_V}{dV_s} = \frac{de_s}{dV_r} = q_{sr}$$

Sostituendo questi valori delle cariche nell'equazione dell'energia elettrica

$$(3.0.20) \quad W = \frac{1}{2} (e_1V_1 + \dots + e_rV_r + \dots + e_nV_n)$$

otteniamo un'espressione dell'energia in funzione dei potenziali:

$$(3.0.21) \quad W_V = \frac{1}{2}q_{11}V_1^2 + q_{12}V_1V_2 + \frac{1}{2}q_{22}V_2^2 + q_{13}V_1V_3 + q_{23}V_2V_3 + \frac{1}{2}q_{33}V_3^2 + \dots$$

Un coefficiente nel quale i due indici sono gli stessi è detto *capacità elettrica del conduttore* al quale corrisponde.

DEFINIZIONE. La capacità di un conduttore è la sua carica quando il suo potenziale è uguale all'unità e quello degli altri conduttori è nullo.

Questa è la definizione della capacità propriamente detta di un conduttore, quando non si fanno ulteriori specificazioni. Ma è a volte vantaggioso specificare lo stato di alcuni e o di tutti gli altri conduttori in un modo differente, come per esempio supporre che la carica di alcuni tra di loro è nulla e possiamo allora definire la capacità del conduttore sotto queste condizioni così come la sua carica quando il potenziale è unitario.

Gli altri coefficienti sono detti *coefficienti di induzione*. Uno qualsiasi tra loro, q_{rs} rappresenta la carica di A_r , quando A_s è portato al potenziale 1 e gli altri conduttori, tranne A_s , sono mantenuti al potenziale zero.

Il calcolo matematico dei coefficienti di potenziali e di induzione è in generale difficile. Dimostreremo in seguito che essi sono sempre valori determinati, e, in certi casi speciali, calcoleremo questi valori. Faremo vedere pure come li si può determinare sperimentalmente.

Quando si tratta della capacità di un conduttore senza che sia fatta menzione della forma o della posizione di altri conduttori del sistema, si dovrà intendere per la capacità del conduttore, quando non ci si trova in presenza di alcun conduttore o corpo elettrizzato a distanza finita.

A volte è vantaggioso, quando si tratta solo di capacità e coefficienti di induzione, di scriverli sotto la forma $[A, P]$, designando con questo simbolo la carica del conduttore A quando P è portato al potenziale uno.

Analogamente $[(A + B) \cdot (P + Q)]$ rappresenterà la carica di $A + B$, quando P e Q sono entrambi portati al potenziale uno ed è chiaro che, poiché

$$[(A + B) (P + Q)] = [AP] + [AQ] + [BP] + [BQ] = [(P + Q) (A + B)]$$

si possono combinare questi simboli complessi mediante addizioni e sottrazioni, come se fossero simboli di quantità.

Il simbolo $[A, A]$ rappresenta la carica di A quando il potenziale di A è l'unità, cioè la capacità di A .

Analogamente, $[(A + B) (A + Q)]$ rappresenta la somma delle cariche si A e di B , quando A e Q sono portati al potenziale 1 e il potenziale di tutti i conduttori, tranne A e Q , è mantenuto uguale a zero.

Questo simbolo si può scomporre in

$$[A. A] + [A. B] + [A. Q] + [B. Q]$$

I coefficienti di potenziale non possono essere trattati in questo modo. I coefficienti di induzione rappresentano cariche che si possono combinare per addizione; ma i coefficienti di potenziale rappresentano dei potenziali e se il potenziale di A è V_1 e quello di B è V_2 , la somma $V_1 + V_2$ non ha significato fisico relativamente ai fenomeni, sebbene $V_1 - V_2$ rappresenti la forza elettromotrice che agisce da A verso B .

I coefficienti di induzione tra due conduttori si possono esprimere in funzione di capacità di conduttori e della capacità dell'insieme di due conduttori

$$[A. B] = \frac{1}{2} [(A + B) (A + B)] - \frac{1}{2} [A. A] - \frac{1}{2} [B. B]$$

Dimensioni dei coefficienti. 88. Poiché il potenziale di una carica e a una distanza r è $\frac{e}{r}$, le dimensioni di una carica di elettricità sono uguali a quelle del prodotto di un potenziale per una lunghezza.

I coefficienti di capacità e di induzione hanno quindi le stesse dimensioni di una linea, e ognuno di essi può essere rappresentato da una linea retta, la cui lunghezza è indipendente dal sistema di unità che impieghiamo.

Per la stessa ragione, un coefficiente di potenziale può essere rappresentato dall'inverso di una lunghezza.

Alcune condizioni alle quali devono soddisfare i coefficienti. 89a. In primo luogo, poiché l'energia elettrica di un sistema è una quantità essenzialmente positiva, la sua espressione sotto forma di funzione quadratica di cariche o di potenziali deve essere positiva, qualunque siano i valori positivi o negativi che si assegnano alle cariche o ai potenziali.

Le condizioni perché una funzione di n variabili, omogenea e di secondo grado, sia sempre positiva sono nel numero di n , e si possono scrivere

$$(3.0.22) \quad \left. \begin{array}{l} p_{11} > 0 \\ \left| \begin{array}{cc} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{array} \right| > 0 \\ \dots \dots \dots \\ \left| \begin{array}{ccc} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{array} \right| > 0 \end{array} \right\}$$

Queste n condizioni sono necessarie e sufficienti affinché W sia essenzialmente positivo¹.

Ma, poiché, nella (3-16), possiamo porre i conduttori in un ordine qualunque, sarà necessario che ogni determinante che si può formare simmetricamente per mezzo dei coefficienti relativi a una combinazione qualsiasi degli n conduttori, sia positivo; il numero di queste combinazioni è $2^n - 1$.

Ma si trova che soltanto n di queste combinazioni sono indipendenti.

I coefficienti di capacità e di induzione sono soggetti a condizioni della stessa forma.

89 b. *I coefficienti di potenziale sono tutti positivi, ma alcuni dei coefficienti p_{rs} non è superiore a p_{rr} o p_{ss} .*

Infatti, diamo ad A_r una carica uguale all'unità, con gli altri conduttori privi di carica. Si formerà un sistema di superfici equipotenziali, di cui una sarà la superficie di A_r e sarà al potenziale p_{rr} . Se A_s è posta in un foro cavo in A_r di modo da esserne completamente racchiuso, anche il suo potenziale sarà p_{rr} .

Se, al contrario, A_s è esterno a A_r , il suo potenziale p_{rs} sarà compreso tra p_{rr} e zero.

Consideriamo infatti le linee di forza partenti dal conduttore carico A_r . La sua carica è misurata dall'eccesso del numero di linee che partono da questo corpo sul numero di linee che vi

¹Si veda Williamson, *Calcolo differenziale*, 3^a ediz. p. 407.

finiscono. Pertanto, se il conduttore non è carico, il numero di linee di forza che penetrano nel conduttore è uguale al numero di linee che ne escono. Le linee che penetrano nel conduttore provengono dai punti in cui il potenziale è più alto; quelle che ne escono vanno verso i punti dove il potenziale è più basso. Pertanto il potenziale di un corpo non carico deve essere compreso tra il potenziale più alto e quello più basso che si incontrano nel campo, e, di conseguenza, i potenziali più alti e più bassi non possono essere quelli dei corpi non carichi.

Il potenziale più alto deve essere pertanto p_{rr} , cioè quello del corpo carico A_r ; il più basso deve essere quello del punto dello spazio posti a una distanza infinita, il quale è nullo; e tutti gli altri potenziali, come p_{rs} , devono essere compresi tra p_{rr} e zero.

89 c. *Nessuno dei coefficienti di induzione è positivo; e la somma di tutti quelli che sono relativi a uno stesso conduttore non può essere numericamente maggiore del coefficiente di capacità di questo conduttore, il quale è sempre positivo.*

Sia infatti A_r , mantenuto al potenziale 1, mentre tutti gli altri conduttori sono mantenuti al potenziale zero; la carica di A_r è q_{rr} e quella di un altro conduttore A_s è q_{rs} .

Il numero di linee di forza che escono da A_r è q_{rr} . Di queste linee, le une finiscono sugli altri conduttori, le altre si estendono all'infinito; ma alcune di esse non possono unire due degli altri conduttori, o andare da uno di essi all'infinito, poiché esse sono tutte al potenziale zero.

Nessuna linea di forza può provenire da uno degli altri conduttori, come A_s , poiché nessun punto del campo ha un potenziale inferiore a quello di A_s . Se A_s è completamente separato da A_r dalla superficie chiusa di uno dei conduttori, q_{rs} è nullo. Se A_s non è completamente separato, q_{rs} è una quantità negativa.

Se uno dei conduttori A_t circonda completamente A_r , tutte le linee di forza partenti da A_r incontrano A_t e i conduttori che esso racchiude, e la somma dei coefficienti di induzione di questi conduttori, rispetto a A_r , sarà q_{rr} con il segno contrario. Ma, se A_r non è completamente circondato da un conduttore, la somma dei coefficienti $q_{rs}...$ sarà inferiore a q_{rr} .

Abbiamo dedotto questi due teoremi indipendentemente dalle considerazioni sull'elettricità. Lasciamo al lettore la premura di determinare se uno è una conseguenza matematica dell'altro.

89 d. Quando non vi sono conduttori nel campo, il suo coefficiente di potenziale su se stesso è l'inverso della sua capacità.

Si chiama *centro elettrico del conduttore* il centro di massa della sua carica, quando non vi sono punti di azione esterni. Se il conduttore è simmetrico attorno a un centro della figura, questo punto è il centro elettrico. Se le dimensioni del conduttore sono piccole in confronto alle distanze considerate, la posizione del centro elettrico può essere valutata con una sufficiente precisione.

Il potenziale a una distanza c dal centro elettrico, deve essere compresa tra

$$\frac{e}{c} \left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) \quad e \quad \frac{e}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{c^2}\right)$$

dove e è la carica, e a è la massima distanza di ogni parti della superficie del corpo dal centro elettrico.

Infatti, se la carica è concentrata in due punti, alle distanze a da una parte e dall'altra del centro elettrico, la prima di queste espressioni è il potenziale di un punto della linea che unisce le cariche; e la seconda espressione è il potenziale di un punto della linea perpendicolare alla linea che unisce le cariche. Per tutte le altre distribuzioni, comprese all'interno di una sfera di raggio a , il potenziale è compreso tra questi due valori.

Se vi sono due conduttori nel campo, il coefficiente di potenziale dell'uno sull'altro è $\frac{1}{c'}$, dove c' non può differire da c , distanza tra i due centri elettrici, più di $\frac{a^2+b^2}{c^2}$, essendo a e b le distanze massime da un punto di ogni superficie al centro elettrico.

89 e. Se un nuovo conduttore è introdotto nel campo, il coefficiente di potenziale di uno qualsiasi degli altri su di lui diminuisce.

Infatti, supponiamo dapprima che il nuovo corpo B sia non conduttore e non abbia carica in alcuno dei suoi punti. Allora, se uno dei conduttori A_1 riceve una carica e_1 , la distribuzione di

elettricità sui conduttori del sistema non sarà alterata da B , poiché B non ha sempre carica; e l'energia elettrica del sistema sarà semplicemente

$$\frac{1}{2}e_1V_1 = \frac{1}{2}e_1^2p_{11}$$

Supponiamo ora che B divenga un conduttore; elettricità fluirà dai punti dove il potenziale è più alto a quello dove è più basso; e, ciò facendo, essa diminuisce l'energia elettrica del sistema. La quantità $\frac{1}{2}e_1^2p_{11}$ deve quindi diminuire.

Ma e_1 resta costante, pertanto p_{11} deve diminuire.

Se quindi si aumenta B , mettendo un altro corpo b a contatto con esso, p_{11} diminuirà ancora.

Supponendo dapprima che vi sia comunicazione elettrica tra B e b , l'introduzione del nuovo corpo diminuirà p_{11} . Stabiliamo una comunicazione tra B e b . Se passa elettricità attraverso questo contatto, essa va dai punti a potenziale più alto a quelli dove è meno elevato e, di conseguenza, diminuisce ancora p_{11} , così come abbiamo detto.

Pertanto la diminuzione di p_{11} , prodotta dal corpo B , è maggiore di quella che produrrebbe ogni altro corpo la cui superficie può essere compresa in B , e più piccola di quella che produrrebbe ogni altro corpo la cui superficie può circondare B .

Mostriamo nel Capitolo XI che una sfera di diametro b essendo posta a una distanza r , il valore di p_{11} diminuisce di una quantità che è circa $\frac{1}{8}\frac{b^3}{r^4}$.

Pertanto, se il corpo B ha una forma qualunque, di cui b è la maggiore in diametro, la diminuzione di p_{11} sarà minore di $\frac{1}{8}\frac{b^3}{r^4}$.

Se quindi il maggior diametro di B è tanto piccolo in confronto alla distanza da A_1 , perché di possano trascurare le quantità dell'ordine di $\frac{1}{8}\frac{b^3}{r^4}$, possiamo ammettere che l'inverso della capacità di A_1 , posta solo nel campo, ci dà una approssimazione sufficiente del valore di p_{11} .

91 a. Supponiamo che la capacità di A_1 , solo nel mezzo del campo, sia K_1 , e che quella di A_2 sia K_2 ; sia r la distanza media tra A_1 e A_2 e ammettiamo che r sia molto grande in confronto alle dimensioni di A_1 e A_2 . Possiamo scrivere allora

$$p_{11} = \frac{1}{K_1} \quad p_{12} = \frac{1}{r} \quad p_{22} = \frac{1}{K_2}$$

$$V_1 = e_1K_1^{-1} + e_2r^{-1}$$

$$V_2 = e_1r^{-1} + e_2K_2^{-1}$$

Pertanto

$$q_{11} = K_1(1 - K_1K_2r^{-2})^{-1}$$

$$q_{12} = -K_1K_2(1 - K_1K_2r^{-2})^{-1}$$

$$q_{22} = K_2(1 - K_1K_2r^{-2})^{-1}$$

Di questi coefficienti, q_{11} e q_{12} sono le capacità di A_1 e A_2 , quando questi corpi, invece di essere soli e a una distanza infinita da ogni altro conduttore, sono messi in presenza a una distanza r l'uno dall'altro.

90 b. Quando due conduttori sono molto vicini perché i coefficienti di induzione dell'uno sull'altro sia considerevole, l'insieme di questi due è detto un *condensatore*.

Siano A e B i due conduttori o armature di un condensatore.

Siano L la capacità di A , N quella di B e M il coefficiente di induzione dell'uno sull'altro. (Dovremo ricordarci che M è essenzialmente negativo, di modo che il valore numerico di $L + M$ o di $M + N$ è inferiore a quello di $L + N$).

Supponiamo che a e b siano le armature di un altro condensatore posto a una distanza R dal primo, essendo R molto grande rispetto alle dimensioni di ognuno dei condensatori e siano l, m, n i coefficienti di capacità di induzione del condensatore ab , quando è solo. Calcoliamo l'effetto di uno di questi condensatori sui coefficienti dell'altro.

Poniamo

$$D = LN - M^2 \quad e \quad d = ln - m^2$$

I coefficienti di potenziale di ogni condensatore preso isolatamente saranno

$$\begin{aligned} p_{AA} &= D^{-1}N & p_{aa} &= d^{-1}n \\ p_{AB} &= D^{-1}M & p_{ab} &= d^{-1}m \\ p_{BB} &= D^{-1}L & p_{bb} &= d^{-1}l \end{aligned}$$

I valori dei coefficienti non sarà sensibilmente cambiato, se i due condensatori sono alla distanza R . Ora il coefficiente di potenziale di due conduttori qualsiasi posti alla distanza R è R^{-1} .

Pertanto

$$p_{Aa} = p_{Ab} = p_{Ba} = p_{Bb} = R^{-1}$$

Le equazioni ai potenziali saranno

$$\begin{aligned} V_A &= D^{-1}Ne_A - D^{-1}Me_B + R^{-1}e_a + R^{-1}e_b \\ V_B &= -D^{-1}Me_A + D^{-1}Le_B + R^{-1}e_a + R^{-1}e_b \\ V_a &= R^{-1}e_A + R^{-1}e_B + d^{-1}ne_a - d^{-1}me_b \\ V_b &= R^{-1}e_A + R^{-1}e_b - d^{-1}me_a + d^{-1}le_b \end{aligned}$$

Risolvendo queste equazioni rispetto alle cariche, troviamo

$$\begin{aligned} q_{AA} &= L' = L + \frac{(L+M)^2(l+2m+n)}{R^2 - (L+2M+N)(l+2m+n)} \\ q_{AB} &= M' = M + \frac{(L+M)(M+N)(l+2m+n)}{R^2 - (L+2M+N)(l+2m+n)} \\ q_{Aa} &= -\frac{R(L+M)(l+m)}{R^2 - (L+2M+N)(l+2m+n)} \\ q_{Ab} &= -\frac{R(L+M)(m+n)}{R^2 - (L+2M+N)(l+2m+n)} \end{aligned}$$

dove L', M', N' sono ciò che diventano L, M, N quando il secondo condensatore è introdotto nel campo.

Se si introduce nel campo un solo condensatore a , $m = n = 0$, e

$$\begin{aligned} q_{AA} &= L' = L + \frac{(L+M)^2l}{R^2 - l(L+2M+N)} \\ q_{AB} &= M' = M + \frac{(L+M)(M+N)l}{R^2 - l(L+2M+N)} \\ q_{Aa} &= -\frac{Rl(L+M)}{R^2 - l(L+2M+N)} \end{aligned}$$

Se vi sono solo due condensatori semplici A e a ,

$$M = N = m = n = 0$$

e

$$q_{AA} = L + \frac{L^2l}{R^2 - Ll} \quad q_{Aa} = -\frac{RLl}{R^2 - Ll}$$

espressioni simili a quelle trovare nel § 90.

La quantità $L + 2M + N$ è la carica totale del condensatore, quando le sue armature sono entrambi al potenziale 1. Essa non può essere superiore alla metà del più grande diametro del condensatore.

$L + M$ è la carica della prima armatura, $M + N$ quella della seconda, quando entrambe sono al potenziale 1. Queste quantità devono essere entrambe positive e inferiori alla capacità dell'armatura presa da sola. Di conseguenza, le correzioni da apportare sui coefficienti di potenziale sono assai minori per un condensatore che per un conduttore semplice della stessa capacità.

Approssimazioni di questo tipo sono spesso utili per valutare la capacità di conduttori di forma irregolare, posti a una distanza finita da altri conduttori.

91. Quando un conduttore rotondo A_3 di piccole dimensioni in confronto alla distanza dei conduttori, è introdotto in un campo, il coefficiente di potenziale di A_1 su A_2 aumenta se A_3 è all'interno di una sfera avente per diametro la linea retta A_1A_2 ; diminuisce se A_3 è esterno a questa sfera.

Infatti, se A_1 riceve l'unità di carica, vi sarà su A_1 una distribuzione di elettricità, dove $+e$ sarà dalla parte più lontana di A_1 e $-e$ dal lato più vicino. Il potenziale su A_2 , dovuto a questa

distribuzione di A_3 sarà positivo o negativo, secondo $+e$ o $-e$ è più vicino a A_2 ; e se la forma di A_3 non è molto lontana, questa posizione dipenderà dal sapere se l'angolo $A_1A_2A_3$ è acuto o ottuso, cioè se A_3 è esterno o interno alla sfera di raggio A_1A_2 .

Se A_2 ha una forma allungata, è facile vedere che se ha il suo diametro più lungo diretto lungo la tangente al cerchio passante per i punti A_1, A_2, A_3 esso può aumentare il potenziale di A_2 , quand'anche sarà interamente esterno alla sfera; e se il suo diametro più lungo è diretto lungo il raggio della sfera, può diminuire il potenziale su A_2 , anche quando sarà interamente interno alla sfera. Ma questa proposizione è destinata solo a dare un'idea grossolana dei fenomeni che ai quali ci si deve aspettare per una data disposizione strumentale.

92. Se un nuovo conduttore A_3 è introdotto nel campo, le capacità di tutti i conduttori che vi erano già aumentano e il valore numerico del coefficiente di induzione relativo a ogni coppia di conduttori diminuisce.

Supponiamo che A_1 sia al potenziale 1, e tutti gli altri al potenziale zero. Poiché la carica del nuovo conduttore è negativa, essa indurrà una carica positiva su tutti gli altri conduttori: di conseguenza, la carica positiva di A_1 aumenterà, e la carica negativa di tutti gli altri conduttori diminuirà.

Lavoro delle forze elettriche durante lo spostamento di un sistema di conduttori isolati e carichi. 93 a. Poiché i conduttori sono isolati, le loro cariche rimangono costanti durante lo spostamento. Siano V_1, V_2, \dots, V_n i potenziali prima e V'_1, V'_2, V'_3 dopo lo spostamento. L'energia elettrica prima dello spostamento è

$$W = \frac{1}{2} \sum (eV)$$

e, dopo lo spostamento,

$$W' = \frac{1}{2} \sum (eV')$$

Il lavoro delle forze elettriche, durante lo spostamento, è uguale all'eccesso dell'energia elettrica iniziale W sull'energia finale W' , cioè

$$W - W' = \frac{1}{2} \sum e(V - V')$$

Questa espressione dà il lavoro compiuto durante lo spostamento, grande o piccolo, di un sistema isolato.

Per trovare la forza che tende a produrre uno spostamento di una specie particolare, chiamiamo ϕ la variabile la cui variazione corrisponde a questo tipo di spostamento, e Φ la forza corrispondente, contata positivamente quando la forza elettrica tende a far crescere ϕ ; allora

$$\Phi d\phi = -dW_e$$

o

$$\Phi = -\frac{dW_e}{d\phi}$$

dove W_e rappresenta l'energia elettrica espressa come funzione quadratica delle cariche.

93 b. Dimostrare che

$$\frac{dW_e}{d\phi} + \frac{dW_V}{d\phi} = 0$$

Abbiamo tre espressioni differenti dell'energia del sistema:

$$1^a \quad W = \frac{1}{2} \sum (eV)$$

funzione definita di n cariche e di n potenziali;

$$2^a \quad W_e = \frac{1}{2} \sum \sum (e_e e_s p_{rs})$$

dove r e s possono essere gli stessi o diversi, e dove rs o sr deve essere compresi entrambi nella somma. Questa è una funzione di n cariche e di variabili che definiscono la configurazione del sistema. Sia ϕ una di queste variabili;

$$3^a \quad W_V = \frac{1}{2} \sum \sum (V_r V_s q_{rs})$$

dove la sommatoria deve essere fatta come prima. Questa è una funzione di n potenziali e di variabili che definiscono la configurazione del sistema; ϕ è una di esse.

Poiché

$$\begin{aligned} W &= W_e = W_V \\ W_e + W_V - 2W &= 0 \end{aligned}$$

Se supponiamo per le n cariche, per gli n potenziali e per ϕ variazioni compatibili, dovremo avere

$$\sum \left[\left(\frac{dW_e}{de_r} - V_r \right) \delta e_r \right] + \sum \left[\left(\frac{dW_V}{dV_s} - e_s \right) \delta V_s \right] + \left(\frac{dW_e}{d\phi} + \frac{dW_V}{d\phi} \right) \delta \phi = 0$$

Ora le n cariche, gli n potenziali e ϕ non sono tutti indipendenti tra loro; vi sono solo $n+1$ di queste quantità che possono essere indipendenti. Ma abbiamo già dimostrato che

$$\frac{dW_e}{de_r} = V_r$$

e infine che

$$\frac{dW_V}{dV_s} = e_s$$

e infine che

$$\frac{dW_e}{d\phi} + \frac{dW_V}{d\phi} = 0$$

Lavoro delle forze elettriche durante lo spostamento di un sistema i cui potenziali sono mantenuti costanti. 93 c. Dall'ultima equazione, risulta che la forza $\Phi = \frac{dW_V}{d\phi}$ e se il sistema è spostato, sotto la condizione che i potenziali restano costanti, il lavoro delle forze elettriche è

$$\int \Phi d\phi = \int dW_V = W'_V - W_V$$

cioè che, in questo caso, il lavoro delle forze elettriche è uguale all'*incremento* dell'energia elettrica.

Qui, abbiamo quindi un aumento dell'energia insieme con una quantità di lavoro compiuto dal sistema. Serve quindi che il sistema riceva dell'energia da una sorgente esterna, come una pila voltaica, per mantenere i potenziali costanti durante lo spostamento.

Il lavoro compiuto dalla pila è quindi uguale alla somma del lavoro del sistema e dell'aumento di energia; o, poiché questi due termini sono uguali, il lavoro della pila è uguale al doppio del lavoro del sistema di conduttori durante il suo spostamento.

Confronti di sistemi elettrizzati simili. 94. Se due sistemi elettrizzati sono simili, nel senso geometrico del termine, e le lunghezze delle linee corrispondenti dei due sistemi stanno tra loro come L sta a L' ; e se il dielettrico che separa i corpi conduttori è lo stesso nei due sistemi, i coefficienti di induzione e di capacità saranno nel rapporto di L a L' . Infatti, consideriamo delle parti A e A' corrispondenti nei due sistemi; siano e ed e' le quantità di elettricità su A e su A' ; i potenziali dovuti a queste cariche saranno, per dei punti corrispondenti B e B' ,

$$V = \frac{e}{AB} \quad V' = \frac{e'}{A'B'}$$

Ma, poiché AB sta a $A'B'$ come L sta a L' , dobbiamo avere

$$\frac{e}{e'} = \frac{LV}{L'V'}$$

Se il potere induttore specifico del dielettrico non lo stesso nei due sistemi, e che sia K nel primo e K' nel secondo; se il potenziale in un punto del primo sistema sta al potenziale

nel punto corrispondente del secondo sistema come V sta a V' e se le quantità di elettricità distribuite sulle parti corrispondenti stanno tra loro come E sta a E' , avremo

$$\frac{e}{e'} = \frac{LVK}{L'V'K'}$$

Per mezzo di questa relazione, possiamo trovare le cariche totali delle parti corrispondenti nei due sistemi che: 1° sono geometricamente simili; 2° sono formati da dielettrici i cui poteri induttori specifici nei punti corrispondenti stanno nel rapporto di K a K' ; 3° sono elettrizzati in modo che i potenziali dei punti corrispondenti stiano tra loro nel rapporto di V a V' .

Da ciò risulta che, se q è un coefficiente di capacità o di induzione del primo sistema e q' il corrispondente del secondo sistema

$$\frac{q}{q'} = \frac{LK}{L'K'}$$

e se p e p' rappresentano due coefficienti di potenziali corrispondenti nei due sistemi

$$p : p' = \frac{1}{LK} : \frac{1}{L'K'}$$

Se uno dei corpi è spostato nel primo sistema e se i corpi corrispondenti del secondo sistema ricevono uno spostamento simile, questi spostamenti stanno nel rapporto di L a L' ; e se le forze agenti stanno nel rapporto di F a F' , i lavori compiuti nei due sistemi stanno tra loro come FL sta a $F'L'$.

Ma l'energia elettrica totale è la semisomma dei prodotti delle cariche per i potenziali dei corpi carichi; di modo che se, nei sistemi simili, W e W' sono le energie elettriche totali dei due sistemi

$$\frac{W}{W'} = \frac{eV}{e'V'}$$

e la differenza di energia, dopo spostamenti simili nei due sistemi, starà nello stesso rapporto. Pertanto, se FL è proporzionale al lavoro elettrico compiuto durante lo spostamento,

$$\frac{FL}{F'L'} = \frac{eV}{e'V'}$$

Combinando queste proporzioni, troviamo per il rapporto tra la forza risultante agente su un corpo del primo sistema e la forza risultante agente sul corpo corrispondente del secondo sistema

$$\frac{F}{F'} = \frac{V^2K}{V'^2K'}$$

o

$$F : F' = \frac{e^2}{L^2K} : \frac{e'^2}{L'^2K'}$$

La prima di queste proporzioni mostra che, nei sistemi simili, la forza è proporzionale al quadrato della forza elettromotrice e al potere induttore, ma che non dipende dalle dimensioni lineari del sistema.

Pertanto, due conduttori posti in un liquido la cui capacità induttiva è più grande di quella dell'aria, e elettrizzati a potenziali dati, si attireranno più di quanto non avrebbero fatto nell'aria, essendo elettrizzati allo stesso potenziale.

La seconda proporzione mostra che, se la quantità di elettricità è data per ogni corpo, le forze sono in ragione diretta del quadrato delle cariche, e in ragione inversa del quadrato della distanza e del semplice potere induttore del mezzo.

Pertanto, se due conduttori, aventi cariche date, sono posti in un liquido il cui potere induttore è maggiore di quello dell'aria, essi si attireranno meno che se fossero circondati di aria e carichi delle stesse quantità di elettricità.

Teoremi generali

95a. Nel Capitolo II, abbiamo calcolato la funzione potenziale e studiato alcune delle sue proprietà, partendo dall'ipotesi, che esiste tra i corpi elettrizzati un'azione diretta a distanza, risultante dalle azioni dirette che si esercitano tra le diverse parti elettrizzate dei corpi.

Se si chiama metodo di ricerca diretta uno studio così fatto, il metodo inverso consisterà nell'ammettere che il potenziale è una funzione caratterizzata da queste stesse proprietà che abbiamo già stabilito e ricercare la forma di queste funzioni.

Nel metodo diretto, il potenziale si calcola per integrazione, conoscendo la distribuzione dell'elettricità; e si trova che soddisfa a certe equazioni differenziali parziali. Nel metodo inverso, si suppongono date le equazioni differenziali parziali, e si deve trovare il potenziale e la distribuzione dell'elettricità.

Solo nei problemi in cui la distribuzione è data che si può usare il metodo diretto. Quando si tratta di trovare la distribuzione su un conduttore, si è obbligati a ricorrere al metodo inverso.

Mostreremo che in tutti i casi, il metodo inverso porta a risultati determinati, e stabiliremo certi teoremi generali dedotti dall'equazione differenziale parziale di Poisson:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + 4\pi\rho = 0$$

Le idee matematiche, espresse da questa equazione, sono di una natura del tutto diversa da quelle che esprime l'integrale definito

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{r} dx' dy' dz'$$

Nell'equazione differenziale, esprimiamo che la somma delle derivate seconde di V , nelle vicinanze di un punto P , è legata in un certo modo alla densità di questo punto; ma non esprimiamo una relazione tra il valore di V in questo punto e il valore di ρ in un punto a una distanza finita dal primo.

Al contrario, nell'integrale definito, la distanza dal punto (x', y', z') , per il quale si ha ρ , nel punto (x, y, z) , per il quale si ha V , è indicato da r e intervengono esplicitamente nell'espressione da integrare.

L'integrale è quindi la forma matematica che conviene per la teoria di un'azione che si esercita a distanza tra le molecole, mentre l'equazione differenziale è l'espressione che conviene per la teoria di un'azione che si esercita tra le parti contigue di un mezzo.

Abbiamo visto che il risultato dell'integrazione soddisfa l'equazione differenziale; dobbiamo ora mostrare che è la sola soluzione di questa equazione che soddisfa a certe condizioni.

In questo modo, non solo stabiliremo l'equivalenza matematica delle due espressioni, ma anche prepareremo la nostra mente a passare dalla teoria di un'azione diretta a distanza, a quella di un'azione tra le parti contigue di un mezzo.

95b. I teoremi considerati nel Capitolo sono relativi alle proprietà di certi integrali di volume presi sull'estensione di una regione finita dello spazio che indicheremo con il nome di *campo elettrico*.

L'elemento di questi integrali, cioè la quantità sotto il segno di \int , è ora il quadrato di un certo vettore il cui modulo e direzione variano da un punto all'altro del campo; ora il prodotto di un vettore per la componente di un altro vettore lungo la direzione del primo.

Dei diversi modi di cui una quantità vettoriale può essere distribuita nello spazio, due sono di importanza particolare.

Il primo caso è quello dove il vettore può essere rappresentato dalla variazione nello spazio (§ 17) di una quantità scalare detta il *potenziale*.

Una tale distribuzione della forza risultante dovuta alla combinazione di un certo numero di centri di forza, la cui legge di attrazione o di repulsione è una funzione data della distanza.

Il secondo modo di distribuzione è quello dove la convergenza (§ 25) è nulla in tutti i punti. Questa distribuzione può essere chiamata *solenoidale*: la velocità di un fluido incomprimibile ha una distribuzione solenoidale.

Se le forze centrali, le quali, abbiamo detto, determinano una distribuzione irrotazionale della forza risultante, variano in ragione inversa del quadrato della distanza, e se i centri sono esterni al campo, la distribuzione nel campo è contemporaneamente solenoidale e irrotazionale.

Se il movimento di un fluido incomprimibile, che è solenoidale, così come abbiamo detto, è prodotto da forze centrali dipendenti dalla distanza, o da pressioni superficiale che si esercitano su un fluido senza attrito o inizialmente a riposo, la distribuzione della velocità è irrotazionale così come solenoidale.

Quando andremo a rappresentare una distribuzione sia irrotazionale che solenoidale, la indicheremo con il nome di *distribuzione di Laplace*, avendo Laplace segnalato alcune delle proprietà più importanti di una tale distribuzione.

Gli integrali di volume discussi in questo Capitolo sono, come vedremo, espressioni dell'energia del campo elettrico. Nel primo gruppo di teoremi, che inizia dal teorema di Green, l'energia è espressa in funzione dell'intensità elettromotrice, vettore la cui distribuzione è irrotazionale nel caso di equilibrio elettrico. E si fa vedere che, essendo dato il potenziale sulla superficie, di tutte le distribuzioni irrotazionali, quella che è anche solenoidale ha un'energia minima: da cui segue che vi può essere una sola distribuzione di Laplace compatibile con un sistema di potenziali sulla superficie data.

Nel secondo gruppo di teoremi, che comprende il teorema di Thomson, l'energia è espressa in funzione dello spostamento elettrico, vettore la cui distribuzione è solenoidale. E si fa vedere che, se le cariche delle superfici sono date, di tutte le distribuzioni sinusoidali, quella che ha l'energia minima è anche irrotazionale; quindi può esistere una sola distribuzione di Laplace compatibile con il sistema di cariche date.

La dimostrazione di tutti questi teoremi è condotta nello stesso modo. Per evitare ripetizioni, ogni volta che si dovrà passare per un'integrazione di superficie fatta in coordinate rettangolari, faremo uso del risultato del teorema III, § 21, dove è stata studiata completamente la relazione di un integrale di volume e dell'integrale di superficie corrispondente. Tutto ciò che dovremo dare sarà quindi sostituire in questo teorema a X, Y, Z le componenti del vettore dal quale dipende il teorema particolare considerato.

Nella prima edizione di questo libro, l'enunciato di ogni teorema era appesantito da una moltitudine di condizioni alternative; l'obiettivo era mostrare la generalità del teorema e la varietà dei casi ai quali lo si poteva applicare; in effetti, essi producevano piuttosto confusione, nella mente del lettore, su quella che era l'ipotesi e quanto bisognava dimostrare.

Questa volta, ogni teorema è dapprima enunciato in forma meno estesa, ma meglio definita, e poi in seguito si mostra a quale grado di generalità corrisponde.

Finora, abbiamo impiegato il simbolo V per il potenziale, e continueremo così, fintanto che ci occuperemo di elettrostatica. Ma, in questo Capitolo e nelle parti del secondo Volume dove il potenziale elettrico si ritrova nelle indagini elettromagnetiche, impiegheremo il simbolo Ψ per indicare specialmente il potenziale elettrico.

Teorema di Green. 96a. L'importante teorema che segue è stato dato da George Green nella sua "*Essay in the Application of Mathematics to Electricity and Magnetism*".

Questo teorema è relativo allo spazio limitato da una superficie chiusa s , spazio che chiameremo il *campo*. Sia ν la normale tracciata dalla superficie s verso l'interno del campo e siano

l, m, n i coseni direttori di questa normale; allora

$$(4.0.1) \quad l \frac{d\Psi}{dx} + m \frac{d\Psi}{dy} + n \frac{d\Psi}{dz} = \frac{d\Psi}{d\nu}$$

sarà la variazione della funzione Ψ , quando si avanza lungo la normale ν . È inteso che si prenderà il valore di $\frac{d\Psi}{d\nu}$ sulla superficie stessa, dove $\nu = 0$. Poniamo, come al §26 e § 77,

$$(4.0.2) \quad \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} = -\nabla^2\Psi$$

e, se vi sono due funzioni Ψ e Φ , poniamo

$$(4.0.3) \quad \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dy} \frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Phi}{dz} = -S. \nabla\Psi \nabla\Phi$$

Il lettore che non ha familiarità con il metodo dei quaternioni può, se vuole, interpretare le espressioni $\nabla^2\Psi$ e $S. \nabla\Psi \nabla\Phi$ come fossero semplicemente delle abbreviazioni convenzionali per le espressioni alle quali si devono uguagliare; e, siccome si impiegheranno nel seguito solo i metodi cartesiani comuni, non è necessario richiamare l'interpretazione di queste espressioni nella teoria dei quaternioni. La ragione per la quale impieghiamo come abbreviazioni queste espressioni, e non singole lettere arbitrariamente scelte, è che nel linguaggio dei Quaternioni esse rappresentano pienamente le quantità da eguagliare. L'operatore ∇ applicato alla funzione scalare Ψ dà la variazione spaziale di questa funzione e l'espressione $S. \nabla\Psi \nabla\Phi$ è la parte scalare del prodotto di due variazioni spaziali, o il prodotto di una di queste variazioni per la componente dell'altra lungo la sua direzione. L'espressione $\frac{d\Psi}{d\nu}$ si scrive comunemente nei quaternioni $S. U_\nu \nabla\Phi$, essendo U_ν un vettore unitario nella direzione della normale. Non sembra esservi grande vantaggio nell'impiego qui di questa notazione; ma troveremo questo vantaggio quando parleremo dei mezzi non isotropi.

Enunciato del teorema di Green. Siano Ψ e Φ due funzioni di x, y, z che sono, così come le loro derivate, finite e continue in una certa regione aciclica ς limitata da una superficie chiusa s . Allora

$$(4.0.4) \quad \iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds - \iiint \Psi \nabla^2\Phi ds = \iiint S. \nabla\Psi \nabla\Phi = \iint \Phi \frac{d\Psi}{d\nu} ds - \iiint \Phi \nabla^2\Psi ds$$

dove gli integrali doppi devono essere estesi a tutta la superficie s , e gli integrali tripli a tutto il campo ς limitato da questa superficie.

Per stabilire questa proposizione, poniamo, come al § 21, teorema III,

$$(4.0.5) \quad X = \Psi \frac{d\Phi}{dx} \quad Y = \Psi \frac{d\Phi}{dy} \quad Z = \Psi \frac{d\Phi}{dz}$$

Allora

$$(4.0.6) \quad R \cos \epsilon = \Psi \left(l \frac{d\Phi}{dx} + m \frac{d\Phi}{dy} + n \frac{d\Phi}{dz} \right) = \Psi \frac{d\Phi}{d\nu}$$

per la (4-1) e

$$(4.0.7) \quad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = \Psi \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} \right) + \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dy} \frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Phi}{dz} =$$

$$= -\Psi \nabla^2\Phi - S. \nabla\Psi \nabla\Phi$$

per la (4-2) e (4-3).

Dal Teorema III

$$\iint R \cos \epsilon ds = - \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) d\varsigma$$

e dalla (4-6) e (4-7)

$$(4.0.8) \quad \iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds - \iiint \Psi \nabla^2\Phi ds = \iiint S. \nabla\Psi \nabla\Phi ds$$

e poiché, nel secondo membro di questa equazione, possiamo scambiare Ψ con Φ , possiamo farlo anche nel primo membro, e otteniamo così l'enunciato completo del teorema di Green dato nella (4-4).

96b. Dobbiamo ora mostrare che il teorema di Green è ancora vero, se una delle funzioni, ad esempio Ψ , è multiforme, purché le sue derivate prime siano uniformi e finite all'interno della regione aciclica ς .

Poiché $\nabla\Psi$ e $\nabla\Phi$ sono uniformi, il secondo membro della (4-4) è uniforme; e poiché Ψ è uniforme, un elemento qualunque del primo membro, come $\Psi\nabla^2\Phi$, è multiforme. Ma, se per un punto A compreso nella regione ς scegliessimo uno dei diversi valori di Ψ , cioè Ψ_0 , il valore di Ψ sarà definito in ogni altro punto P . Essendo il valore scelto di Ψ continuo nella regione, il valore di Ψ nel punto P dovrà essere quello che si ottiene da una variazione continua lungo un contorno qualsiasi che va da A a P , partendo in A dal valore di Ψ_0 . Se i valori in P fossero differenti per due contorni che vanno da A a P , questi contorni dovranno comprendere tra loro una curva chiusa lungo la quale le derivate prime di Ψ divengono infinite. Ciò è contrario all'ipotesi, poiché le derivate prime non divengono infinite nella regione ς , e la curva chiusa è interamente al di fuori della regione; e, poiché la regione è aciclica, due contorni compresi nella regione, non possono rinchiudere nulla che sia esterno alla regione.

Pertanto, se si assegna Ψ_0 come valore di Ψ nel punto A , il valore in P è determinato.

Se si era scelto per valore in A un altro valore di Ψ , cioè $\Psi_0 + nK$, il valore in P sarebbe stato $\Psi + nK$. Ma il valore del primo membro dell'equazione (4-4) sarebbe rimasto lo stesso di prima, poiché il cambiamento torna ad aumentare il primo membro di

$$nK \left[\iint \frac{d\Phi}{d\nu} ds - \iiint \nabla^2\Phi d\varsigma \right]$$

che è uguale a zero secondo il teorema III.

96c. Se la regione ς ha connessione doppie o multiple, la si può riportare ad essere aciclica, chiudendo ognuno dei suoi circuiti con un diaframma.

Siano s_1 uno di questi diaframmi e K_1 la costante aciclica corrispondente, cioè la quantità di cui cresce Ψ , quando si descrive una volta il circuito andando nel verso positivo. Poiché la regione ς si estende dalle due parti del diaframma s_1 , ogni elemento di s_1 apparirà due volte nell'integrale di superficie.

Se supponiamo la normale ν_1 tracciata dal lato positivo di ds_1 e ν_1 tracciata dal lato negativo,

$$\frac{d\Phi}{d\nu'_1} = -\frac{d\Phi}{d\nu_1}$$

e

$$\Psi'_1 = \Psi_1 + K_1$$

in modo che l'elemento dell'integrale di superficie corrispondente a ds_1 sarà

$$\Psi_1 \frac{d\Phi}{d\nu_1} ds_1 + \Psi'_1 \frac{d\Phi}{d\nu'_1} ds_1 = -K_1 \frac{d\Phi}{d\nu_1} ds_1$$

Se quindi la regione s ha connessioni multiple, il primo membro della (4-4) si dovrà scrivere

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds - K_1 \iint \frac{d\Phi}{d\nu_1} ds_1 - \dots - K_n \iint \frac{d\Phi}{d\nu_n} ds_n - \iiint \Psi \cdot \nabla^2\Phi d\varsigma$$

dove il primo integrale di superficie è preso sulla superficie limite, e i seguenti sui diversi diaframmi, essendo ogni elemento di un diaframma contato una volta, ed essendo la normale tracciata nel verso positivo del circuito.

La necessità di tale modifica del teorema nel caso di superfici a connessioni multiple è stata segnalata da Helmholtz¹ e la modifica fatta da Thomson².

¹Sugli integrali di equazioni di Idrodinamica che si presentano nel moto turbolento (*Journ. de Crelle*, 1858, Tradotto da Tait, *Phil. Mag.*, 1867 (I))

²Sul moto turbolento (*Trans. Roy. Soc. Edin.*, t. XXV, parte I, p. 241, 1867)

96d. Supponiamo ora, con Green, che una delle funzioni, sia Φ , non soddisfi la condizione di restare finita, così come le sue derivate, all'interno della regione data; ma che essa divenga infinita nel punto P , e in questo punto soltanto della regione, e che vicino a P il valore di Φ sia $\Phi_0 + \frac{e}{r}$, dove Φ_0 è una quantità finita e continua e r è la distanza dal punto P . Questo sarà il caso, se Φ è il potenziale: 1° di una quantità di elettricità e concentrata nel punto P ; e 2° di una quantità di elettricità distribuita in modo che la sua densità di volume non sia infinita in alcun punto della regione considerata.

Supponiamo ora una sfera molto piccola, di raggio a , avente il punto P come centro; allora, nella regione esterna alla sfera, e interna alla superficie s , Φ non presenta singolarità e si può applicare il teorema di Green, ricordandosi che bisogna tener conto della superficie della piccola sfera quando si prende l'integrale di superficie.

Per prendere l'integrale di volume, si sottrarrà dall'integrale corrispondente al volume dell'intera regione quello che corrisponde al volume della piccola sfera.

Ma, per questa sfera,

$$\iiint \Phi \cdot \nabla^2 \Psi \cdot dx dy dz$$

non può essere numericamente maggiore di

$$(\nabla^2 \Psi)_g \iiint \Phi dx dy dz$$

o

$$(\nabla^2 \Psi)_g \left\{ 2\pi e a^2 + \frac{4}{3} \pi a^3 \Phi_0 \right\}$$

dove l'indice g applicato a una quantità indicante i più grandi tra i valori numerici di questa quantità all'interno della sfera.

Questo integrale di volume è quindi dell'ordine di a^2 , e può essere trascurato quando a decresce e finisce per annullarsi.

L'altro integrale di volume

$$\iiint \Psi \nabla^2 \Phi dx dy dz$$

non può essere numericamente maggiore di

$$\Psi_g (\nabla^2 \Phi_0)_g \frac{4}{3} \pi a^3$$

esso è quindi dell'ordine di a^2 e può essere trascurato quando a si annulla.

L'integrale di superficie

$$\iint \Phi \frac{d\Psi}{d\nu} ds$$

non può essere numericamente maggiore di

$$\Phi_g \iint \frac{d\Psi}{d\nu} ds$$

Ora, dal Teorema III

$$\iint \frac{d\Psi}{d\nu} ds = - \iiint \nabla^2 \Psi dx dy dz$$

e questo non può essere numericamente maggiore di

$$(\nabla^2 \Psi)_g \frac{4}{3} \pi a^3$$

e Φ_g alla superficie è approssimativamente $\frac{e}{a}$, così che

$$\iint \Phi \frac{d\Psi}{d\nu} ds$$

non può essere numericamente maggiore di

$$\frac{4}{3}\pi a^2 e (\nabla^2 \Psi)_g$$

ed è pertanto dell'ordine di a^2 , e può essere trascurato quando a si annulla.

Ma l'integrale di superficie che è nel secondo membro dell'equazione

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds$$

non si annulla, poiché

$$\iint \frac{d\Phi}{d\nu} ds = -4\pi e$$

e, se Ψ_0 è il valore di Ψ nel punto P ,

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds = -4\pi e \Psi_0$$

L'equazione (4-4) diviene pertanto, in questo caso,

$$(4.0.9) \quad \iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds - \iiint \Psi \nabla^2 \Phi ds - 4\pi e \Psi_0 = \iint \Phi \frac{d\Psi}{d\nu} ds - \iiint \Phi \nabla^2 \Psi ds$$

97a. Possiamo applicare questo caso del teorema di Green, così come fatto dallo stesso Green, alla determinazione della densità superficiale in una distribuzione che produce un potenziale i cui valori sono dati dall'interno all'esterno di una superficie chiusa data. Questi valori devono confondersi sulla superficie; all'interno della superficie, si deve avere $\nabla^2 \Psi = 0$ e all'esterno $\nabla^2 \Psi' = 0$

Green inizia con il metodo diretto, cioè che, essendo data la distribuzione della densità superficiale σ , trova i potenziali in un punto interno P e in un punto esterno P' , integrando le espressioni

$$(4.0.10) \quad \Psi_P = \iint \frac{\sigma}{r} ds \quad \Psi_{P'} = \iint \frac{\sigma}{r'} ds$$

dove r e r' sono misurati dai punti P e P' rispettivamente.

Sia ora $\Phi = \frac{1}{r}$. Applicando il teorema di Green allo spazio interno alla superficie, e ricordando che $\nabla^2 \Phi = 0$ e che $\nabla^2 \Psi = 0$, si trova

$$(4.0.11) \quad \iint \Psi \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} ds - 4\pi \Psi_P = \iint \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{d\nu} ds$$

dove Ψ_P è il valore di Ψ nel punto P .

Ancora, se applichiamo il teorema allo spazio compreso tra la superficie s e una superficie che la circonda a una distanza infinita a , la parte dell'integrale di superficie corrispondente a quest'ultima superficie sarà dell'ordine di $\frac{1}{a}$ e potrà essere trascurata; e si avrà

$$(4.0.12) \quad \iint \Psi \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} ds = \iint \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{d\nu} ds$$

Ora, $\Psi = \Psi'$ alla superficie, e poiché le normali ν e ν' sono tracciate in sensi inversi

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} + \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu'} = 0$$

Pertanto, sommando le (4-10) e (4-11), i secondi membri si determinano l'un l'altro e si ha

$$(4.0.13) \quad -4\pi \Psi_P = \iint \frac{1}{r} \left(\frac{d\Psi}{d\nu} + \frac{d\Psi}{d\nu'} \right) ds$$

97b. Green ha pure dimostrato che, se si assegna arbitrariamente il valore del potenziale in ogni punto di una superficie chiusa s , si può determinare il potenziale in un punto qualunque interno o esterno alla superficie.

A tale scopo, suppose una funzione Φ , tale che il suo valore sia: vicino al punto P , sensibilmente uguale a $\frac{1}{r}$; e, alla superficie, uguale a zero; e che $\nabla^2\Phi = 0$ per ogni punto interno alla superficie.

Green dimostra l'esistenza di una simile funzione con questa considerazione fisica che, se s è una superficie conduttrice collegata a terra, e se l'unità di elettricità è posta nel punto P , il potenziale all'interno di s dovrà soddisfare alle condizioni imposte. Essendo s a terra, il potenziale sarà nullo in tutti i punti di s ; e poiché il potenziale è dovuto all'elettricità di P e all'elettricità indotta su s , $\nabla^2\Phi = 0$ in ogni punto interno alla superficie.

Applicando a questo caso il teorema di Green si trova

$$(4.0.14) \quad 4\pi\Psi_P = \iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds$$

dove, nell'integrale di superficie, Ψ è il valore del potenziale dato per l'elemento ds ; e, poiché, essendo σ_P la densità dell'elettricità indotta su s dall'unità di elettricità posta in P ,

$$(4.0.15) \quad 4\pi\sigma_P + \frac{d\Phi}{d\nu} = 0$$

l'equazione (4-13) si può scrivere

$$(4.0.16) \quad \Psi_P = \iint \Psi\sigma ds$$

dove σ è la densità superficiale della carica indotta su ds dall'unità di elettricità posta in P .

Quindi, se per una posizione particolare di P si conosce il valore di σ in ogni punto della superficie, si potrà calcolare con una semplice integrazione il potenziale in P , nell'ipotesi che si dia il potenziale in ogni punto della superficie e che all'interno della superficie il potenziale sia soggetto alla condizione

$$\nabla^2\Psi = 0$$

Dimostriamo più avanti che, se si è ottenuto un valore di Ψ che soddisfa a queste condizioni, questo valore è il solo che esiste.

Funzione di Green. 98. Sia una superficie chiusa s , mantenuta al potenziale zero. Siano P e Q due punti dalla parte positiva della superficie (possiamo prendere a piacere l'interno e l'esterno dalla parte positiva); e sia un piccolo corpo carico dell'unità di elettricità e posto in P . Il potenziale in Q sarà formato da due parti, una dovuta all'azione diretta dell'elettricità in P , l'altra all'azione dell'elettricità indotta da P su s . Quest'ultima parte del potenziale è detta *funzione di Green*, e si indica con G_{pq} .

Questa quantità è una funzione delle posizioni dei punti P e Q e la sua forma dipende dalla superficie s . Essa è stata calcolata nel caso in cui s è una sfera, e in alcuni altri molto poco numerosi. Essa rappresenta il potenziale nel punto Q dovuto alla carica indotta su s dall'unità di elettricità posta in P .

Il potenziale effettivo in un punto Q , dovuto tanto all'elettricità posta in P e alla carica indotta su s , è

$$\frac{1}{r_{pq}} + G_{pq}$$

dove r_{pq} indica la distanza di P da Q .

Sulla superficie s e in tutti i punti posti dalla parte negativa di s , il potenziale è nullo; pertanto

$$(4.0.17) \quad G_{pa} = -\frac{1}{r_{pq}}$$

dove l'indice a indica che invece di Q si prende un punto A sulla superficie s .

Indichiamo con $\sigma_{pa'}$ la densità superficiale indotta da P sul punto A' della superficie s ; essendo G_{pq} il potenziale in Q dovuto a questa distribuzione superficiale

$$(4.0.18) \quad G_{pq} = \iint \frac{\sigma_{pa'}}{r_{qa'}} ds'$$

dove ds' è un elemento della superficie s preso nel punto A' , e l'integrazione si estende all'intera superficie s .

Ma, se l'unità di elettricità fosse stato posto in Q , avremmo dalla (4-16)

$$(4.0.19) \quad \frac{1}{r_{qa'}} = -G_{qa'}$$

$$(4.0.20) \quad = - \iint \frac{\sigma_{qa}}{r_{aa'}} ds$$

dove σ_{qa} è la densità della carica indotta in A da Q , ds un elemento di superficie e $r_{aa'}$ la distanza di A da A' .

Sostituendo nell'espressione di G_{pq} questo valore di $\frac{1}{r_{qa'}}$, troviamo

$$(4.0.21) \quad G_{pq} = \iiint \frac{\sigma_{qa}\sigma_{pa'}}{r_{aa'}} ds ds'$$

Poiché questa espressione non è alterata, se cambiamo p in q e q in p , abbiamo

$$(4.0.22) \quad G_{pq} = G_{qp}$$

risultato di cui abbiamo già dimostrato la necessità nel § 87, ma che troviamo ora come conseguenza delle operazioni matematiche con le quali si può calcolare la funzione di Green.

Supponiamo una distribuzione qualsiasi di elettricità, e poniamo nel campo un punto caricato dell'unità di elettricità; se la superficie al potenziale separa interamente il punto della distribuzione supposta, e se prendiamo questa per superficie s , e questo punto per P , la funzione di Green in un punto qualunque posto sulla superficie dalla stessa parte di P è uguale al potenziale della distribuzione supposta sullo stesso punto dall'altro lato della superficie. Di modo che si può combinare un numero qualunque di casi, nei quali la funzione di Green può essere trovata per una posizione particolare di P . Quanto a trovare la forma della funzione, quando si dà la forma della superficie e con la posizione del punto arbitraria, è un problema di ben maggiore difficoltà, sebbene matematicamente possibile, così come abbiamo dimostrato.

Se supponiamo il problema risolto, e il punto P preso all'interno della superficie, per tutti i punti esterni il potenziale della superficie è quindi *centrobarico*³ e la sua azione su tutti i punti esterni è la stessa di quella di una unità di elettricità negativa posta in P .

99a. Se nel teorema di Green poniamo $\Psi = 0$, troviamo

$$(4.0.23) \quad \iint \Psi \frac{d\Psi}{d\nu} ds - \iiint \Psi \nabla^2 \Psi ds = \iiint (\nabla \Psi)^2 ds$$

Se Ψ è il potenziale dovuto a una distribuzione dove l'elettricità ha nello spazio la densità di volume ρ , e sui conduttori le cui superfici sono s_1, s_2, \dots , e i potenziali Ψ_1, Ψ_2, \dots le densità superficiali $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ allora

$$(4.0.24) \quad \nabla^2 \Psi = 4\pi\rho$$

$$(4.0.25) \quad \frac{d\Psi}{d\nu} = -4\pi\sigma$$

e

$$(4.0.26) \quad \iint \frac{d\Psi}{d\nu_1} ds_1 = -4\pi e_1$$

dove e_1 è la carica della superficie s_1 .

³Thomson e Tait, *Natural Philosophy*, § 526.

Dividendo la (4-21) per -8π , troviamo

$$(4.0.27) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} (\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2 + \dots) + \frac{1}{2} \iiint \Psi_\rho dx dy dz = \\ & = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz \end{aligned}$$

Il primo termine è l'energia del sistema dovuta alle cariche superficiali; il secondo, quella che è dovuta all'elettricità distribuita nell'intero campo, se esiste così distribuito.

Il secondo membro rappresenta quindi l'energia elettrica totale del sistema, essendo il potenziale Ψ una funzione data di x, y, z .

Siccome avremo spesso l'occasione di impiegare questo integrale di volume, lo indicheremo con l'abbreviazione W_Ψ di modo che

$$(4.0.28) \quad W_\Psi = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz$$

Se le sole cariche sono quelle sulle superfici dei conduttori, $\rho = 0$, e il secondo termine del primo membro della (4-27) scompare.

Il primo termine è l'energia del sistema elettrizzato espresso, come al § 84, in funzione del potenziale e della carica di ogni conduttore: è questa espressione dell'energia con indichiamo con W .

99b. Sia Ψ una funzione di x, y, z soggetta alla condizione di avere in ogni punto di una superficie chiusa s un valore noto $\bar{\Psi}$, una quantità nota per ogni punto della superficie. Il valore di Ψ nel punto non sulla superficie s è del tutto arbitrario.

Poniamo

$$(4.0.29) \quad W = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz$$

estendendo l'integrazione a tutto lo spazio compreso all'interno della superficie. Dimosteremo che se Ψ_1 è una particolare forma di Ψ che soddisfa alla condizione sulla superficie, e che, inoltre, soddisfa in ogni punto interno alla superficie all'equazione di Laplace

$$(4.0.30) \quad \nabla^2 \Psi_1 = 0$$

il valore W_1 di W , che corrisponde a Ψ_1 , è più piccolo del valore corrispondente a ogni altra funzione diversa da Ψ_1 in un punto interno alla superficie.

Sia, infatti, Ψ una funzione qualunque, che si confonde con Ψ_1 per tutti i punti della superficie, ma non più per i punti che sono interni a questa superficie; poniamo

$$(4.0.31) \quad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

allora Ψ_2 è una funzione che è zero in ogni punto della superficie.

Il valore di W corrispondente a Ψ sarà evidentemente

$$(4.0.32) \quad W = W_1 + W_2 + \frac{1}{4\pi} \iiint \left[\frac{d\Psi_1}{dx} \frac{d\Psi_2}{dx} + \frac{d\Psi_1}{dy} \frac{d\Psi_2}{dy} + \frac{d\Psi_1}{dz} \frac{d\Psi_2}{dz} \right] dx dy dz$$

Dal teorema di Green l'ultimo termine può essere scritto

$$(4.0.33) \quad \frac{1}{4\pi} \iiint \Psi_2 \nabla^2 \Psi_1 ds - \frac{1}{4\pi} \iiint \Psi_2 \frac{d\Psi_1}{d\nu} ds$$

L'integrale di volume si annulla, poiché $\nabla^2 \Psi_1 = 0$ all'interno della superficie; anche l'integrale di superficie si annulla, poiché $\Psi_2 = 0$ alla superficie; pertanto la (4-31) si riduce alla forma

$$(4.0.34) \quad W = W_1 + W_2$$

Gli elementi dell'integrale W_2 , essendo somme di tre quadrati, non possono assumere valori negativi e l'integrale stesso non può che essere positivo o nullo; pertanto, se W_2 non è nullo, è

positivo, e W è maggiore di W_1 . Ma, se W_2 è nullo, ognuno dei suoi elementi deve essere nullo, e, di conseguenza,

$$\frac{d\Psi_2}{dx} = 0 \quad \frac{d\Psi_2}{dy} = 0 \quad \frac{d\Psi_2}{dz} = 0$$

per tutti i punti interni alla superficie; Ψ_2 deve quindi essere una costante in tutto l'interno di questa superficie, e, siccome $\Psi_2 = 0$ sulla superficie, $\Psi_2 = 0$ in tutti i punti interni, e $\Psi = \Psi_1$, cosicché se W non è più grande di W_1 , Ψ deve necessariamente essere identico a Ψ_1 in tutti i punti interni alla superficie.

Risulta da ciò che Ψ_1 è la sola funzione di x, y, z che diviene uguale a Ψ alla superficie e che soddisfa all'equazione di Laplace in tutti i punti interni.

Se queste condizioni fossero ugualmente soddisfatte da un'altra funzione Ψ_2 , W_2 dovrà essere inferiore a ogni altro valore di W . Ma abbiamo già dimostrato che W_1 è più piccolo di ogni altro valore e, di conseguenza, anche W_2 ; non può esistere quindi una funzione diversa da Ψ_1 che soddisfi alle condizioni.

Il caso che ci sarà più utile è quello in cui il campo è limitato da una superficie esterna s e da un numero qualunque di superfici interne s_1, s_2, \dots e dove le condizioni sono che Ψ sia nullo su s e che sia uguale a Ψ, Ψ_2, \dots su s_1, s_2, \dots , essendo Ψ_1, Ψ_2, \dots costanti per ogni superficie, come avviene per un sistema di conduttori i cui potenziali sono assegnati.

Tra tutti i valori di Ψ che soddisfano a queste condizioni, questa dà il valore minimo di W_Ψ , per il quale $\nabla^2\Psi = 0$ in ogni punto del campo.

Teorema di Thomson - lemma. 100a. Sia Ψ una funzione di x, y, z finita e continua all'interno di una superficie chiusa s , e che assume su certe superfici chiuse s_1, s_2, \dots, s_p i valori $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p$, costanti per ogni superficie.

Siano u, v, w funzioni di x, y, z che si possono considerare come le componenti di un vettore \mathbf{C} soggetto alla condizione solenoidale

$$(4.0.35) \quad -S. \nabla \mathbf{C} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

Poniamo, nel Teorema III,

$$(4.0.36) \quad X = \Psi u \quad Y = \Psi v \quad Z = \Psi w$$

il risultato di queste sostituzioni è

$$(4.0.37) \quad \sum_p \iint \Psi_p (l_p u + m_p v + n_p w) ds_p + \iiint \Psi \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) dx dy dz + \\ + \iiint \left(u \frac{d\Psi}{dx} + v \frac{d\Psi}{dy} + w \frac{d\Psi}{dz} \right) dx dy dz = 0$$

estendendosi gli integrali di superficie alle differenti superfici, e gli integrali di volume all'intero campo.

Il primo integrale di volume si annulla in virtù della condizione sinusoidale imposta a u, v, w ; gli integrali di superficie si annullano nei seguenti casi:

- (1) Se $\Psi = 0$ in ogni punto della superficie;
- (2) Se $lu + mv + nw = 0$ in ogni punto della superficie;
- (3) Se la superficie è interamente formata da parti che soddisfano alle condizioni 81) e (2).
- (4) Se Ψ è costante sull'intera superficie chiusa e se

$$\iint (lu + mv + nw) ds = 0$$

In questi quattro casi, l'integrale di volume

$$(4.0.38) \quad M = \iiint \left(u \frac{d\Psi}{dx} + v \frac{d\Psi}{dy} + w \frac{d\Psi}{dz} \right) dx dy dz = 0$$

100b. Consideriamo un campo limitato dalla superficie chiusa esterna s , e dalle superfici chiuse interne s_1, s_2, \dots

Sia Ψ una funzione di x, y, z finita, continua e che soddisfa all'equazione di Laplace

$$\nabla^2\Psi = 0$$

all'interno del campo, e prendendo sulle superfici s_1, s_2, \dots i valori $i\Psi, \Psi_2, \dots, \Psi_p$ costanti, ma non dati, e il valore zero sulla superficie esterna s .

La carica di ciascuna delle superfici conduttrici come s_1 è data dall'integrale di superficie

$$(4.0.39) \quad e_1 = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{d\Psi_1}{d\nu_1} ds_1$$

essendo ν_1 la normale tracciata dalla superficie s_1 verso l'interno del campo elettrico.

100c. Siano ora f, g, h funzioni di x, y, z che si possono considerare come le componenti di un vettore \mathbf{D} , soggetto soltanto alle condizioni: di soddisfare in ogni punto del campo all'equazione solenoidale

$$(4.0.40) \quad \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$$

di dare, su ciascuna delle superfici chiuse s_1 , la relazione

$$(4.0.41) \quad \iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h) ds_1 = e_1$$

dove l_1, m_1, n_1 sono i coseni direttori della normale ν_1 , tracciata dalla superficie s_1 verso l'interno del campo elettrico, e dove e_1 è la stessa quantità della (4-38), cioè, la carica elettrica del conduttore la cui superficie è s_1 .

Consideriamo il valore dell'integrale di volume

$$(4.0.42) \quad W_D = 2\pi \iiint (f^2 + g^2 + h^2) dx dy dz$$

esteso a tutto il campo interno a s ed esterno a s_1, s_2 e confrontiamolo con la (4-28)

$$W_\Psi = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz$$

essendo i limiti di integrazione gli stessi.

Poniamo

$$(4.0.43) \quad u = f + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dx} \quad v = g + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dy} \quad w = h + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dz}$$

e

$$(4.0.44) \quad W_C = 2\pi \iiint (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz$$

allora poiché

$$f^2 + g^2 + h^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] + \\ + u^2 + v^2 + w^2 - \frac{1}{2\pi} \left[u \frac{d\Psi}{dx} + v \frac{d\Psi}{dy} + w \frac{d\Psi}{dz} \right]$$

$$(4.0.45) \quad W_D = W_\Psi + W_C - \iiint \left(u \frac{d\Psi}{dx} + v \frac{d\Psi}{dy} + w \frac{d\Psi}{dz} \right) dx dy dz$$

ma in primo luogo, u, v, w soddisfano alla condizione solenoidale in tutti i punti del campo, poiché si ha, dalla (4-42)

$$(4.0.46) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} - \frac{1}{4\pi} \nabla^2\Psi$$

e dalle condizioni espresse dalla (4-39) e da $\nabla^2\Psi = 0$, i due termini del secondo della (4-45) sono nulli.

In secondo luogo, l'integrale di superficie

$$(4.0.47) \quad \iint (l_1 u + m_1 v + n_1 w) ds_1 = \iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h) ds_1 + \frac{1}{4\pi} \iint \frac{d\Psi}{d\nu_1} ds_1$$

ma dalla (4-40), il primo termine del secondo membro è e_1 , e, dalla (4-43), il secondo termine è $-e_1$, di modo che

$$(4.0.48) \quad \iint (l_1 u + m_1 v + n_1 w) ds_1 = 0$$

Pertanto, poiché Ψ_1 è costante, la quarta condizioni del § 100a, è soddisfatta; l'ultimo termine della (4-44) è nullo, e questa equazione si riduce a

$$(4.0.49) \quad W_D = W_\Psi + W_C$$

Ma, poiché l'elemento dell'integrale W_C è una somma di tre quadrati, o è nullo o è positivo. Se quindi, in un punto qualsiasi del campo, u, v, w non sono tutti nulli, l'integrale W_C ha un valore positivo e, di conseguenza, W_D è maggiore di W_Ψ . Ma i valori

$$u = v = w = 0$$

per tutti i punti, soddisfano le condizioni. Pertanto, se in ogni punto

$$(4.0.50) \quad f = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dx} \quad g = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dy} \quad h = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dz}$$

si ha

$$(4.0.51) \quad W_D = W_\Psi$$

e il valore di W_D corrispondente a questi valori di f, g, h è più piccolo del valore corrispondente a tutti gli altri valori differenti di f, g, h .

Pertanto, quando la carica di ogni conduttore è data, vi è una e una sola soluzione del problema che consiste nel determinare per ogni punto del campo lo spostamento e il potenziale.

Questo teorema, sotto una delle forme più generali, è stato enunciato per la prima volta da Sir W. Thomson⁴. Noi mostreremo più avanti le possibili generalizzazioni.

100d. Si può modificare questo teorema supponendo che il vettore D , invece di soddisfare in tutti i punti del campo la condizione solenoidale, soddisfi la condizione

$$(4.0.52) \quad \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \rho$$

dove ρ è una quantità finita, il cui valore è dato per ogni punto del campo, e che può essere positiva o negativa, continua o discontinua, purché il suo integrale di volume, preso per una regione finita, rimanga finito.

Possiamo così supporre che, su certe superfici comprese nel campo

$$(4.0.53) \quad lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h' = \sigma$$

dove l, m, n, l', m', n' sono i coseno direttori delle normali tracciate in un punto di queste superfici verso le regioni per le quali le componenti dello spostamento sono rispettivamente f, g, h e f', g', h' ; e dove σ è una quantità data per ogni punto della superficie, il cui integrale, preso su una superficie finita, è finito.

100e. Possiamo pure cambiare le condizioni alle superfici limite, supponendo che in ogni loro punto

$$(4.0.54) \quad lf + mg + nh = \sigma$$

dove σ è dato per ogni punto.

(Nell'enunciato originario, si supponeva soltanto dato il valore dell'integrale di σ su ciascuna delle superfici. Qui supponiamo il suo valore dato per ogni elemento di superficie, ciò

⁴Cambridge and Dublin Mathematical Journal, febbraio 1848.

che significherebbe considerare nell'enunciato originario ogni elemento come una superficie indipendente).

Alcune di queste modifiche non inficia l'esattezza del teorema, purché si ricordi che Ψ deve soddisfare alle condizioni corrispondenti, cioè alla condizione generale

$$(4.0.55) \quad \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} + 4\pi\rho = 0$$

e alla condizione alla superficie

$$(4.0.56) \quad \frac{d\Psi}{d\nu} + \frac{d\Psi'}{d\nu'} + 4\pi\sigma = 0$$

poiché se, come in precedenza,

$$f = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dx} = u \quad g = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dy} = v \quad h = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dz} = w$$

allora u, v, w soddisferanno la condizione solenoidale

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

e la condizione di superficie

$$lu + mv + nw + l'u' + m'v' + n'w' = 0$$

e alla condizione al contorno

$$lu + mv + nu = 0$$

da cui ricaviamo, come prima

$$M = \iiint \left(u \frac{d\Psi}{dx} + v \frac{d\Psi}{dy} + w \frac{d\Psi}{dz} \right) dx dy dz = 0$$

e

$$W_D = W_\Psi + W_C$$

Pertanto è dimostrato, come in precedenza, che W_D prende il suo valore minimo unico, quando W_C è nullo, ciò che presuppone che C è nullo dappertutto, o che

$$f = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dx} \quad g = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dy} \quad h = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dz}$$

101a. Nell'enunciato di questi teoremi, ci siamo tenuti finora dentro questa teoria dell'elettricità che ammette che i fenomeni elettrici dipendono solo dalla forma, dalla posizione relativa e dalla carica dei conduttori, ma che non tiene conto della natura del mezzo dielettrico che separa questi conduttori.

Secondo questa teoria, per esempio, vi è una relazione invariabile tra la densità superficiale su un conduttore e l'intensità elettromotrice nei punti esterni vicini alla superficie: è quanto espresso dalla legge di Coulomb

$$R = 4\pi\sigma$$

Ma ciò è vero solo nel mezzo che si prende come riferimento; questo mezzo può essere l'aria. La relazione non è più la stessa per altri mezzi, così come ha dimostrato Cavendish, che non pubblicò tuttavia la sua scoperta, e così la ritrovò più tardi Faraday senza conoscere i lavori di Cavendish.

Per esprimere completamente i fenomeni, riconosciamo la necessità di considerare due vettori, legati da una relazione differente per i diversi mezzi. Una di esse è l'intensità elettromotrice; l'altra lo spostamento elettrico.

L'intensità elettromotrice è legata al potenziale da equazioni di forma invariabile; lo spostamento elettrico è legato da equazioni di forma invariabile alla distribuzione dell'elettricità; ma la relazione dell'intensità elettromotrice e dello spostamento elettrico dipende dalla natura del mezzo dielettrico e si deve esprimere con equazioni di cui la forma più generale non è stata ancora completamente determinata finora, e si può determinare solo mediante esperienze sui dielettrici.

101b. L'intensità elettromotrice è un vettore, definito al § 68, essendo il quoziente della forza meccanica che agisce su una piccola quantità e di elettricità divisa per questa quantità e . Indicheremo le sue componenti con le lettere P, Q, R e il vettore con lettera \mathfrak{E} .

In elettrostatica, l'integrale di linea di \mathfrak{E} è sempre indipendente dal contorno di integrazione; in altri termini, \mathfrak{E} è la variazione nello spazio di un potenziale; da cui

$$P = -\frac{d\Psi}{dx} \quad Q = -\frac{d\Psi}{dy} \quad R = -\frac{d\Psi}{dz}$$

o, più brevemente, nella notazione dei quaternioni

$$\mathfrak{E} = -\nabla\Psi$$

101c. Lo spostamento elettrico, in una direzione qualunque, è stato definito al § 68 come il quoziente della quantità di elettricità trasportata attraverso una piccola area A , il cui piano è normale alla direzione considerata, divisa per questa area A . Indicheremo con f, g, h le componenti dello spostamento, con \mathfrak{D} lo stesso vettore.

La densità di volume in un punto qualunque è definita dall'equazione

$$\rho = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}$$

o, nella notazione dei quaternioni,

$$\rho = -S. \nabla\mathfrak{D}$$

La densità superficiale in un punto di una superficie elettrizzata è definita dall'equazione

$$\sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h'$$

dove f, g, h sono le componenti dello spostamento di un lato della superficie, e l, m, n i coseni direttori della normale tracciata alla superficie da questo lato, e dove f', g', h' e l', m', n' sono le componenti dello spostamento, e i coseni direttori della normale, dell'altro lato della superficie.

Nella notazione dei quaternioni, questa relazione si esprime con l'equazione

$$\sigma = -(S. U\nu\mathfrak{D} + -S. U\nu'\mathfrak{D})$$

dove $U\nu$ e $U\nu'$ sono le normali unitarie delle due parti della superficie e dove S indica che si deve prendere la parte scalare del prodotto.

Se la superficie è quella di un conduttore, e ν la normale esterna, f', g', h' e \mathfrak{D}' sono nulli, e l'equazione si riduce a

$$\sigma = lf + mg + nh = -S. U\nu\mathfrak{D}$$

La carica totale del conduttore è quindi

$$e = \iint (lf + mg + nh) ds = - \iint S. U\nu. \mathfrak{D}. ds$$

101d. Così come mostrato al § 84, l'energia elettrica del sistema è uguale alla semisomma dei prodotti della cariche dei conduttori per i loro rispettivi potenziali.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum e\Psi = \frac{1}{2} \iiint \rho\Psi dx dy dz + \frac{1}{2} \iint \sigma\Psi ds = \\ &= \frac{1}{2} \iiint \Psi \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) dx dy dz + \frac{1}{2} \iint \Psi (lf + mg + nh) ds \end{aligned}$$

dove l'integrale di volume deve essere preso per tutta l'estensione del campo elettrico e l'integrale di superficie sulle superfici dei conduttori.

Poniamo, nel teorema III, § 21,

$$X = \Psi f \quad Y = \Psi g \quad Z = \Psi h$$

troviamo

$$\iint \Psi (lf + mg + nh) ds = - \iiint \Psi \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) dx dy dz = - \iiint \left(f \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\Psi}{dy} + \frac{d\Psi}{dz} \right) dx dy dz$$

sostituendo questo valore all'integrale di superficie in W , troviamo

$$W = -\frac{1}{2} \iiint \left(f \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\Psi}{dy} + \frac{d\Psi}{dz} \right) dx dy dz$$

o

$$W = \frac{1}{2} \iiint (fP + gQ + hR) dx dy dz$$

101e. Arriviamo ora alla relazione tra \mathfrak{D} e \mathfrak{E} .

L'unità di elettricità è abitualmente definita dalle esperienze fatte nell'aria. Sappiamo, dai lavori di Boltzmann, che la costante dielettrica dell'aria è un poco superiore a quella del vuoto e varia con la densità; pertanto, con rigore, tutte le misure di quantità di elettricità dovranno essere effettuate applicando una correzione per riportarle, sia una pressione e a una temperatura normale nell'aria, sia nel vuoto, e ciò sarà più scientifico; analogamente gli indici di rifrazione, misurati nell'aria, esigono una correzione simile, essendo questa d'altra parte assai piccola nei due casi, tanto da essere valutabile nelle misure di precisione estrema.

Nel mezzo scelto come normale

$$4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$$

o

$$4\pi f = P \quad 4\pi g = Q \quad 4\pi h = R$$

In un mezzo isotropo, la cui costante dielettrica è K

$$4\pi\mathfrak{D} = K\mathfrak{E}$$

$$4\pi f = KP \quad 4\pi g = KQ \quad 4\pi h = KR$$

Ma vi sono alcuni mezzi, e il vetro è uno di quelli che sono stati più accuratamente studiati, per i quali la relazione tra \mathfrak{D} e \mathfrak{E} è più complicata e fa intervenire la variazione nel tempo di una di queste quantità o di entrambe; la relazione deve allora essere della forma

$$f(\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \dot{\mathfrak{D}}, \dot{\mathfrak{E}}, \ddot{\mathfrak{D}}, \ddot{\mathfrak{E}}, \dots) = 0$$

Per ora, non proveremo a discutere relazioni di questa forma più generale e ci limiteremo al caso in cui \mathfrak{D} è una funzione lineare e vettoriale di \mathfrak{E} .

La forma più generale di una simile relazione può essere rappresentata da

$$4\pi\mathfrak{D} = \phi(\mathfrak{E})$$

dove, nello studio attuale, ϕ rappresenterà sempre una funzione lineare e vettoriale. Le componenti di \mathfrak{D} saranno quindi funzioni lineari e omogenee delle componenti idi \mathfrak{C} e potranno essere messe nella forma

$$4\pi f = K_{xx}P + K_{xy}Q + K_{xz}R$$

$$4\pi g = K_{yx}P + K_{yy}Q + K_{yz}R$$

$$4\pi h = K_{zx}P + K_{zy}Q + K_{zz}R$$

dove il primo indice di ogni coefficiente K indica la direzione dello spostamento e il secondo la direzione dell'intensità della forza elettromotrice.

La forma più generale di una funzione lineare e vettoriale comprende quindi nove costanti arbitrarie. Se i coefficienti che hanno la stessa coppia di indici sono uguali, la funzione è detta auto coniugata.

Se esprimiamo \mathfrak{E} in funzione di \mathfrak{D} , avremo

$$\mathfrak{E} = 4\pi\phi^{-1}\mathfrak{D}$$

o

$$P = 4\pi(k_{xx}f + k_{xy}g + k_{xz}h)$$

$$Q = 4\pi(k_{yx}f + k_{yy}g + k_{yz}h)$$

$$R = 4\pi(k_{zx}f + k_{zy}g + k_{zz}h)$$

101f. Il lavoro compiuto dall'intensità elettromotrice le cui componenti sono P, Q, R , per determinare nell'unità di volume del mezzo uno spostamento le cui componenti sono df, dg, dh è

$$dW = Pdf + Qdg + Rdh$$

Poiché un dielettrico, sottoposto a uno spostamento elettrico, costituisce un sistema conservativo, W deve essere una funzione di f, g, h ; e poiché f, g, h possono variare indipendentemente, si deve avere

$$P = \frac{dW}{df} \quad Q = \frac{dW}{dg} \quad R = \frac{dW}{dh}$$

da cui

$$\frac{dP}{dg} = \frac{d^2W}{dfdg} = \frac{d^2W}{dgd f} = \frac{dQ}{df}$$

ma

$$\frac{dP}{dg} = 4\pi k_{yx}$$

coefficiente di y nell'espressione di P , e

$$\frac{dQ}{df} = 4\pi k_{xy}$$

coefficiente di x nell'espressione di Q .

Pertanto, se un dielettrico costituisce un sistema conservativo (e noi sappiamo che è così, poiché questo sistema può conservare la sua energia per un tempo indefinito),

$$k_{xy} = k_{yx}$$

e ϕ è una funzione auto coniugata.

Ne risulta che ϕ è anche auto coniugata, e che

$$K_{xy} = K_{yx}$$

101g. L'espressione dell'energia può quindi essere messa sotto l'una o l'altra delle forme

$$W_C = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[K_{xx}P^2 + K_{yy}Q^2 + K_{zz}R^2 + 2K_{yz}QR + 2K_{zx}RP + 2K_{xy}PQ \right] dx dy dz$$

o

$$W_D = 2\pi \iiint \left[k_{xx}f^2 + k_{yy}g^2 + k_{zz}h^2 + 2k_{yz}gh + 2k_{zx}hf + 2k_{xy}fg \right] dx dy dz$$

dove l'indice esprime in funzione di quale vettore è espresso W . Quando non vi sono indici, bisogna intendere che l'energia è espressa in funzione dei due vettori.

Così, abbiamo in tutto sei espressioni differenti dell'energia di un campo elettrico. Tre tra loro fanno intervenire le cariche e i potenziali alla superficie dei conduttori; esse sono date al § 87.

Le altre tre sono integrali di volume presi sull'intero campo, e fanno intervenire le componenti dell'intensità elettromotrice, o dello spostamento elettrico, o di queste due quantità insieme.

Le prime tre appartengono quindi alla teoria delle azioni a distanza; le altre tre, alla teoria delle azioni propagate attraverso un mezzo interposto tra i corpi.

Queste tre espressioni si possono scrivere

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \iiint S. \mathfrak{D} \mathfrak{E} d\zeta \\ W_C &= -\frac{1}{8\pi} \iiint S. E \phi \mathfrak{E} d\zeta \\ W_D &= -2\pi \iiint S. \mathfrak{D} \phi \mathfrak{E} d\zeta \end{aligned}$$

101h. Per estendere il teorema di Green, al caso di un mezzo eterogeneo e non isotropo, basta porre nel teorema III

$$\begin{aligned} X &= \Psi \left(K_{xx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{xy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{xz} \frac{d\Phi}{dz} \right) \\ W_C &= \Psi \left(K_{yx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{yy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{yz} \frac{d\Phi}{dz} \right) \\ W_D &= \Psi \left(K_{zx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{zy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{zz} \frac{d\Phi}{dz} \right) \end{aligned}$$

Otteniamo così, e ricordandoci che l'ordine degli indici è indifferente

$$\begin{aligned}
 & \iint \Psi \left[(K_{xx}l + K_{yx}m + K_{zx}n) \frac{d\Phi}{dx} + (K_{xy}l + K_{yy}m + K_{zy}n) \frac{d\Phi}{dy} + (K_{xz}l + K_{yz}m + K_{zz}n) \frac{d\Phi}{dz} \right] ds + \\
 & + \iiint \Psi \left[\frac{d}{dx} \left(K_{xx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{xy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{xz} \frac{d\Phi}{dz} \right) + \frac{d}{dy} \left(K_{yx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{yy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{yz} \frac{d\Phi}{dz} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{d}{dz} \left(K_{zx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{xy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{zz} \frac{d\Phi}{dz} \right) \right] dx dy dz = \\
 & = - \iiint \left[K_{xx} \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{yy} \frac{d\Psi}{dy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{zz} \frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Phi}{dz} + K_{yz} \left(\frac{d\Psi}{dy} \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Phi}{dy} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + K_{zx} \left(\frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Phi}{dz} \right) + K_{xy} \left(\frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\Psi}{dy} \frac{d\Phi}{dx} \right) \right] dx dy dz = \\
 & = \iint \Phi \left[(K_{xx}l + K_{yx}m + K_{zx}n) \frac{d\Psi}{dx} + (K_{xy}l + K_{yy}m + K_{zy}n) \frac{d\Psi}{dy} + (K_{xz}l + K_{yz}m + K_{zz}n) \frac{d\Psi}{dz} \right] ds + \\
 & \quad \iiint \Phi \left[\frac{d}{dx} \left(K_{xx} \frac{d\Psi}{dx} + K_{xy} \frac{d\Psi}{dy} + K_{xz} \frac{d\Psi}{dz} \right) + \frac{d}{dy} \left(K_{yx} \frac{d\Psi}{dx} + K_{yy} \frac{d\Psi}{dy} + K_{yz} \frac{d\Psi}{dz} \right) + \right. \\
 & \quad \left. \frac{d}{dz} \left(K_{zx} \frac{d\Psi}{dx} + K_{zy} \frac{d\Psi}{dy} + K_{zz} \frac{d\Psi}{dz} \right) \right] dx dy dz
 \end{aligned}$$

Impiegando la notazione dei quaternioni, questo risultato si può scrivere più brevemente

$$\begin{aligned}
 & \iint \Psi S. U \nu \phi (\nabla \Phi) ds - \iiint \Psi S. (\nabla \phi \nabla) \Phi d\zeta = \\
 & = - \iiint S. \nabla \Psi \phi \nabla \Phi d\zeta = \iiint S. \nabla \Phi \phi \nabla \Psi d\zeta = \\
 & = \iint \Phi S. U \nu \phi (\nabla \Psi) ds - \iiint \Phi S. (\nabla \phi \nabla) \Psi d\zeta
 \end{aligned}$$

Limiti entro i quali deve essere compresa la capacità elettrica di un conduttore.

102a. Si è già definita capacità di un conduttore o di un sistema di conduttori la carica che porta al potenziale 1 questo conduttore o questo sistema, essendo tutti gli altri conduttori al potenziale zero.

Il metodo seguente per determinare i valori limite tra i quali si deve trovare compresa la capacità di un conduttore è stata suggerita da una Memoria *Sur la théorie de la résonance*, di J. W. Strutt, *Phil. Trans.*, 1871, (si veda § 308).

Indichiamo con s_1 la superficie del conduttore o del sistema, di cui si deve determinare la capacità; con s_0 la superficie degli altri conduttori. Siano Ψ_1 il potenziale di s_1 , Ψ_0 quello di s_0 . Siano e_1 la carica di s_1 ; quella di s_0 sarà $-e_1$,

Allora, se q è la capacità di s_1 ,

$$(4.0.57) \quad q = \frac{e_1}{\Psi_1 - \Psi_0}$$

e se W è l'energia del sistema per la distribuzione effettiva dell'elettricità

$$(4.0.58) \quad W = \frac{1}{2} e_1 (\Psi_1 - \Psi_0)$$

e

$$(4.0.59) \quad q = \frac{2W}{(\Psi_1 - \Psi_0)^2} = \frac{e_1^2}{2W}$$

Si debba trovare un limite superiore della capacità. Immaginiamo un valore di Ψ che sia uguale a 1 su s_1 e a 0 su s_0 e calcoliamo il valore dell'integrale di volume

$$(4.0.60) \quad W_\Psi = \frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz$$

per l'intera estensione del campo.

Si è dimostrato (§ 99) che W non può essere superiore a W_Ψ ; la capacità q non può quindi essere maggiore di $2W_\Psi$.

Si debba ora trovare un limite inferiore. Immaginiamo un sistema di valori di f, g, h che soddisfano all'equazione

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$$

così che si ha

$$(4.0.61) \quad \iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h) ds_1 = e_1$$

e calcoliamo il valore dell'integrale di volume

$$(4.0.62) \quad W_D = 2\pi \iiint (f^2 + g^2 + h^2) dx dy dz$$

esteso sull'intero campo. Si è dimostrato (§ 100c) che W non può essere maggiore di W_D ; la capacità non può quindi essere inferiore a

$$(4.0.63) \quad \frac{e_1^2}{2W_D}$$

Il metodo più semplice per ottenere un sistema di valori di f, g, h , che soddisfi alla condizione solenoidale, è di supporre l'elettricità distribuita sulla superficie s_1 e sulla superficie s_0 in modo che la somma di queste cariche sia nulla. Si calcola allora il potenziale Ψ dovuto a questa distribuzione e l'energia elettrica del sistema così disposto, che si può chiamare W_σ .

Se allora poniamo

$$f = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dx} \quad g = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dy} \quad h = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dz}$$

questi valori di f, g, h soddisferanno alla condizione solenoidale. Ma, in questo caso, possiamo determinare w_D senza passare per la ricerca dell'integrale di volume; poiché questa soluzione rende $\nabla^2\Psi = 0$ in tutti i punti del campo, possiamo ottenere W_D sotto forma di integrale di superficie

$$(4.0.64) \quad W_D = \frac{1}{2} \iint \Psi \sigma_1 ds_1 + \frac{1}{2} \iint \Psi \sigma_0 ds_0$$

dove il primo integrale è esteso alla superficie s_1 e il secondo alla superficie s_0 .

Se la superficie s_0 è a una distanza infinita da s_1 , il potenziale su s_0 è nullo e il secondo termine scompare.

102b. Tutte le volte che si cerca la distribuzione dell'elettricità su conduttori il cui potenziale è dato, si può ottenere nel modo seguente una soluzione approssimata del problema.

Sia s_1 la superficie di un conduttore o di un sistema di conduttori mantenuti al potenziale 1; sia s_0 la superficie di tutti gli altri conduttori, compreso il conduttore cavo che circonda tutto il resto, e che può, in certi casi, essere supposto a una distanza infinita dagli altri.

Cominciamo col tracciare una serie di linee rette o curve, da s_1 a s_0 .

Supponiamo che su ciascuna di queste linee Ψ sia uguale a 1 in s_1 e a 0 in s_0 . Allora, essendo P un punto qualunque su una di queste linee, possiamo prendere come prima approssimazione $\Psi_1 = \frac{Ps_0}{s_1s_0}$.

Otteniamo così una prima approssimazione di Ψ che soddisfa alla condizione di essere uguale a 1 su s_1 e a 0 su s_0 .

Il valore di W_Ψ , calcolato alla maniera di Ψ_1 , sarà maggiore di W .

Come seconda approssimazione delle linee di forza, supponiamo che

$$(4.0.65) \quad f = -p \frac{d\Psi_1}{dx} \quad g = -p \frac{d\Psi_1}{dy} \quad h = -p \frac{d\Psi_1}{dz}$$

Il vettore, le cui componenti sono f, g, h , è normale alle superfici per le quali Ψ_1 è costante. Determiniamo p in modo che f, g, h soddisfino alla condizione solenoidale. Abbiamo così

$$(4.0.66) \quad p \left(\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + \frac{d^2\Psi_1}{dy^2} + \frac{d^2\Psi_1}{dz^2} \right) + \frac{dp}{dx} \frac{d\Psi_1}{dx} + \frac{dp}{dy} \frac{d\Psi_1}{dy} + \frac{dp}{dz} \frac{d\Psi_1}{dz} = 0$$

Se tracciamo da s_1 a s_0 una linea che sia costantemente normale alle superfici per le quali Ψ è costante, e se indichiamo con s la lunghezza di questa linea misurata a partire da s_0 ,

$$(4.0.67) \quad R \frac{dx}{ds} = -\frac{d\Psi_1}{dx} \quad R \frac{dy}{ds} = -\frac{d\Psi_1}{dy} \quad R \frac{dz}{ds} = -\frac{d\Psi_1}{dz}$$

essendo R l'intensità risultante uguale a $-\frac{d\Psi}{ds}$, di modo che

$$(4.0.68) \quad \frac{dp}{dx} \frac{d\Psi_1}{dx} + \frac{dp}{dy} \frac{d\Psi_1}{dy} + \frac{dp}{dz} \frac{d\Psi_1}{dz} = -R \frac{dp}{ds} = R^2 \frac{dp}{d\Psi}$$

e l'equazione (4-65) diviene

$$(4.0.69) \quad p \nabla^2 \Psi = R^2 \frac{dp}{d\Psi}$$

da cui

$$(4.0.70) \quad p = C e^{\int_0^{\Psi_1} \frac{\nabla^2 \Psi_1}{R^2} d\Psi_1}$$

essendo l'integrale un integrale lineare preso lungo la linea s .

Supponiamo ora che lungo la linea s

$$(4.0.71) \quad -\frac{d\Psi_2}{ds} = a \frac{dx}{ds} + b \frac{dy}{ds} + c \frac{dz}{ds} = -p \frac{d\Psi_1}{ds}$$

allora

$$(4.0.72) \quad \Psi_2 = C \int_0^{\Psi_1} e^{\int \frac{\nabla^2 \Psi_1}{R^2} d\Psi_1} d\Psi_1$$

essendo l'integrazione sempre effettuata lungo la linea s . La costante C deve ora essere determinata dalla condizione $\Psi_2 = 1$ così come Ψ_1 su s_1 , cioè

$$(4.0.73) \quad C \int_0^1 e^{\int \frac{\nabla^2 \Psi_1}{R^2} d\Psi_1} d\Psi_1 = 1$$

ciò che dà un'ultima approssimazione di Ψ ; si può ripetere tale operazione.

I risultati ottenuti dal calcolo di $W_{\Psi_1}, W_{D_2}, W_{\Psi_2} \dots$ fornisce capacità alternativamente al di sopra e al di sotto della capacità vera, avvicinandosene costantemente.

L'operazione, come è stata esposta, suppone il calcolo della forma della linea s e l'integrazione lungo questa linea, operazioni che sono in generale molto difficile perché le si possa effettuare praticamente.

In certi casi, si può giungere ad una approssimazione con un metodo più semplice.

102c. Come esempio di questo metodo, lo applichiamo alla ricerca per approssimazioni successive delle superfici equipotenziali e delle linee di induzione nel campo elettrico compreso tra due superfici che sono all'incirca piane e parallele, ma non lo sono in modo rigoroso, e una delle quali è mantenuta al potenziale zero e l'altra al potenziale 1.

Siano le equazioni delle due superfici

$$(4.0.74) \quad z_1 = f_1(x, y) = a$$

per la superficie a potenziale zero

$$(4.0.75) \quad z_2 = f_2(x, y) = b$$

per la superficie a potenziale 1, essendo a e b funzioni date di x e y ed essendo b sempre maggiore di a . Le derivate prime di a e b rispetto a x e a y sono quantità molto piccole, delle quali si possono trascurare le potenze e i prodotti di più fattori.

Inizieremo col supporre che le linee di induzione siano parallele all'asse z , nel qual caso

$$(4.0.76) \quad f = 0 \quad g = 0 \quad \frac{dh}{dz} = 0$$

pertanto su ogni linea di induzione, h è costante, e

$$(4.0.77) \quad \Psi = -4\pi \int_a^z h dz = -4\pi h (z - a)$$

Quando $z = b$, $\Psi = 1$, allora

$$(4.0.78) \quad h = -\frac{1}{4\pi(b-a)}$$

e

$$(4.0.79) \quad \Psi = \frac{z - a}{b - a}$$

che dà una prima approssimazione del potenziale e indica una serie di superfici equipotenziali i cui intervalli, misurati parallelamente a z , sono uguali.

Per ottenere una seconda approssimazione delle linee di induzione, supponiamo che esse siano dappertutto normali alle superfici equipotenziali definite dalla (4-78).

Ciò porta a porre le condizioni

$$4\pi f = \lambda \frac{d\Psi}{dx} \quad 4\pi g = \lambda \frac{d\Psi}{dy} \quad 4\pi h = \lambda \frac{d\Psi}{dz}$$

dove λ deve essere determinata in modo che in tutti i punti del campo

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$$

e che l'integrale lineare

$$4\pi \int \left(f \frac{dx}{ds} + g \frac{dy}{ds} + h \frac{dz}{ds} \right) ds$$

preso lungo una linea di induzione qualunque, dalla superficie a alla superficie b , sia uguale a -1 .

Supponiamo che

$$(4.0.80) \quad \lambda = 1 + A + B(z - a) + C(z - a)^2$$

e trascuriamo le potenze e i prodotti di A, B, C e, per il momento, le potenze e i prodotti delle derivate prime di a e b .

La condizione solenoidale dà

$$(4.0.81) \quad B = -\nabla^2 a \quad C = -\frac{1}{2} \frac{\nabla^2(b-a)}{b-a}$$

dove

$$(4.0.82) \quad \nabla^2 = - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right)$$

Se, invece di prendere l'integrale di linea lungo la nuova linea di induzione, lo prendiamo lungo l'antica, parallela a z , la seconda condizione dà

$$1 = 1 + A + \frac{1}{2} B(b - a) + \frac{1}{2} C(b - a)^2$$

Pertanto

$$(4.0.83) \quad A = \frac{1}{6} (b - a) \nabla^2 (2a + b)$$

e

$$(4.0.84) \quad \lambda = 1 + \frac{1}{6} (b - a) \nabla^2 (2a + b) - (z - a) \nabla^2 a - \frac{1}{2} \frac{(z - a)^2}{b - a} \nabla^2 (b - a)$$

Troviamo così, per seconda approssimazione delle componenti dello spostamento,

$$(4.0.85) \quad \begin{aligned} -4\pi f &= \frac{\lambda}{b-a} \left[\frac{da}{dx} + \frac{d(b-a)}{dx} \frac{z-a}{b-a} \right] \\ -4\pi g &= \frac{\lambda}{b-a} \left[\frac{da}{dy} + \frac{d(b-a)}{dy} \frac{z-a}{b-a} \right] \\ -4\pi h &= \frac{\lambda}{b-a} \end{aligned}$$

e per la seconda approssimazione del potenziale

$$(4.0.86) \quad \Psi = \frac{z - a}{b - a} + \frac{1}{6} \nabla^2 (2a + b) (z - a) - \frac{1}{2} \nabla^2 a \frac{(z - a)^2}{b - a} - \frac{1}{6} \nabla^2 (b - a) \frac{(z - a)^3}{(b - a)^2}$$

Se σ_a e σ_b sono le densità superficiali, Ψ_a e Ψ_b i potenziali sulle superfici a e b rispettivamente

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \frac{1}{4\pi} (\Psi_a - \Psi_b) \left[\frac{1}{b-a} + \frac{1}{3} \nabla^2 a + \frac{1}{6} \nabla^2 b \right] \\ \sigma_b &= \frac{1}{4\pi} (\Psi_b - \Psi_a) \left[\frac{1}{b-a} - \frac{1}{6} \nabla^2 a - \frac{1}{3} \nabla^2 b \right]\end{aligned}$$

Azione meccanica tra due sistemi elettrizzati

103. Siano E_1 e E_2 i due sistemi elettrizzati di cui ci proponiamo di studiare le azioni reciproche. Supponiamo che la distribuzione dell'elettricità nel sistema E_1 è definita dalla densità di volume ρ_1 per l'elemento le cui coordinate sono x_1, y_1, z_1 . Sia ρ_2 la densità di volume dell'elemento E_2 , le cui coordinate sono x_2, y_2, z_2 .

La componente lungo le x , della forza che agisce sull'elemento E_1 a causa della repulsione dell'elemento E_2 , sarà

$$\rho_1 \rho_2 \frac{x_1 - x_2}{r^3} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2$$

dove

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

e se A rappresenta la componente lungo le x della forza totale che agisce su E_1 in virtù della presenza di E_2

$$(5.0.1) \quad A = \int \int \int \int \int \int \frac{x_1 - x_2}{r^3} \rho_1 \rho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2$$

dove l'integrazione rispetto a x_1, y_1, z_1 si estende a tutto lo spazio occupato da E_1 e l'integrazione rispetto a x_2, y_2, z_2 a tutto lo spazio occupato da E_2 . Ma, poiché ρ_1 è nullo, tranne nel sistema E_1 , e ρ_2 nullo, tranne nel sistema E_2 , il valore dell'integrale non sarà cambiato se estendiamo i limiti di integrazione e se supponiamo che questi limiti siano tutte le integrazioni $\pm\infty$.

Questa espressione della forza è solo la traduzione letterale in simboli matematici della teoria che suppone che la forza elettrica agisce direttamente a distanza tra i corpi e non tiene conto del mezzo circostante.

Se definissimo Ψ_2 il potenziale nel punto x_1, y_1, z_1 dovuto alla presenza del sistema E_2 con l'equazione

$$(5.0.2) \quad \Psi_2 = \iiint \frac{\rho_2}{r} dx_2 dy_2 dz_2$$

Ψ_2 si annulla all'infinito e soddisfa in tutti i punti all'equazione

$$(5.0.3) \quad \nabla^2 \Psi_2 = 4\pi \rho_2$$

Possiamo allora esprimere A sotto forma di un integrale triplo

$$(5.0.4) \quad A = - \iiint \frac{d\Psi_2}{dx} dx_1 dy_1 dz_1$$

Si suppone qui che il potenziale Ψ_2 ha un valore definito in ogni punto del campo ed è una funzione di questo valore, così come la distribuzione ρ_1 dell'elettricità nel primo sistema E_1 , che è espresso dalla forza A , senza che sia fatta menzione esplicitamente della distribuzione dell'elettricità nel secondo sistema E_2 .

Sia Ψ_1 il potenziale dovuto al primo sistema, espresso in funzione di x, y, z e definito dall'equazione

$$(5.0.5) \quad \Psi_1 = \iiint \frac{\rho_1}{r} dx_1 dy_1 dz_1$$

Ψ_1 si annulla a una distanza infinita e soddisfa in ogni punto all'equazione

$$(5.0.6) \quad \nabla^2 \Psi_1 = 4\pi \rho_1$$

Possiamo ora eliminare ρ_1 in A e otteniamo

$$(5.0.7) \quad A = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{d\Psi_2}{dx} \nabla^2 \Psi_1 dx_1 dy_1 dz_1$$

dove la forza è espressa unicamente in funzione di due potenziali.

104. In tutte le integrazioni considerate finora, è indifferente quali limiti prendere, purché questi inglobino l'insieme del sistema E_1 . In quanto segue, supporremo che i sistemi E_1 ed E_2 tali che una certa superficie chiusa s contenga la totalità del sistema E_1 , senza alcuna parte di E_2 .

Poniamo allora

$$(5.0.8) \quad \rho = \rho_1 + \rho_2 \quad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

$$(5.0.9) \quad \begin{array}{l} \text{all'interno di } s \quad \rho_2 = 0 \quad \rho = \rho_1 \\ \text{all'esterno di } s \quad \rho_1 = 0 \quad \rho = \rho_2 \end{array}$$

allora

$$(5.0.10) \quad A_{11} = -\iiint \frac{d\Psi_1}{dx} \rho_1 dx_1 dy_1 dz_1$$

rappresenta la forza risultante parallela alle x , che agisce sul sistema E_1 e che è dovuta all'elettricità di questo stesso sistema. Ma, nella teoria delle azioni dirette a distanza, questa forza deve essere nulla, poiché l'azione di una molecola P su un'altra Q è uguale e opposta a quella di Q su P , e, poiché le componenti di due azioni entrano nell'integrale, essi si annullano a vicenda.

Possiamo quindi scrivere

$$(5.0.11) \quad A = -\iiint \frac{d\Psi}{dx} \nabla^2 \Psi dx_1 dy_1 dz_1$$

dove Ψ è il potenziale dovuto ai due sistemi, essendo l'integrazione limitata ora alla parte dello spazio posto sulla superficie chiusa s , la quale contiene per intero il sistema E_1 , ma non comprende alcuna parte del sistema E_2 .

105. Se l'azione di E_2 su E_1 si esercita non più direttamente e a distanza, ma per la propagazione di una tensione in un mezzo continuo che si estende da E_1 a E_2 ; e, se conosciamo la tensione in ogni punto di una superficie chiusa s che separa completamente E_2 da E_1 , saremo in grado di determinare completamente l'azione meccanica di E_2 su E_1 . Se la tensione propagata attraverso s non rende interamente conto dell'azione esercitata su E_1 , bisogna necessariamente che esista un'azione diretta tra qualcosa di interno e qualcosa di esterno a s .

Se quindi è possibile rendere conto dell'azione di E_2 su E_1 per mezzo di una tensione propagata attraverso il mezzo circostante, deve essere possibile esprimere tale azione sotto forma di un integrale esteso su una superficie qualsiasi s che separa completamente E_1 da E_2 .

Proviamo quindi ad esprimere, sotto forma di integrale di superficie

$$(5.0.12) \quad A = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{d\Psi}{dx} \left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} \right) dx dy dz$$

Potremo farlo per mezzo del teorema III, se possiamo determinare X, Y, Z in modo che

$$(5.0.13) \quad \frac{d\Psi}{dx} \left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} \right) = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}$$

Prendiamo questi termini separatamente:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dx} \frac{d^2\Psi}{dx^2} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 \\ \frac{d\Psi}{dx} \frac{d^2\Psi}{dy^2} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Psi}{dy} \right) - \frac{d\Psi}{dy} \frac{d^2\Psi}{dx dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Psi}{dy} \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 \end{aligned}$$

Analogamente

$$\frac{d\Psi}{dx} \frac{d^2\Psi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Psi}{dz} \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2$$

Se quindi poniamo

$$(5.0.14) \quad \left. \begin{aligned} \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 &= 8\pi p_{xx} \\ \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 &= 8\pi p_{yy} \\ \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 &= 8\pi p_{zz} \\ \frac{d\Psi}{dy} \frac{d\Psi}{dz} &= 4\pi p_{yz} = 4\pi p_{zy} \\ \frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Psi}{dx} &= 4\pi p_{zx} = 4\pi p_{xz} \\ \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Psi}{dy} &= 4\pi p_{xy} = 4\pi p_{yx} \end{aligned} \right\}$$

allora si avrà

$$(5.0.15) \quad A = \iiint \left(\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} \right) dx dy dz$$

estendendosi l'integrazione a tutto lo spazio interno a s . Trasformando questo integrale di volume con il teorema III, si ha

$$(5.0.16) \quad A = \iint (lp_{xx} + mp_{yx} + np_{zx}) ds$$

dove ds è un elemento preso su una superficie chiusa qualsiasi, comprendente la totalità di E_1 e non contenente nulla di E_2 , e dove l, m, n sono i coseno direttori della normale tracciata da s verso l'esterno.

Per le componenti lungo y e z della forza agente su E_1 , si ha pure

$$(5.0.17) \quad B = \iint (lp_{xy} + mp_{yy} + np_{zy}) ds$$

$$(5.0.18) \quad C = \iint (lp_{xz} + mp_{yz} + np_{zz}) ds$$

Se in realtà il sistema E_2 esercita su E_1 un'azione diretta a distanza, senza intervento del mezzo, dovremo considerare le quantità p_{xx}, \dots come semplici abbreviazioni per certe espressioni simboliche, senza attribuirgli alcun significato fisico.

Ma se ammettiamo che le azioni reciproche si trasmettono tra E_1 e E_2 per mezzo di una tensione del mezzo che separa, le (4-16-17-18) danno le componenti della forza risultante, dovuta all'azione sull'esterno della superficie s , di una tensione le cui sei componenti sono p_{xx}, \dots , e dobbiamo, di conseguenza, considerare p_{xx}, \dots come le componenti di una tensione esistente realmente nel mezzo.

106. Per farci un'idea più chiara della natura di questa tensione, supponiamo che si modifichi la forma di una parte della superficie s , di modo che l'elemento ds diviene una parte di una superficie equipotenziale. Questa modifica sarà legittima, purché non tralasciamo alcuna parte di E_1 e non contengiamo alcuna parte di E_2 .

Sia ν una normale tracciata a ds verso l'esterno.

Sia $R = -\frac{d\Psi}{ds}$ l'intensità della forza elettromotrice nella direzione di ν ; allora

$$\frac{d\Psi}{dx} = -Rl \quad \frac{d\Psi}{dy} = -Rm \quad \frac{d\Psi}{dz} = -Rn$$

e le sei componenti della tensione sono

$$\begin{aligned} p_{xx} &= \frac{1}{8\pi} R^2 (l^2 - m^2 - n^2) & p_{yz} &= \frac{1}{4\pi} R^2 mn \\ p_{yy} &= \frac{1}{8\pi} R^2 (m^2 - n^2 - l^2) & p_{zx} &= \frac{1}{4\pi} R^2 nl \\ p_{zz} &= \frac{1}{8\pi} R^2 (n^2 - l^2 - m^2) & p_{xy} &= \frac{1}{4\pi} R^2 lm \end{aligned}$$

se a, b, c sono le componenti della forza agente su ds riferita all'unità di superficie

$$\begin{aligned} a &= lp_{xx} + m\dot{e}_{xy} + np_{xz} = \frac{1}{8\pi}R^2l \\ b &= \frac{1}{8\pi}R^2m \\ c &= \frac{1}{8\pi}R^2n \end{aligned}$$

Pertanto la forza agente tra la parte del mezzo esterno a ds e la parte del mezzo interna a ds è normale all'elemento e diretta verso l'esterno, cioè che è una tensione simile a quella di una corda, il cui valore, per unità di superficie, è $\frac{1}{8\pi}R^2$.

Supponiamo ora che l'elemento ds sia perpendicolare alle superfici equipotenziali che lo incontrano; in questo caso,

$$(5.0.19) \quad l\frac{d\Psi}{dx} + m\frac{d\Psi}{dy} + n\frac{d\Psi}{dz} = 0$$

da cui

$$(5.0.20) \quad 8\pi (lp_{xx} + mp_{xy} + np_{xz}) = l \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] + \\ + 2m\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dy} + 2n\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dz}$$

Moltiplicando la (5-19) per $2\frac{d\Psi}{dx}$ e sottraendo dalla (5-20), troviamo

$$(5.0.21) \quad 8\pi (lp_{xx} + mp_{xy} + np_{xz}) = -l \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] = -lR^2$$

Le componenti della tensione su ds , riferite all'unità di superficie, sono quindi

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{8\pi}R^2l \\ b &= -\frac{1}{8\pi}R^2m \\ c &= -\frac{1}{8\pi}R^2n \end{aligned}$$

Pertanto, se l'elemento ds è ad angolo retto su una superficie equipotenziale, la forza che agisce su di esso è normale alla superficie, e il suo valore numerico, per unità di superficie, è lo stessi del primo caso; ma la direzione della forza è differente, poiché è una pressione invece di una tensione.

Abbiamo così determinato completamente la natura della forza agente in un punto dato del mezzo.

La direzione dell'intensità elettromotrice in questo punto è un asse principale di tensione, e la forza, in questa direzione, è una tensione il cui valore numerico è

$$(5.0.22) \quad p = \frac{1}{8\pi}R^2$$

essendo R l'intensità elettromotrice.

Ogni direzione perpendicolare alla precedente è così un asse principale di tensione, e la forza lungo questo asse è una pressione il cui valore numerico è pure p .

La tensione così definita non è del tipo più generale, poiché fa due delle sue tensioni principali uguali tra loro, e la terza uguale e di segno contrario.

Queste condizioni riducono da sei a tre il numero delle variabili indipendenti che definiscono la tensione; e, di conseguenza, questa tensione è interamente definita dalle tre componenti dell'intensità elettromotrice

$$-\frac{d\Psi}{dx}, -\frac{d\Psi}{dy}, -\frac{d\Psi}{dz}$$

Le tre relazioni tra le sei componenti della tensione sono

$$(5.0.23) \quad \begin{aligned} p_{yz}^2 &= (p_{xx} + p_{yy})(p_{zz} + p_{xx}) \\ p_{zx}^2 &= (p_{yy} + p_{zz})(p_{xx} + p_{yy}) \\ p_{xy}^2 &= (p_{zz} + p_{xx})(p_{yy} + p_{zz}) \end{aligned}$$

107. Esaminiamo ora se i risultati ottenuti devono essere modificati nel caso in cui, una quantità finita di elettricità essendo riunita su una superficie finita, la densità di volume diviene infinita su tale superficie.

In questo caso, abbiamo mostrato (§ 78) che le componenti dell'intensità elettromotrice sono discontinue sulla superficie. Le componenti della tensione saranno quindi pure discontinue sulla superficie.

Siano

l, m, n i coseni direttori della normale a ds ;

P, Q, R le componenti dell'intensità elettromotrice dal lato della superficie dove è tracciata la normale;

P', Q', R' i loro valori dall'altro lato della superficie.

Dalla § 78a, se σ è la densità superficiale,

$$(5.0.24) \quad \left. \begin{aligned} P - P' &= 4\pi\sigma l \\ Q - Q' &= 4\pi\sigma m \\ R - R' &= 4\pi\sigma n \end{aligned} \right\}$$

Sia a la componente lungo x della forza che agisce sull'area unitaria della superficie, e che sia dovuta alla tensione del mezzo delle due parti della superficie,

(5.0.25)

$$\begin{aligned} a &= l(p_{xx} - p'_{xx}) + m(p_{xy} - p'_{xy}) + n(p_{xz} - p'_{xz}) = \\ &= \frac{1}{8\pi}l\{(P^2 - P'^2) - (Q^2 - Q'^2) - (R^2 - R'^2)\} + \frac{1}{4\pi}m(PQ - P'Q') + \frac{1}{4\pi}n(PR - P'R') \\ &= \frac{1}{8\pi}l\{(P - P')(P + P') - (Q - Q')(Q + Q') - (R - R')(R + R')\} + \\ &\quad + \frac{1}{8\pi}m\{(P - P')(Q + Q') + (P + P')(Q - Q')\} + \\ &\quad + \frac{1}{8\pi}n\{(P - P')(R + R') + (P + P')(R - R')\} = \\ &= \frac{1}{2}l\sigma\{l(P + P') - m(Q + Q') - n(R + R')\} + \frac{1}{2}m\sigma\{l(Q + Q')m(P + P')\} + \\ &\quad + \frac{1}{2}n\sigma\{l(R + R') + n(P + P')\} = \\ &= \frac{1}{2}n\sigma(P + P') \end{aligned}$$

Pertanto, supponendo che la tensione in un punto qualunque sia assegnata dalle equazioni (5-14), si trova che la forza risultante agente nella direzione delle x su una superficie elettrizzata, rapportata alla superficie unitaria, è uguale al prodotto della densità superficiale per la media aritmetica delle componenti parallele a x dell'intensità elettromotrice, misurata da entrambe le parti della superficie.

Questo risultato è identico a quello che abbiamo ottenuto al § 79 con un procedimento del tutto simile.

Pertanto l'ipotesi di una tensione del mezzo circostante si può applicare al caso in cui una quantità finita di elettricità è concentrata su una superficie finita.

Nella teoria dell'azione a distanza, la forza risultante che agisce su un elemento di superficie si deduce solitamente considerando una porzione di superficie le cui dimensioni sono molto piccole rispetto ai raggi di curvatura della superficie¹.

Sulla normale innalzata dal punto medio di questa porzione di superficie, si prende un punto P la cui distanza dalla superficie è molto piccola rispetto alle dimensioni di questa parte della superficie. In questo punto, l'intensità elettromotrice dovuta alla piccola porzione di superficie è sensibilmente la stessa nel caso che la superficie fosse un piano illimitato: è quindi $2\pi\sigma$ nella direzione della normale alla superficie. Per un punto P' , dall'altro lato della superficie, l'intensità sarà la stessa, ma nella direzione opposta.

Consideriamo ora la parte dell'intensità elettromotrice che è dovuta al resto della superficie e agli altri corpi elettrizzati, posti a una distanza finita dall'elemento di superficie. Poiché i punti P e P' sono infinitamente vicini tra loro, le componenti dell'intensità elettromotrice dovuta a cariche elettriche a distanza finita saranno le stesse in questi due punti.

¹Questo metodo è dovuto a Laplace (si veda Poisson, *Sur la distribution de l'électricité*, ecc., *Mem. de l'Inst.*, 1811, p. 30.)

Sia P_0 la componente lungo x dell'intensità elettromotrice in A o in A' dovuta alle cariche a distanza finita. Il valore della componente totale in A sarà

$$P = P_0 + 2\pi\sigma l$$

e per A'

$$P' = P_0 - 2\pi\sigma l$$

Pertanto

$$P_0 = \frac{1}{2}(P + P')$$

Ora la forza meccanica risultante che agisce sull'elemento di superficie è dovuta interamente alle cariche elettriche a distanza finita, poiché l'azione dell'elemento su di esso deve avere una risultante nulla; quindi la componente lungo x di questa forza, riferita all'unità di superficie, deve essere

$$a = \sigma P_0 = \frac{1}{2}\sigma(P + P')$$

108. Se, come nella (5-2), definissimo il potenziale supponendo assegnata la distribuzione di elettricità, dal fatto che le azioni e reazioni reciproche di due molecole elettriche sono uguali e opposte, risulta che la componente lungo x della forza dovuta all'azione del sistema su se stesso deve essere nulla, ciò che possiamo scrivere nella forma

$$(5.0.26) \quad \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{d\Psi}{dx} \nabla^2 \Psi dx dy dz = 0$$

ma se definissimo Ψ come una funzione di x, y, z che soddisfa all'equazione $\nabla^2 \Psi = 0$ per ogni punto esterno alla superficie chiusa s , e che diviene nulla all'infinito, sembra necessario dimostrare che l'integrale di volume, esteso a tutta la regione comprendente s , sia nullo.

Una dimostrazione risulta dal teorema del § 100a, secondo il quale, se si dà $\nabla^2 \Psi$ in ogni punto della superficie e se $\Psi = 0$ all'infinito, il valore di Ψ è determinato per ogni punto ed è uguale a

$$(5.0.27) \quad \Psi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{r} \nabla^2 \Psi dx dy dz$$

dove r è la distanza dal punto per il quale si dà la concentrazione di $\Psi = \nabla^2 \Psi$ e quella per la quale si vuole trovare il potenziale Ψ' .

Il teorema si riduce così a quanto abbiamo dedotto dalla prima definizione di Ψ .

Ma se consideriamo Ψ come la funzione fondamentale di x, y, z , dalla quale abbiamo ricavato le altre, è preferibile riportare la (5-26) alla forma di un integrale di superficie

$$(5.0.28) \quad A = \iint (lp_{xx} + mp_{xy} + np_{xz}) dS$$

e se supponiamo che dappertutto la superficie S sia a una grande distanza a dalla superficie s che racchiude tutti i punti per i quali $\nabla^2 \Psi$ è diverso da zero, sappiamo che Ψ non può essere numericamente maggiore di $\frac{e}{a}$, essendo e l'integrale di volume di $\nabla^2 \Psi$, e che R non può essere maggiore di $\frac{d\Psi}{da}$ o $-\frac{e}{a^2}$ e che nessuna delle quantità p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} può essere superiore a p , o $R^2/8\pi$ o $e^2/8\pi a^4$. Pertanto, l'integrale di superficie, preso su una sfera di raggio molto grande a , non può essere superiore a $e^2/2a^2$; e se a cresce indefinitamente, l'integrale di superficie deve finire per annullarsi.

Ma questo integrale di superficie è uguale all'integrale di volume (5-26), il cui valore è lo stesso, qualunque sia l'estensione dello spazio compreso in S , purché S contenga tutti i punti per i quali $\nabla^2 \Psi$ è diverso da zero. Quindi, essendo l'integrale nullo quando a è infinito, deve essere pure nullo quando si prendono per limiti di integrazione qualunque una superficie che contiene tutti i punti per i quali $\nabla^2 \Psi$ non è nullo.

109. La distribuzione delle tensioni, che abbiamo considerato in questo Capitolo, è precisamente quella alla quale è stato condotto Faraday nelle sue ricerche sull'induzione nei dielettrici. Egli le riassume nei termini seguenti:

“(1297). Si può immaginare la forza diretta di induzione come esercitantesi lungo linee comprese e limitate dalle due superfici conduttrici elettrizzate e accompagnate da una forza laterale o trasversale, il cui effetto equivale ad allontanare o a respingere queste linee rappresentative (1224); oppure ancora la forza di attrazione che agisce tra le molecole del dielettrico nel senso dell'induzione è accompagnata da una forza repulsiva o divergente nella direzione trasversale.

“(1298). L'induzione sembra essere un certo stato di polarizzazione delle molecole, nel quale esse sono diffuse dall'azione del corpo elettrizzato; le molecole hanno allora punti o parti positive o negative che si orientano simmetricamente le une rispetto alle altre e rispetto alle superfici o alle molecole induttrici. Questo stato deve essere uno stato di vincolo, poiché nasce e si mantiene per l'azione di una forza, e si ricade allo stato normale o stato di riposo non appena la forza cessa di agire. Non può essere mantenuto da una quantità data di elettricità, se non nelle sole materie isolanti, poiché solo queste sostanze sono capaci di conservare questa disposizione delle molecole.”

Questa è una esatta esposizione delle conclusioni alle quali siamo stati portati dal nostro studio matematico. In ogni punto del mezzo regno uno stato elastico, tale che vi è una tensione lungo queste linee di forza, e pressione lungo tutte le direzioni perpendicolari a queste linee, essendo i valori numerici della tensione e della pressione uguali e varianti entrambi come il quadrato della forza risultante nel punto considerato.

Questa espressione di “tensione elettrica” è stata impiegata con differenti significati dai diversi autori. Io lo impiegherò per indicare la tensione, lungo le linee di forza, che, così come abbiamo visto, varia da un punto ad un altro. ma è sempre proporzionale al quadrato della forza risultante nel punto considerato.

110. L'ipotesi di un simile stato di tensione esistente dentro un dielettrico fluido, come l'aria o la terebentina, può apparire, a prima vista, in contraddizione con il principio stabilito che in un punto di un fluido le pressioni sono uguali in tutte le direzioni. Ma, quando si stabilisce questo principio considerando la mobilità e l'equilibrio delle parti fluide, si ammette precisamente che non esiste nel fluido alcuna azione del genere di quella che supponiamo si produca lungo le linee di forza. Lo stato di tensione che abbiamo studiato è perfettamente compatibile con la mobilità e l'equilibrio di un fluido, poiché abbiamo visto che, se una parte del fluido non ha carica elettrica, essa non è soggetta ad alcuna forza risultante dovuta alle tensioni sulla superficie, per quanto intense siano. È soltanto quando una parte del fluido è carica che il suo stato di equilibrio è alterato dalle tensioni agenti sulla sua superficie e, abbiamo visto che, in questo caso, esso tende effettivamente a muoversi; pertanto lo stato di tensione supposto non è incompatibile con l'equilibrio di un dielettrico fluido.

La quantità W che è stata studiata al Capitolo IV, § 99, si può interpretare come l'energia del mezzo dovuta a questa distribuzione delle tensioni. Dai teoremi di questo Capitolo risulta che la distribuzione delle tensioni che soddisfa alle condizioni enunciate fa di W un minimo assoluto. Ora, se l'energia è un minimo per una configurazione determinata di un sistema, questa configurazione corrisponde all'equilibrio e all'equilibrio stabile; un dielettrico sottoposto all'azione di corpi elettrizzati prenderà da se stesso uno stato in cui le tensioni sono distribuite come abbiamo descritto.

Bisogna ricordarsi con attenzione che abbiamo fatto un solo passo nella teoria delle azioni trasmesse da un mezzo. Abbiamo supposto che questo mezzo è in uno stato di tensione, ma non abbiamo alcun modo di reso conto di questa tensione, né spiegato come essa si mantiene. Tuttavia questo passo mi sembra essere importante, poiché ci permette di spiegare, con l'azione di parti consecutive di un mezzo, fenomeni che si credevano prima non potersi spiegare se non con una azione diretta a distanza.

111. Non sono riuscito a fare il secondo passo, a rendere conto con considerazioni meccaniche

di queste tensioni del dielettrico. Abbandono pertanto la teoria a questo punto, limitandomi ad enunciare quali sono le altre parti del fenomeno dell'induzione nei dielettrici.

1° *Spostamento elettrico*. - Quando l'induzione si trasmette attraverso un dielettrico, vi è dapprima uno spostamento di elettricità nella direzione dell'induzione. Per esempio, in una bottiglia di Leyda la cui armatura interna è carica positivamente e l'armatura esterna negativamente, lo spostamento dell'elettricità positiva attraverso la massa di vetro avviene dall'interno all'esterno.

Durante tutto il tempo che questo spostamento cresce, le cose avvengono come se una corrente di elettricità positiva andasse dall'interno verso l'esterno; analogamente una diminuzione dello spostamento equivarrà a una corrente nel verso opposto.

La quantità totale di elettricità spostata attraverso l'aria da una superficie qualunque fissa nel dielettrico ha per misura la quantità che abbiamo già studiato al § 75, cioè l'integrale di superficie dell'induzione attraverso questa area, moltiplicata per $K/4\pi$, dove K è la capacità induttrice specifica del dielettrico.

2° *Carica superficiale delle molecole del dielettrico*. - Immaginiamo una parte del dielettrico, grande o piccola, separata dal resto da una superficie chiusa ideale. Dobbiamo supporre che su ogni elemento di questa superficie vi sia una carica, che ha per misura lo spostamento totale di elettricità attraverso questo elemento di superficie, contato verso l'interno.

Nel caso di una bottiglia di Leyda la cui armatura interna è carica positivamente, una parte qualunque di vetro avrà la sua faccia interna carica positivamente e la sua faccia esterna negativamente. Se questa porzione è interamente neutralizzata dalla carica opposta delle parti che essa tocca; ma, se essa è a contatto con un corpo conduttore, nel quale non si può mantenere lo stato di induzione, la carica superficiale non è più neutralizzata, ma costituisce la carica apparente che si chiama generalmente *carica del conduttore*.

Di conseguenza, la carica che si trova alla superficie di separazione del conduttore e del mezzo dielettrico e che si chiamava nella vecchia teoria carica del conduttore, deve essere chiamata nella teoria dell'induzione, la *carica superficiale del dielettrico circostante*.

Secondo questa teoria, tutta la carica è l'effetto residuale della polarizzazione del dielettrico. Questa polarizzazione esiste in tutta l'estensione della sua massa; ma essa è neutralizzata dalle cariche inverse delle parti contigue, di modo che gli effetti della carica divengono apparenti solo alla superficie del dielettrico.

La teoria rende conto interamente del teorema del § 77, cioè che l'induzione totale attraverso una superficie è uguale alla quantità totale di elettricità contenuta in questa superficie, moltiplicata per 4π ; poiché ciò che abbiamo chiamato induzione attraverso la superficie non è che lo spostamento elettrico moltiplicato per 4π , e lo spostamento totale verso l'esterno è necessariamente uguale alla carica totale contenuta all'interno della superficie,

La teoria rende pure conto dell'impossibilità di dare alla materia una *carica assoluta*: poiché ogni molecola del dielettrico ha alle sue estremità opposte cariche uguali e opposte; e forse sarebbe ancora più corretto dire che queste cariche sono solo la manifestazione di un solo fenomeno che chiamiamo la *polarizzazione elettrica*.

Un mezzo dielettrico, così polarizzato, è sede di energia elettrica; e l'energia, per unità di volume del mezzo, è numericamente uguale alla tensione elettrica sull'unità d'area, essendo queste due quantità uguali alla metà del prodotto dello spostamento per l'intensità elettromotrice risultante, o

$$p = \frac{1}{2} \mathfrak{D} \mathfrak{E} = \frac{1}{8\pi} K \mathfrak{E}^2 = \frac{2\pi}{K} \mathfrak{D}^2$$

dove p è la tensione elettrica, \mathfrak{D} lo spostamento, \mathfrak{E} l'intensità elettromotrice e K la capacità induttrice specifica.

Se il mezzo non è un isolante perfetto, lo stato di tensione che chiamiamo polarizzazione elettrica si distrugge costantemente. Il mezzo cede alla forza elettromotrice, la tensione elettrica diminuisce e l'energia potenziale di questo stato di vincolo di trasforma in calore. La velocità con la quale si produce questa distruzione dello stato di polarizzazione del mezzo dipende dalla

natura di questo mezzo. In certi tipi di vetro, possono passare giorni o anni prima che la polarizzazione si riduca alla metà del suo valore iniziale. Nel rame, un cambiamento identico avviene in meno di un milionesimo di secondo.

Abbiamo supposto che dopo essere stato polarizzato il mezzo è stato semplicemente abbandonato a se stesso. Nel fenomeno detto *corrente elettrica*, il passaggio continuo dell'elettricità tende a ristabilire lo stato di polarizzazione, così veloce che la conducibilità del mezzo gli permette di distruggersi. Così l'agente esterno, che mantiene la corrente, spende costantemente lavoro per ristabilire la polarizzazione del mezzo, la quale si distrugge costantemente; l'energia potenziale di questa polarizzazione si trasforma costantemente in calore, e, dopo questo consumo di energia che mantiene la corrente, il risultato finale è di innalzare gradualmente la temperatura del conduttore, finché si perde per conduzione e radiazione dalla superficie tanto calore quanto se ne produce nello stesso tempo per il passaggio della corrente elettrica.

Punti e linee di equilibrio

112. Se in un punto del campo elettrico la forza risultante è nulla, questo punto è detto un *punto di equilibrio*.

Se tutti i punti di una linea sono punti di equilibrio, la linea è detta *linea di equilibrio*.

Le condizioni perché un punto sia di equilibrio sono che in esso si abbia

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad \frac{dV}{dy} = 0 \quad \frac{dV}{dz} = 0$$

In un tale punto, il valore di V è quindi massimo o minimo, o stazionario, rispetto alle variazioni delle coordinate. Ma il potenziale può avere valore massimo o minimo solo in un punto carico di elettricità positiva o negativa, o in uno spazio finito limitato da una superficie carica positivamente o negativamente. Se quindi si incontra un punto di equilibrio in una parte del campo che non ha carica, questo può essere solo un punto stazionario, ma non massimo o un minimo.

Infatti, la prima condizione perché si abbia un massimo o un minimo è che

$$\frac{d^2V}{dx^2} \quad \frac{d^2V}{dy^2} \quad \frac{d^2V}{dz^2}$$

siano tutti positivi o negativo se hanno valori finiti. Ora, dall'equazione di Laplace, la somma di queste tre quantità è nulla in un punto dove non vi è carica: questa condizione non può quindi essere soddisfatta.

Invece di ricercare le condizioni analitiche dei casi in cui le tre componenti della forza si annullano simultaneamente, facciamo uno studio generale per mezzo delle superfici equipotenziali.

Se, in un punto P , V passa da un massimo vero e proprio, il valore di V è maggiore in P che in tutti gli altri punti nelle immediate vicinanze; quindi P è circondato da una serie di superfici equipotenziali chiuse, ognuna esterna alla precedente, e in tutti i punti di ognuna di queste superfici la forza elettrica è diretta verso l'esterno. Noi abbiamo dimostrato al § 76 che l'integrale dell'intensità elettromotrice, preso su una superficie chiusa qualunque, è uguale alla carica totale compresa all'interno di questa superficie, moltiplicato per 4π . Nel caso attuale, la forza è diretta verso l'esterno in tutti i punti, e, di conseguenza, l'integrale di superficie è necessariamente positivo: vi è quindi una carica positiva all'interno della superficie; e, siccome questa superficie può essere presa anche vicino a P quanto si vuole, vi è una carica positiva in P .

Si dimostrerà pure che, se V è minimo in P , allora P ha una carica negativa.

Infine, sia P un punto di equilibrio in una regione che non ha carica: descriviamo attorno a P una sfera di raggio molto piccolo. Come abbiamo visto, il potenziale su questa superficie non può essere dappertutto maggiore che in P , né dappertutto più piccolo. Deve quindi essere più grande su certe parti di questa superficie, più piccolo su altre. Queste porzioni di superficie sono limitate da linee lungo le quali il potenziale è lo stesso che in P . Lungo linee tracciate da P ai punti dove il potenziale è inferiore che in P , la forza elettrica è diretta da P verso l'esterno; lungo linee tracciate da P ai punti a un potenziale più elevato, la forza elettrica è diretta dall'esterno verso P : pertanto il punto P è un punto di equilibrio stabile per certi spostamenti, e di equilibrio instabile per gli altri spostamenti.

113. Per determinare il numero dei punti e di linee di equilibrio, consideriamo la o le superfici per le quali il potenziale ha un valore dato C . Chiamiamo *regioni negative* le regioni dove il potenziale ha un valore inferiore a C , *regioni positive* le regioni dove il potenziale ha un valore più grande di C . Siano V_0 il più basso e V_1 il più alto potenziale del campo elettrico. Se

poniamo $C = V_0$, la regione negativa conterrà solo il punto o il conduttore al potenziale più basso, e questo avrà per forza una carica negativa. La regione positiva comprende il resto dello spazio, e poiché circonda la regione negativa, è perifrattico (si veda § 18).

Se aumentiamo il valore di C , la regione negativa si estende e nuove regioni negative vanno a formarsi attorno a corpi carichi negativamente; a ogni regione negativa che si forma così, la regione positiva circostante acquista un grado ulteriore di perifrasi. Quando le regioni negative si estendono, due o più tra di esse possono incontrarsi lungo un punto o una linea. Se $n + 1$ regioni negative si incontrano, la regione positiva perde n gradi di perifrasi e il punto o la linea lungo la quale esse si incontrano è un punto o una linea di equilibrio di grado n .

Quando C diviene uguale a V_1 , la regione positiva si riduce al punto o al conduttore il cui potenziale è più elevato e, di conseguenza, essa ha perso ogni perifrasi; quindi, se ogni punto od ogni linea di equilibrio conta per uno, due o n , secondo il suo grado, il numero totale formato dai punti e linee considerate è inferiore di una unità al numero di corpi carichi negativamente.

Vi sono altri punti e altre linee di equilibrio che si incontrano, quando le regioni positive sono separate tra loro e la regione negativa acquista perifrasi. Il loro numero, contato secondo il loro grado, è inferiore di una unità al numero dei corpi carichi positivamente.

Se chiamiamo positivi i punti o le linee di equilibrio formate dall'intersezione di due o più regioni positive, negative quelle formate dall'incontro di regioni negative e se vi sono p corpi carichi positivamente, n corpi carichi negativamente, la somma dei gradi dei punti e delle linee di equilibrio positive è $p - 1$, e la somma dei gradi dei punti e delle linee di equilibrio negative è $n - 1$. La superficie che circonda il sistema elettrizzato a una distanza infinita deve essere contato come un corpo avente una carica uguale e contraria alla somma delle cariche del sistema.

Ma, oltre a questi punti e a queste linee di equilibrio in numero definito, che sono formate dall'intersezione di differenti regioni, ne possono esistere altre, delle quali possiamo solo dire che sono in numero pari. Infatti, se, estendendosi, una delle regioni negative si sovrappone su se stessa, essa diviene ciclica e, incontrandosi a diverse riprese, può acquisire un numero qualsiasi di gradi di ciclicità, ognuno corrispondente al punto o alla linea di equilibrio che ha prodotto la ciclicità. Se la regione negativa continua ad estendersi fino a riempire tutto lo spazio, essa perde tutti i gradi di ciclicità che aveva acquistato e finisce per divenire aciclica. Vi è pertanto una serie di punti o di linee di equilibrio, sulle quali si perde la ciclicità e sono uguali quanto al numero e al grado dei punti e delle linee sulle quali si era prodotta la ciclicità.

Se la forma dei corpi carichi o dei conduttori è arbitraria, possiamo solo dire che il numero di questi punti addizionali è pari; ma, se si hanno punti carichi, o conduttori sferici, il numero dei punti addizionali non può essere superiore a $(n - 1)(n - 2)$, essendo n il numero dei corpi.

114. Il potenziale vicino a un punto P può essere sviluppato secondo la serie

$$V = V_0 + H_1 + H_2 + \dots$$

dove H_1, H_2, \dots sono funzioni omogenee di x, y, z , i cui gradi sono rispettivamente 1, 2, ...

Poiché le derivate prime di V si annullano in un punto di equilibrio, in un tale punto $H_1 = 0$.

Sia H_n la prima funzione che non si annulla; vicino al punto P , possiamo trascurare davanti a H_n tutte le funzioni di grado superiore.

Ora

$$H_n = 0$$

è l'equazione di un cono di grado n , che è il cono avente il contatto più stretto con la superficie equipotenziale nel punto P .

Si vede quindi che la superficie equipotenziale passante per P ha in questo punto un punto conico al quale è tangente un cono di secondo grado o di un grado superiore. L'intersezione di questo cono con una sfera avente il suo vertice per centro è detta *linea nodale*.

Se il punto P non è su una linea di equilibrio, la linea nodale non ha punti doppi, ma si compone di curve chiuse il cui numero è n o inferiore.

Se la linea nodale ha punti doppi, il punto P è su una linea di equilibrio, e la superficie equipotenziale passante per P si interseca con se stessa lungo questa linea.

Se vi sono punti doppi della linea nodale che non siano diametralmente opposti sulla sfera, il punto P è all'intersezione di tre o più linee di equilibrio; poiché la superficie equipotenziale passante per P si deve tagliare con se stessa lungo ognuna delle linee di equilibrio.

115. Se due falde di una superficie equipotenziale si intersecano, ciò può essere solo ad angolo retto.

Prendendo la tangente alla linea di intersezione per asse z , si ha $d^2V/dz^2 = 0$.

Prendendo pure l'asse delle x lungo la tangente di una delle falde, si ha $d^2V/dx^2 = 0$.

Risulta allora da ciò e dall'equazione di Laplace che $d^2V/dy^2 = 0$, o che l'asse y è tangente all'altra falda. Questo ragionamento suppone H_2 finito. Se H_2 si annulla, prendiamo ancora per asse z la tangente alla linea di intersezione, e poniamo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Allora poiché

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 0 \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0$$

o

$$\frac{d^2V}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2V}{d\theta^2} = 0$$

equazione la cui soluzione ordinata secondo le potenze crescenti di r è

$$V = V_0 + A_1 r \cos(\theta + \alpha_1) + A_2 r^2 \cos(2\theta + \alpha_2) + \dots + A_n r^n \cos(n\theta + \alpha_n)$$

In un punto di equilibrio $A_1 = 0$ e se il primo coefficiente che non si annulla è quello r^n ,

$$V - V_0 = A_n r^n \cos(n\theta + \alpha_n)$$

più termini contenenti potenze più elevate di r .

Questa equazione mostra che le n falde della superficie equipotenziale $V = V_0$ si intersecano sotto angoli che sono tutti uguali a $\frac{\pi}{n}$. Questo teorema è stato stabilito da Rankine¹.

Solo in certe condizioni può esistere una linea di equilibrio nello spazio libero; ma vi è sempre una linea di equilibrio sulla superficie di un conduttore, quando la densità superficiale è positiva in una parte e negativa in un'altra.

Perché un conduttore possa avere cariche contrarie in diversi punti della sua superficie, bisogna che vi siano nel campo punti dove il potenziale è più elevato di quello del corpo e altri punti dove il potenziale è più basso.

Prendiamo dapprima due corpi elettrizzati positivamente allo stesso potenziale, vi sarà tra i due un punto di equilibrio. Facciamo diminuire gradualmente il potenziale del primo corpo: il punto di equilibrio si avvicina e, a un certo momento della nostra operazione, viene a coincidere con un punto della superficie. Se continuiamo l'operazione, la superficie equipotenziale che circonda il secondo corpo, e che è allo stesso potenziale del primo, taglia ad angolo retto la superficie di questo secondo corpo, lungo una curva chiusa che una linea di equilibrio. Questa curva chiusa, dopo aver descritto tutta la superficie del conduttore, va di nuovo a ridursi a un solo punto; poi il punto di equilibrio si allontanerà dall'altra parte del corpo e sarà a una distanza infinita quando i due corpi avranno cariche uguali e contrarie.

Teorema di Earnshaw. 116. Un corpo elettrizzato, posto in un campo di forza elettrico, non può essere in equilibrio stabile.

Supponiamo dapprima che l'elettricità del corpo mobile (A) e quella del sistema di corpi circostanti (B) siano fissi su questi su questi corpi.

Sia V il potenziale in un punto del corpo mobile dovuto all'azione dei corpi circostanti (B), e sia e l'elettricità distribuita su una piccola parte del corpo mobile A attorno al punto considerato. L'energia potenziale di A rispetto a B sarà

$$M = \sum (Ve)$$

estendendosi la somma a ciascuno degli elementi elettrizzati di A .

¹Summary of the Properties of certain Stream Lines, *Phil. Mag.*, ott. 1864; si veda anche, Thomson e Tait, *Natural Philosophy*, § 780; e Rankine e Stokes, in the *Proc. R. S.*, 1867, p. 468; pure W. R. Smith, *Proc. R. S. Edin.*, 1869-70, p. 79.

Siano a, b, c le coordinate di un punto elettrizzato di A , rispetto a tre assi fissi in A e paralleli agli assi x, y, z . Siano ξ, η, ζ le coordinate assolute dell'origine di questo sistema di assi.

Supponiamo per un istante che il corpo A sia vincolato a muoversi parallelamente a se stesso; le coordinate assolute del punto a, b, c divengono

$$x = \xi + a \quad y = \eta + b \quad z = \zeta + c$$

Il potenziale del corpo A rispetto a B si può esprimere dalla somma di un certo numero di termini, in ognuno dei quali V è espresso in funzione di a, b, c e ξ, η, ζ . La somma di questi termini è una funzione di a, b, c che sono costanti per ogni punto del corpo, e di ξ, η, ζ che variano quando il corpo si muove.

Poiché l'equazione di Laplace è soddisfatta per ognuno di questi termini, essa lo è per la loro somma, o

$$\frac{d^2 M}{d\xi^2} + \frac{d^2 M}{d\eta^2} + \frac{d^2 M}{d\zeta^2} = 0$$

Diamo ora ad A un piccolo spostamento, tale che

$$d\xi = ldr \quad d\eta = mr \quad d\zeta = nr$$

e sia dM l'aumento del potenziale di A rispetto al sistema circostante B .

Se questo aumento è positivo, bisognerà spendere lavoro per aumentare r , e vi sarà una forza $R = \frac{dM}{dr}$ che tenderà a diminuire r e a riportare A alla sua posizione iniziale; per questo spostamento, l'equilibrio sarà dunque stabile. Se, al contrario, questo aumento è negativo, la forza tenderà ad aumentare r , e l'equilibrio sarà instabile.

Consideriamo ora una sfera avente il suo centro nell'origine, e un raggio r assai piccolo perché, se il punto fisso del corpo è compreso nella sfera, nessuna parte del corpo mobile A possa coincidere con alcuna parte del sistema esterno B . Allora, poiché nell'interno della sfera $\nabla^2 M = 0$, l'integrale

$$\iint \frac{dM}{dr} dS$$

preso sulla superficie della sfera, sarà nullo.

Pertanto se, su un'altra parte della superficie della sfera, $\frac{dM}{dr}$ è positivo, vi deve essere un'altra parte della superficie dove è negativo: e se il corpo A è spostato in una direzione in cui $\frac{dM}{dr}$ è negativo, tenderà ad allontanarsi dalla sua posizione iniziale e, di conseguenza, l'equilibrio è forzatamente instabile.

Così l'equilibrio è instabile, quando anche il corpo è vincolato a muoversi solo parallelamente a se stesso: a fortiori è instabile, se il corpo è interamente libero.

Supponiamo ora che il corpo A sia un conduttore. Possiamo trattare questo caso come quello dell'equilibrio di un sistema di corpo, essendo l'elettricità mobile considerata come una parte di questo sistema; e potremo concludere che, se il sistema è instabile quando si toglie un certo numero di gradi di libertà fissando l'elettricità, è a fortiori quando questa libertà gli è resa.

Ma possiamo trattare questo caso in un modo più particolare, nel maniera seguente:

In primo luogo, supponiamo che l'elettricità sia fissa su A e che A si sposti della piccola distanza dr . Si è già considerato l'aumento del potenziale di A dovuto a questo spostamento.

In secondo luogo, lasciamo l'elettricità muoversi in A e assumere la sua distribuzione di equilibrio, che è sempre stabile. Durante questo movimento, il potenziale decresce necessariamente di una quantità che si può chiamare Cdr (si veda § 100).

Quindi l'aumento totale del potenziale sarà, quando l'elettricità è libera di muoversi,

$$\left(\frac{dM}{dr} - C \right) dr$$

e la forza tendente a riportare A alla sua posizione iniziale sarà $\frac{dM}{dr} - C$, dove C è sempre positivo.

Abbiamo ora mostrato che $\frac{dM}{dr}$ è negativo in certe direzioni; quindi, quando l'elettricità è libera di muoversi, l'instabilità in queste direzioni è aumentata.

Forma delle superfici equipotenziali e delle linee di induzione in casi semplici

117. Abbiamo visto che si può ridurre la determinazione della distribuzione elettrica alla superficie di un conduttore alla ricerca della soluzione dell'equazione di Laplace

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

essendo V una funzione di x, y, z che è sempre finita e continua, che si annulla all'infinito e che assume un valore costante alla superficie di ogni conduttore.

In generale, i metodi matematici noti non permettono di risolvere questa equazione, in modo da soddisfare a delle condizioni arbitrariamente assegnate; ma è facile trovare un numero qualunque di funzioni V che soddisfano all'equazione e determinare in ogni caso la forma delle superfici conduttrici in modo che queste funzioni V siano soluzioni effettive.

Si vede quindi che ciò che si potrebbe chiamare naturalmente il problema inverso, cioè, determinare la forma dei conduttori, data l'espressione del potenziale, è alquanto più affrontabile del problema diretto: determinare il potenziale data la forma dei conduttori.

Infatti, tutti i problemi elettrici di cui conosciamo la soluzione sono stati combinati con il metodo inverso. È quindi della massima importanza per lo studioso di elettricità conoscere i risultati ottenuti per questa via, poiché il solo metodo che ci permette la soluzione di nuovi problemi consiste nel ridurre questi problemi ai casi di problemi analoghi affrontati con l'aiuto del metodo inverso.

Si può sfruttare in due modi la conoscenza storica di questi risultati: se ci si chiede di combinare uno strumento per compiere misure elettriche della massima precisione possibile, possiamo scegliere per le superfici elettrizzate forme corrispondenti ai casi per i quali conosciamo la soluzione esatta. Se, d'altra parte, ci si chiede di valutare la carica distribuita su corpi di forma data, possiamo partire da un caso in cui una delle superfici equipotenziali assume una forma che si avvicina alla forma data; poi, per tentativi, potremo modificare il problema fino a che risponde più esattamente ai dati. Considerato dal punto di vista matematico, questo metodo è evidentemente molto imperfetto; ma è il solo che abbiamo e se non siamo bravi nello scegliere i nostri dati, possiamo fare solo un calcolo approssimato della distribuzione. Ciò che ci serve, è quindi conoscere la forma delle superfici equipotenziali e delle linee di induzione in tanti casi differenti che potremo riunire e ricordare. Per certe classi di casi, quelli che si riferiscono alle sfere, per esempio, vi sono metodi matematici noti, dei quali ci possiamo servire. Negli altri casi, non abbiamo altra risorsa che il metodo più terra terra di delineare per tentativi figure e di scegliere tra esse quelle che differiscono meno dalle figure di cui abbiamo bisogno.

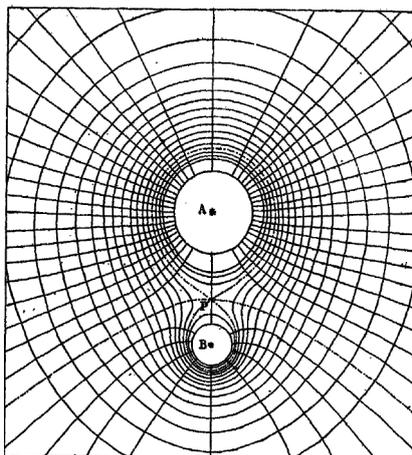
Quest'ultimo metodo può, credo, essere di qualche utilità, anche nei casi in cui si è ottenuta la soluzione esatta, poiché trovo che, quando l'occhio conosce la forma delle superfici equipotenziali, si è spesso condotti a ben scegliere il metodo per la soluzione matematica.

Ho quindi tracciato i diagrammi di numerosi sistemi di superfici equipotenziali e di linee di induzione, in modo che il lettore possa familiarizzare con la loro forma. I metodi mediante i quali si possono tracciare simili figure sono esposti al § 123.

118. La prima di queste tavole rappresenta le sezioni delle superfici equipotenziali che circondano due punti aventi cariche dello stesso segno e nel rapporto di 20 a 5.

Ogni punto è circondato da un sistema di superfici equipotenziali, tanto più vicine ad essere delle sfere quanto esse sono più piccole, sebbene alcune di esse non siano rigorosamente delle

sfere. Se si prendono per superfici di due corpi conduttori due di queste superfici, una attorno ad ogni punto, quasi sferiche, ma non completamente, e se questi corpi sono carichi di elettricità dello stesso segno, essendo il rapporto delle cariche di 4 a 1, il diagramma rappresenterà le superfici equipotenziali, purché si cancellino le curve interne ai due corpi. Si vede da questo diagramma che l'azione tra i corpi è la stessa che tra due punti aventi le stesse cariche, che non sarebbero esattamente nel mezzo dell'asse di ogni corpo, ma un poco più spostate l'una dall'altra di quanto non sono questi punti dal mezzo.



tav.1: Linee di forza e superfici equipotenziali. $A = 20$, $B = 5$, P punto di equilibrio, $AP = \frac{2}{3}AB$

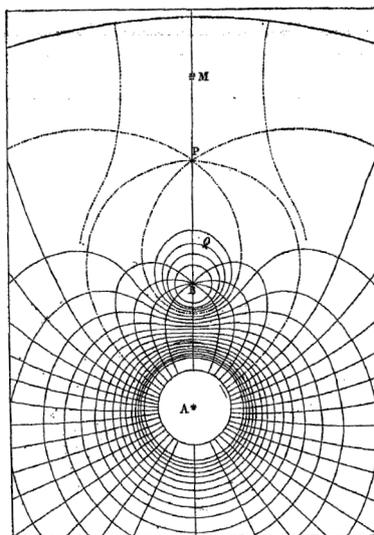
Lo stesso diagramma ci permette di vedere quale sarà la distribuzione su una delle superfici ovali, più larghe da un capo all'altro, che circondano i due centri. Un simile corpo, caricato con 25 unità di elettricità e non sottoposto ad alcuna influenza esterna, avrà una densità superficiale massima all'estremità affusolata, minore all'altra estremità, e minima su un cerchio un poco più vicino al punto affusolato che all'altro.

Vi è una superficie equipotenziale rappresentata da una linea tratteggiata, che è formata da due falde che si incontrano nel punto conico P . Questo è un punto di equilibrio, e la densità superficiale per un corpo avente la forma di questa superficie sarà zero in questo punto.

Le linee di forza formano in questo caso due sistemi distinti, separati tra loro da una superficie di sesto grado, indicata da una linea tratteggiata passante per il punto di equilibrio e presentante qualche somiglianza con una delle falde di un iperboloido a due falde.

Il diagramma può pure servire a rappresentare le superfici equipotenziali e le linee di forza, nel caso di due sfere di materia sottoposte alla gravitazione, le cui masse stanno tra loro come 4 a 1.

119. Sulla seconda tavola, abbiamo ancora due punti le cui cariche stanno come 20 a 5; ma una è positiva e l'altra negativa. In questo caso, una delle superfici equipotenziali, quella che corrisponde al potenziale zero, è una sfera: è rappresentata sul diagramma dal cerchio Q . Si vedrà l'importanza di questa superficie elettrica quando verremo alla teoria delle immagini elettriche.



tav. 2: Linee di forza e superfici equipotenziali. $A = 20$, $B = -5$, P punto di equilibrio, $AP = 2AB$
 M , punto dove la forza è massima lungo l'asse
 Q , superficie sferica di potenziale zero
 La linea tratteggiata è quella della forza $\Psi = 0, 1$

Si vede da questo diagramma che due corpi rotondi, carichi di elettricità contraria, si attraggono come due punti aventi le stesse cariche, ma un poco più ravvicinati tra loro di quanto non sono i punti medi dei corpi rotondi.

Qui ancora, una delle superfici equipotenziali è formata da due falde, una interna che circonda il punto la cui carica è 5, l'altro esterno che comprende i due corpi, incontrandosi queste due falde in un punto conico P , che è un punto di equilibrio.

Se la superficie di un conduttore ha la forma della falda esterna, quella di un corpo arrotondato come una mela e presentante una cavità conica a uno dei terminali del suo asse, potremo determinare la densità superficiale in ciascuno dei suoi punti. La densità superficiale al fondo della cavità sarà nulla.

Attorno a questa superficie, ne abbiamo altre che hanno una cavità arrotondata, ridotta sempre più per finire a scomparire sulla superficie equipotenziale che passa per il punto indicato con M .

Le linee di forza di questo diagramma formano due sistemi separati da una superficie che passa per il punto di equilibrio.

Se consideriamo i punti posti sull'asse al di là del punto B , troviamo che la forza risultante va diminuendo fino al punto doppio P , dove si annulla. Essa cambia allora di segno, raggiunge un massimo in M . per poi decrescere con continuità.

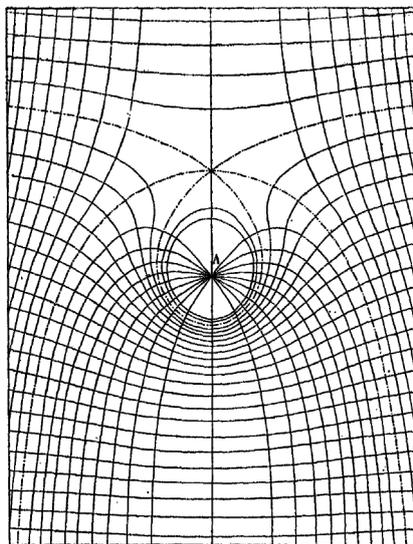
Ma questo massimo lo è solo relativamente agli altri punti dell'asse; poiché, se consideriamo una superficie passante per M e perpendicolare all'asse, M è il punto in cui la forza è minima relativamente ai punti vicino su questa superficie.

120. La tavola III rappresenta le superfici equipotenziali e le linee di induzione dovute a un punto la cui carica è 10, posta in A e circondata da un campo di forza che, prima dell'introduzione del punto carico, era dappertutto uniforme, in direzione come una grandezza.

Le superfici equipotenziali hanno ognuna un piano asintotica. Una di esse, indicata da un tratto a puntini, presenta un punto conico e una falda che circonda il punto A . Al di sotto di questa, le superfici equipotenziali hanno una sola falda che presenta una depressione vicino all'asse. Al di sopra, esse hanno una parte chiusa che circonda A , e un'altra falda separata che presenta una leggera depressione vicino all'asse.

Se prendiamo per superficie di un conduttore una delle superfici al di sotto di A , e un'altra molto lontana al di sopra di A per superficie di un secondo conduttore a un potenziale differente, il sistema delle linee e delle superfici comprese tra i due conduttori raffigurerà la distribuzione

della forza elettrica. Se il conduttore inferiore è molto lontano da A , la sua superficie è quasi piana, e abbiamo là la soluzione del problema della distribuzione elettrica su due superfici, che entrambe sono pressoché piane e parallele, tranne che la superficie superiore presenta verso la sua metà una protuberanza che è più o meno accentuata, secondo la superficie equipotenziale particolare scelta.



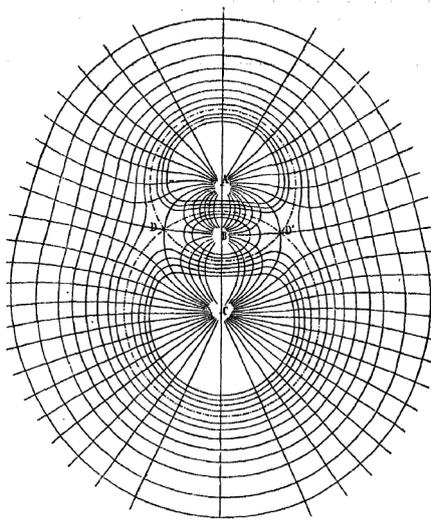
tav.3: Linee di forza e superfici equipotenziali. $A = 10$

121. La tavola IV rappresenta le superfici equipotenziali e le linee di induzione dovute a tre punti A, B, C , essendo la carica di A di 15 unità elettriche positive, quella di B di 12 negative, e quella di C di 30 positive. Questi punti sono posti su una stessa retta, di modo che

$$AB = 9 \quad BC = 16 \quad AC = 25$$

In questo caso, la superficie al potenziale zero è formata da due sfere i cui centri sono A e C e i raggi 15 e 20. Queste sfere si incontrano lungo un cerchio che taglia il piano del foglio ad angolo retto in D e D' , di modo che B è il centro di questo cerchio il cui raggio è 12. Questo cerchio è un esempio di linea di equilibrio, poiché la forza risultante è nulla in ogni punto di questa linea.

Se supponiamo che la sfera di centro A sia un conduttore carico di 3 unità di elettricità positiva e soggetto all'influenza di 20 unità simili poste in C , lo stato di questo sistema sarà rappresentato dal diagramma dal quale avremo eliminato tutte le linee interne alla sfera A . La parte di questa sfera che è al di là del piccolo cerchio DD' è carica negativamente per l'influsso di C ; tutto il rimanente della sfera è carico positivamente, e il piccolo cerchio DD' è una linea sulla quale non vi è carica.



tav. 4: Linee di forza e superfici equipotenziali. $A = 15$, $B = -12$, $C = 20$

Possiamo così considerare il diagramma come rappresentante la sfera di centro C carica di 8 unità di elettricità positiva e sottoposta all'influsso di 15 unità simili poste in A .

Si può ancora prendere questo diagramma per rappresentare un conduttore formato da grandi segmenti di sfera che si intersecano in DD' e carichi di 23 unità positive.

Ritourneremo sullo studio di questi diagrammi come applicazione della teoria delle immagini elettriche di Thomson (si veda § 168).

122. Questi diagrammi saranno pure studiati per comprendere più chiaramente il linguaggio di Faraday, che parla di *linee di forza*, di *forza di un corpo elettrizzato*, ecc.

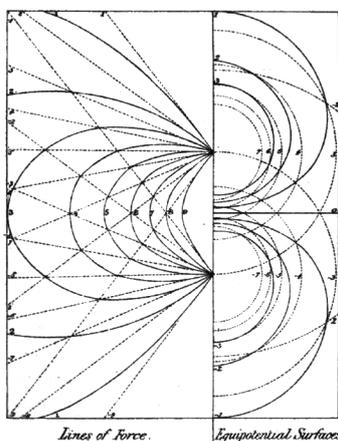
Sotto il nome di forza si considera specialmente questa proprietà dell'azione che si esercita tra due corpi materiali, in virtù della quale i movimenti di questi corpi divengono differenti da quelli che si avrebbero in assenza di tale azione. Se si considerano i due corpi contemporaneamente, l'insieme del fenomeno si chiama *tensione* e può essere definito come consistente in un trasporto di quantità di moto da un corpo all'altro. Quando portiamo la nostra attenzione solo sul primo dei corpi, la tensione è detta *forza motrice* o semplicemente *forza agente su questi corpi*, ed essa ha per misura la quantità di moto che il corpo riceve nell'unità di tempo.

L'azione meccanica che si esercita tra due corpi elettrizzati è una tensione, quella che si esercita solo su uno di essi è una forza. La forza esercitata su un piccolo corpo elettrizzato è proporzionale alla sua carica, e la forza per l'unità di carica è detta *intensità della forza*.

Il termine *induzione* è stato impiegato da Faraday per indicare il modo un cui le cariche dei corpi dipendono le une dalle altre, essendo ogni unità di carica positiva collegata a una unità di carica negativa da una linea che, su tutto il suo percorso in un dielettrico fluido, ha la stessa direzione dell'intensità elettrica. Una simile linea è spesso chiamata una *linea di forza*; ma è più corretto chiamarla una *linea di induzione*.

Ora, secondo le idee di Faraday, la quantità di elettricità di un corpo ha come misura il numero di linee di forza o piuttosto di induzione che fuoriescono da questo corpo. Queste linee devono tutte finire da qualche parte, su corpi vicini, sui meri e il soffitto della camera, sulla Terra o sui corpi celesti; e dove esse terminano si trova una quantità di elettricità precisamente uguale e contraria a quella che si trova sulla parte del corpo da cui sono partite. Esaminando i diagrammi, si vede che è proprio così. Non vi è quindi contraddizione tra i punti di vista di Faraday e i risultati matematici della vecchia teoria; al contrario, l'idea delle linee di forza getta una grande luce su questi risultati: essa sembra fornirci il mezzo per ottenere un collegamento continuo dei ragionamenti, dalle concezioni assai poco prive di flessibilità della vecchia teoria, fino alle nozioni suscettibili di maggiore ampiezza; essa sembra così aprirci un campo esteso per aumentare le nostre conoscenze mediante nuove ricerche.

123. Ecco in quale modo sono costruiti questi diagrammi: Prendiamo dapprima il caso di un solo centro di forza, un piccolo corpo elettrizzato con una carica e . Il potenziale alla distanza r è $V = \frac{e}{r}$; da cui, se poniamo $r = \frac{e}{V}$, ricaviamo r raggio della sfera per la quale il potenziale è V . Se ora diamo a V i valori 1, 2, 3, ... e se tracciamo le sfere corrispondenti, otterremo una serie di superfici equipotenziali, i cui potenziali sono quelli che sono misurati dai numeri naturali. Le sezioni di queste sfere con un piano passante per il loro centro comune sono cerchi che possono essere caratterizzati ognuno dal numero che rappresenta il suo potenziale. Queste sezioni sono rappresentate dai semicerchi a puntini sulla parte destra della fig. 6.



Metodo di tracciatura delle linee di forza e delle superfici equipotenziali

Se vi è un altro centro di forza, possiamo pure tracciare le superficie equipotenziali corrispondenti: se ora vogliamo trovare la forma delle linee equipotenziali dovute a questi due centro simultaneamente, ci dobbiamo ricordare che se V_1 è il potenziale dovuto a un punto e V_2 quello dovuto all'altro, il potenziale dovuto ai due sarà $V = V_1 + V_2$. Pertanto, poiché a ogni intersezione delle superfici equipotenziali conosciamo V_1 e V_2 , conosciamo anche il valore di V . Se quindi tracciamo una superficie che passa per tutte le intersezioni per le quali il valore di V è lo stesso, questa superficie coinciderà con la reale superficie equipotenziale in tutte queste intersezioni; e se, nei sistemi iniziali, si sono tracciate le superfici sufficientemente ravvicinate, la nuova superficie potrà essere tracciata con un grado di precisione a piacere. Le linee equipotenziali dovute a due punti la cui cariche sono uguali e contrarie sono rappresentate nella parte destra della fig. 6.

Questo metodo può essere applicato al tracciato di un sistema qualunque di superfici equipotenziali, quando il potenziale è la somma di due altri per i quali si sono già tracciate le superficie equipotenziali.

Le linee di forza dovute a un solo centro di forza sono linee rette radiali da questo centro. Se vogliamo rappresentare con queste linee l'intensità così come la direzione della forza in un punto, dobbiamo tracciarle in modo che esse intercettino sulle superfici equipotenziali parti sulle quali l'integrale di superficie dell'induzione ha un valore determinato. Il modo migliore di farlo è supporre che la nostra figura piano sia la sezione di una figura dello spazio generata dalla rotazione della figura piana attorno a un asse passante per il centro di forza. Ogni linea retta irraggiante a partire da questo punto e formante con l'asse un angolo θ descriverà un cono e l'integrale di superficie dell'induzione che si esercita attraverso la parte intercettata da questo cono su una superficie qualunque, dal lato della direzione positiva dell'asse è,

$$2\pi e(1 - \cos \theta)$$

Se supponiamo, inoltre, che la superficie è limitata alla sua intersezione con due piano passanti per l'asse e inclinati l'uno sull'altro di un angolo il cui arco è uguale alla metà del raggio, l'induzione attraverso la superficie così limitata è

$$e(1 - \cos \theta)$$

Porremo

$$e(1 - \cos \theta) = 2\Phi$$

da cui

$$\theta = \arccos \left(1 - 2\frac{\Phi}{e} \right)$$

Se ora assegniamo a Φ una serie di valori $1, 2, 3, \dots, e$, troveremo una serie corrispondente di valori di θ , e se e è un numero intero, il numero di linee di forza corrispondenti, ivi compreso l'asse, sarà uguale a e .

Abbiamo così un metodo per tracciare le linee di forza, in modo che la carica di un centro sia indicata dal numero di linee che si irradiano da questo centro e che l'induzione attraverso una superficie limitata nel modo descritto abbia per misura il numero delle linee di forza che attraversano questa superficie. Le linee rette a puntini, a sinistra della fig. 6, rappresentano le linee di forza dovute a ciascuno dei due punti elettrizzati le cui cariche sono $+10$ e -10 .

Se vi sono due centri di forza sull'asse della figura, possiamo tracciare le linee di forza per ognuno degli assi corrispondenti ai valori Φ_1 e Φ_2 ; e, tracciando delle curve da quelle delle intersezione di queste linee per le quali il valore di $\Phi_1 + \Phi_2$ è lo stesso, e analogamente possiamo combinare due qualsiasi di linee di forza, simmetricamente posto da una parte e dall'altro di uno stesso asse. Le curve a tratto pieno, sulla sinistra della fig. 6, rappresentano le linee di forza dovute all'azione simultanea di due punti elettrizzati.

Dopo aver costruito con questo metodo le superfici equipotenziali e le linee di forza, si può verificare l'esattezza del disegno, osservando se i due sistemi di linee sono sempre ortogonali e se la distanza delle superfici equipotenziali consecutive sta alla distanza delle linee di forza consecutive come la semi distanza dall'asse sta all'unità di lunghezza adottata nello schema.

Nel caso di un simile sistema, di dimensioni finite, la linea di forza, il cui indice è Φ , ha un asintoto che passa per il centro elettrico (§ 89d) del sistema, e che è inclinato sull'asse di un angolo il cui coseno è $1 - 2\frac{\Phi}{e}$, essendo e la carica totale del sistema, purché Φ sia più piccolo di e . Le linee di forza il cui indice è maggiore di e sono curve chiuse; se e è nullo, tutte le linee di forza sono chiuse.

Le linee di forza corrispondenti a un campo di forze uniforme parallelo all'asse sono parallele all'asse, le cui distanze dall'asse sono le radici quadrate di una progressione aritmetica.

La teoria delle superfici equipotenziali e delle linee di forza nel piano sarà data quando presenteremo la teoria delle funzioni coniugate¹.

¹Si veda una Memoria *Sur le mouvement de l'électricité dans les surfaces conductrices*, del prof. W. U. Smith (*Proc. Roy. Soc. Edinb.*, 1869-70, p. 79)

Semplici casi di distribuzione

Due piani paralleli

124. Consideriamo in primo luogo due superfici conduttrici piane e parallele, di grandezza infinita, separate tra loro di una distanza c e mantenute ai potenziali A e B .

È chiaro che, in questo caso, il potenziale V è una funzione della distanza z dal piano A e che, in un piano parallelo compreso tra A e B , è lo stesso in tutti i punti, tranne vicino ai limiti delle superfici elettrizzate; ma, per ipotesi, questi limiti sono a una distanza infinitamente grande dal punto considerato.

Di conseguenza, l'equazione di Laplace si riduce a

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

il cui integrale è

$$V = C_1 + C_2z$$

e, poiché $V = A$ per $z = 0$, e $V = B$ per $z = c$,

$$V = A + (B - A) \frac{z}{c}$$

Per tutti i punti compresi tra i piani, l'intensità risultante è normale ai piani, e la sua grandezza è

$$R = \frac{A - B}{c}$$

Nella massa dei conduttori stessi, $R = 0$. Pertanto l'elettricità è distribuita sul primo piano con una densità superficiale σ , tale che

$$4\pi\sigma = R = \frac{A - B}{c}$$

Sull'altra superficie, dove il potenziale è B , la densità superficiale σ' è uguale e di segno contrario a σ , di modo che

$$4\pi\sigma = -R = \frac{B - A}{c}$$

Consideriamo ora, sulla prima superficie, un'area S presa in modo che nessuna delle sue parti sia vicina ai limiti della superficie.

La quantità di elettricità distribuita su questa superficie è $S\sigma = e_1$, e dal § 79, ed essendo la forza agente su ogni unità di elettricità $\frac{1}{2}R$, la forza totale che agisce sull'area S e che attrae verso l'altro piano è

$$F = \frac{1}{2}R, S\sigma = \frac{1}{8\pi}R^2S = \frac{S}{8\pi} \frac{(B - A)^2}{c^2}$$

In tal modo l'attrazione è espressa in funzione dell'area S , della differenza di potenziale tra e due superfici $(A - B)$ e della loro distanza c . L'attrazione, espressa in funzione della carica e_1 che è alla superficie S , è

$$F = \frac{2\pi}{S} e_1^2$$

L'energia elettrica, dovuta a questa distribuzione sull'area S e alla distribuzione sull'area corrispondente S' , determinata proiettando S sulla superficie B con un sistema di linee di forza,

le quali sono, nel caso presente, normali ai piani, è

$$W = \frac{1}{2} (e_1 A + e_2 B) = \frac{1}{2} \frac{S (A - B)^2}{c} = \frac{R^2}{8\pi} 8c = \frac{2\pi}{S} e_1^2 c = Fc$$

La prima di queste espressioni è quella generale dell'energia elettrica (§ 84).

La seconda fornisce l'energia in funzione dell'area, della distanza, della differenza tra i potenziali.

La terza la dà in funzione della forza risultante R , del volume Sc compreso tra le aree S e S' e mostra che l'energia per unità di volume è p , dove $8\pi p = R^2$.

L'attrazione dei piani è pS ; in altri termini, vi è una tensione elettrica (o pressione negativa) uguale a p su ogni unità di superficie.

La quarta espressione dà l'energia in funzione della carica.

La quinta mostra che l'energia elettrica è uguale al lavoro che compirebbe la forza elettrica se le due superfici fossero portate a contatto, spostandosi parallelamente a se stesse e mantenendo le loro cariche.

Per esprimere la carica in funzione della differenza di potenziale, abbiamo

$$e_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{S}{c} (A - B) = q (A - B)$$

Il coefficiente q rappresenta la carica dovuta alla differenza di potenziali uguali all'unità. Questo coefficiente è detto la capacità della superficie S , dovuta alla posizione rispetto alla superficie opposta.

Supponiamo ora che il mezzo che separa le due superfici non sia più l'aria, ma qualche altro dielettrico, il cui potere induttore specifico è K ; la carica dovuta a una differenza di potenziali data è k volte maggiore di quando il dielettrico è l'aria, o

$$e_1 = \frac{KD}{4\pi c} (A - B)$$

L'energia totale sarà

$$W = \frac{KS}{8\pi c} (A - B)^2 = \frac{2\pi}{KS} e_1^2 c$$

La forza agente tra le superfici sarà

$$F = pS = \frac{KS}{8\pi} \frac{(A - B)^2}{c^2} = \frac{2\pi}{KS} e_1^2$$

pertanto la forza che agisce tra due superfici mantenute a potenziali dati varia proporzionalmente al potere induttore specifico K del dielettrico; ma la forza che agisce tra due superfici cariche di quantità date di elettricità varia in ragione inversa di K .

Due superfici sferiche concentriche. 125. Siano due superficie sferiche concentriche, di raggio a e b , con b il maggiore, che sono mantenute a potenziali A e B ; è chiaro che il potenziale V è una funzione della distanza dal centro. In questo caso, l'equazione di Laplace diviene

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0$$

La soluzione di questa è

$$V = C_1 + C_2 r^{-1}$$

e la condizione che $V = A$ quando $r = a$, e $V = B$ quando $r = b$, danno per lo spazio compreso tra le superfici sferiche

$$V = \frac{Aa - Bb}{a - b} + \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} r^{-1}$$

$$R = -\frac{dV}{dr} = \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} r^{-2}$$

Se σ_1 e σ_2 sono le densità superficiali sulle superfici opposte di una sfera di raggio a e di una cavità sferica di raggio b ,

$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} \quad \sigma_2 = \frac{1}{4\pi b^2} \frac{B - A}{a^{-1} - b^{-1}}$$

Se e_1 e e_2 sono le cariche totali di elettricità su ciascuna di queste due superfici

$$e_1 = 4\pi a^2 \sigma_1 = \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} = -e_2$$

La capacità della sfera interna è quindi $\frac{ab}{b-a}$.

Se la superficie esterna della sfera avvolgente è pure sferica e di raggio c , e se non vi sono altri conduttori nelle vicinanze, la carica sulla sua superficie esterna è

$$e_2 = Bc$$

Pertanto la carica totale sulla sfera interna è

$$e_1 = \frac{ab}{b-a} (A - B)$$

e quella della sfera esterna

$$e_2 + e_3 = \frac{ab}{b-a} (B - A) + Be$$

Se si pone $b = \infty$, si ha il caso di una sfera nello spazio infinito. La capacità elettrica di una simile sfera è a , cioè che essa è numericamente uguale al raggio.

La tensione elettrica sull'unità di superficie della sfera interna è

$$p = \frac{1}{8\pi} \frac{b^2 (A - B)^2}{a^2 (b - a)^2}$$

La risultante di questa tensione su una semisfera è $\pi a^2 p = F$; essa è normale alla base di questo semisfera, e, se essa è controbilanciata da una tensione superficiale applicata lungo il cerchio che limita la semisfera, essendo T la tensione sull'unità di lunghezza, si ha

$$F = 2\pi a T$$

Pertanto

$$F = \frac{b^2 (A - B)^2}{8 (b - a)^2} = \frac{e_1^2}{8a^2} \quad T = \frac{b^2 (A - B)^2}{16\pi a (b - a)^2}$$

Se una bolla di sapone sferica è elettrizzata al potenziale A , essendo il suo raggio a , la sua carica sarà Aa , e la densità superficiale sarà

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{A}{a}$$

L'intensità risultante è $4\pi\sigma$ sulla superficie, e zero immediatamente al di fuori, all'interno della bolla, di modo che, dal § 79, la forza elettrica agente sull'unità di superficie è uguale a $2\pi\sigma^2$ e diretta verso l'esterno: pertanto, l'elettrizzazione diminuirà la pressione dell'aria all'interno della bolla di $2\pi\sigma^2$ o

$$\frac{1}{8\pi} \frac{A^2}{a^2}$$

Ma si può mostrare che, se T_0 è la tensione che si esercita nello strato liquido lungo una linea avente l'unità di lunghezza, la pressione che è necessario esercitare dall'interno per impedire alla bolla di comprimersi è $\frac{2T_0}{a}$. Pertanto, la forza elettrica sarà proprio sufficiente per mantenere la bolla in equilibrio quando la pressione dell'aria è la stessa dall'interno verso l'esterno, se

$$A^2 = 16\pi a T_0$$

Due superfici cilindriche infinite aventi lo stesso asse. 126. Sia a il raggio della superficie esterna di un cilindro conduttore; sia b il raggio della superficie interna di un cilindro cavo, avente lo stesso asse del primo. Siano A e B i loro rispettivi potenziali. Poiché, in questo caso, il potenziale V è una funzione della distanza r dall'asse, l'equazione di Laplace diviene

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = 0$$

da cui

$$V = C_1 + C_2 \log r$$

Poiché $V = A$ per $r = a$ e $V = B$ per $r = b$,

$$V = \frac{A \log \frac{b}{r} + B \log \frac{r}{a}}{\log \frac{b}{a}}$$

Se σ_1 e σ_2 sono le densità superficiali delle superfici interne ed esterne,

$$4\pi\sigma_1 = \frac{A-B}{a \log \frac{b}{a}} \quad 4\pi\sigma_2 = \frac{B-A}{b \log \frac{b}{a}}$$

Se e_1 ed e_2 sono le cariche sulle porzioni dei due cilindri che sono comprese tra due sezioni trasversali all'asse, distanti tra loro di una lunghezza l ,

$$e_1 = 2\pi a l \sigma_1 = \frac{1}{2} \frac{A-B}{\log \frac{b}{a}} l = -e_2$$

La capacità di una lunghezza l del cilindro interno è quindi

$$\frac{1}{2} \frac{l}{\log \frac{b}{a}}$$

Se, invece dell'aria, lo spazio compreso tra i due cilindri è occupato da un dielettrico di potere induttivo specifico K , la capacità del cilindro è

$$\frac{1}{2} \frac{lK}{\log \frac{b}{a}}$$

L'energia dovuta all'elettricità distribuita sulla parte del cilindro che abbiamo considerato è

$$\frac{1}{4} \frac{lK (A-B)^2}{\log \frac{b}{a}}$$

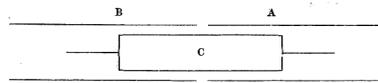


Fig. 5.

127. Siano A e B (fig. 5) due conduttori cilindrici cavi, di lunghezza indefinita, aventi per asse comune l'asse x , posti l'uno dal lato positivo, l'altro dal lato negativo dell'origine, e separati da uno stretto intervallo vicino all'origine delle coordinate.

Sia C un cilindro cavo, di lunghezza $2l$, posto in modo che il suo punto medio sia a una distanza x dal lato positivo dell'origine e sia introdotto nei due cilindri cavi.

Siano A il potenziale del cilindro cavo positivo, B quello del cilindro cavo negativo, C quello del cilindro interno; e siano α e β le capacità dell'unità di lunghezza di C messo in presenza di A e di B .

La densità superficiale in punti fissi dei cilindri posti sia vicino all'origine, sia a piccole distanze dalle estremità del cilindro interno, non dipenderà dal valore di x , purché una lunghezza considerevole del cilindro interno penetri in ognuno dei cilindri cavi. Vicino alla fine dei cilindri cavi e alle estremità del cilindro interno, vi saranno distribuzioni che non siamo ancora in grado di calcolare; ma la distribuzione vicino all'origine non sarà modificata dal moto del cilindro interno, fintanto che nessuna estremità di questo cilindro arriverà vicino all'origine.

L'elettricità distribuita sulle parti finali del cilindro interno si sposterà con essa, di modo che il solo effetto del moto sarà di aumentare o diminuire la lunghezza delle parti del cilindro interno sulle quali la distribuzione è la stessa che sul cilindro indefinito.

Pertanto, l'energia totale del sistema sarà, fintanto che dipende da x ,

$$Q = \frac{1}{2} \alpha (l+x) (C-A)^2 + \frac{1}{2} \beta (l-x) (C-B)^2$$

più quantità indipendenti da x , e la forza risultante parallela all'asse del cilindro sarà

$$X = \frac{dQ}{dx} = \frac{1}{2} \alpha (C-A)^2 - \frac{1}{2} \beta (C-B)^2$$

Se i cilindri A e B hanno le stesse sezioni, $\alpha = \beta$, e

$$X = \alpha (B - A) \left(C - \frac{1}{2} (A + B) \right)$$

Si vede quindi che esiste una forza costante agente sul cilindro interno e tendente a tirarlo all'interno di quello dei due cilindri cavi il cui potenziale differisce di più del suo.

Se C ha un valore numerico considerevole e $A + B$ è comparativamente piccolo, la forza è circa

$$X = \alpha (B - A) C$$

così che la differenza di potenziali dei due cilindri potrà essere misurata, se si può misurare X , e che precisione di una misura potrà essere aumentata, aumentando C , il potenziale del cilindro interno.

Questo principio, sotto una forma modificata, è utilizzato nell'elettrometro di Thomson, § 219.

La stessa disposizione di tre cilindri può servire a misurare la capacità. Si collegano B e C : se il potenziale di A è nullo, se quello di B e C è V , la quantità di elettricità su A sarà

$$E_3 = (q_{13} + \alpha (l + x)) V$$

Se quindi si sposta C verso destra, fino a che x diviene $x + \xi$, la capacità del cilindro C aumenta di una quantità determinata $\alpha \xi$, dove

$$\alpha = \frac{1}{2 \log \frac{b}{a}}$$

essendo a e b i raggi delle superfici cilindriche opposte.

Armoniche sferiche

128. La teoria matematica delle armoniche sferiche è stata oggetto di numerosi Trattati speciali. L'*Handbuch der Kugelfunctionen* del Dr. E. Heine, che è il lavoro più completo sulla materia, ha raggiunto ora (1878) la sua seconda edizione in due volumi; il Dr. Neumann ha pubblicato i suoi *Beträge zur Theorie der Kugelfunctionen* (Lipsia, Teubner, 1878). L'esposizione di questo tema, nella *Natural Philosophy* di Thomson e Tait, è stata migliorata nella seconda edizione (1879). Infine il *Traité élémentaire des fonctions de Laplace, de Lamé et de Bessel*, di M. Todhunter, e il *Traité élémentaire des sphériques harmoniques et des questions connexes*, di M. Ferrer, mi dispensano dal dilungarmi, in questa opera sull'elettricità, sugli sviluppi matematici di questa questione.

Ho conservato tuttavia la determinazione di un'armonica sferica in funzione dei suoi poli.

Punti singolari dove il potenziale diviene infinito. 129a. Se una carica A_0 di elettricità è uniformemente distribuita sulla superficie di una sfera, il cui centro ha per coordinate (a, b, c) , il potenziale in un punto qualsiasi (x, y, z) , esterno alla sfera, è, dalla § 125,

$$(9.0.1) \quad V = \frac{A_0}{r}$$

dove

$$(9.0.2) \quad r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

Siccome l'espressione di V è indipendente dal raggio della sfera, questa espressione rimane la stessa, se supponiamo il raggio infinitamente piccolo. Questa espressione si interpreterebbe allora fisicamente dicendo che la carica A_0 è distribuita sulla superficie di una sfera infinitamente piccola che si confonde sensibilmente con un punto matematico. Abbiamo già dimostrato (§ 55, 81) che vi è un limite della densità superficiale dell'elettricità: è quindi fisicamente impossibile porre una carica finita di elettricità su una sfera avente meno di un certo raggio.

Tuttavia, siccome la (9-1) rappresenta una distribuzione possibile del potenziale nello spazio che circonda una sfera elettrizzata, potremo, nello studio matematico, considerarla come dovuta a una carica A_0 concentrata in un punto matematico (a, b, c) , che chiameremo *punto infinito di ordine zero*.

Vi sono altri tipi di punti singolari che definiremo; ma prima dobbiamo definire certe espressioni che ci saranno utili quando dovremo considerare direzioni nello spazio, e i punti che corrispondono loro su una sfera.

129b. Si chiama *asse* una direzione qualunque determinata nello spazio. La possiamo supporre definita per mezzo di un riferimento fatto sulla superficie di una sfera, nel punto in cui questa superficie è incontrata da un raggio tracciato parallelamente all'asse partendo dal centro. Questo punto è detto il *polo dell'asse*; un asse ha quindi un solo polo e non due.

Se μ è il coseno dell'angolo compreso tra l'asse h e un vettore qualunque r , e se

$$(9.0.3) \quad p = \mu r_1$$

p è la componente di r lungo la direzione di h .

Si distinguono i diversi assi con indici differenti, ed essendo m e n gli indici che designano due assi, il coseno dell'angolo di questi assi è indicato da λ_{mn} .

La differenziazione rispetto a un asse h , i cui coseni direttori sono L, M, N , si rappresenta con

$$(9.0.4) \quad \frac{d}{dh} = L \frac{d}{dx} + M \frac{d}{dy} + N \frac{d}{dz}$$

Da queste definizioni è evidente che

$$(9.0.5) \quad \frac{dr}{dh_m} = \frac{p_m}{r} = \mu_m$$

$$(9.0.6) \quad \frac{dp_n}{dh_m} = \lambda_{mn} = \frac{dp_m}{dh_m}$$

$$(9.0.7) \quad \frac{d\mu_m}{dh_m} = \frac{\lambda_{mn} - \mu_m \mu_n}{r}$$

Se ora supponiamo che il potenziale nel punto (x, y, z) dovuto a un punto singolare di ordine qualsiasi posto nell'origine, sia

$$Af(x, y, z)$$

allora il potenziale in xyz , dovuto a un punto simile posto all'estremità dell'asse h , sarà

$$Af[(x - Lh), (y - Mh), (z - Nh)]$$

e se un punto simile in tutti gli aspetti, tranne che il segno di A è contrario, è posto nell'origine, il potenziale dovuto a questa coppia di punti sarà

$$V = Af[(x - Lh), (y - Mh), (z - Nh)] - Af(x, y, z) = -Ah \frac{d}{dh} f(x, y, z)$$

più termini contenenti h^2 .

Se diminuisce h e aumenta A indefinitamente, rimanendo il loro prodotto finito e uguale ad A' , il valore limite del potenziale per questa coppia di punti sarà

$$(9.0.8) \quad V' = -A' \frac{d}{dh} f(x, y, z)$$

Se $f(x, y, z)$ soddisfa all'equazione di Laplace, essendo l'equazione lineare, V' , differenza di due funzioni ognuna delle quali soddisfa all'equazione, dovrà soddisfare pure questa.

129c. Il potenziale dovuto a un punto infinito di ordine zero

$$(9.0.9) \quad V_0 = A_0 \frac{1}{r}$$

soddisfa all'equazione di Laplace: pertanto ogni funzione, dedotta da questa con un numero qualunque di differenziazioni successive rispetto a diversi assi, dovrà pure soddisfare a questa equazione.

Si può formare un punto del primo ordine, prendendo due punti di ordine zero, aventi cariche uguali e contrarie $-A_0$ e A_0 , di cui la prima sarà posta all'origine, e la seconda all'estremità dell'asse h_1 . Facendo allora indefinitamente decrescere il valore di h_1 e crescere il valore di A_0 , in modo tale che il prodotto $A_0 h_1$ rimane sempre uguale a A_1 , il risultato finale dell'operazione, nel momento in cui i due punti coincidono, è un punto del primo ordine, il cui momento è A_1 e l'asse h_1 ; un punto del primo ordine è quindi un punto doppio: il suo potenziale è

$$(9.0.10) \quad V_1 = -h_1 \frac{d}{dh_1} V_0 = A_1 \frac{\mu_1}{r_2}$$

Ponendo nell'origine un punto del primo ordine il cui momento sia $-A_1$, e all'estremità dell'asse h_2 un altro punto del primo ordine il cui momento sia A_1 ; poi, facendo diminuire h_2 e aumentare A_1 , di modo che

$$(9.0.11) \quad A_1 h_2 = \frac{1}{2} A_2$$

otteniamo un punto del secondo ordine, il cui potenziale è

$$(9.0.12) \quad V_2 = -\frac{1}{2}h_2 \frac{d}{dh_2} V_1 = A_2 \frac{1}{2} \frac{3\mu_1\mu_2 - \lambda_{12}}{r^2}$$

Possiamo dire che un punto del secondo ordine è un punto quadruplo, poiché lo otteniamo facendo avvicinare tra loro quattro punti di ordine zero. V sono due assi h_1 e h_2 e un momento A_2 : la direzione di questi assi e la grandezza del momento definiscono completamente la natura del punto.

Differenziando rispetto a n assi successivamente, otteniamo il potenziale dovuto a un punto di ordine n . È il prodotto di tre fattori, una costante, una certa combinazione di coseni e $r^{-(n+1)}$. Per ragioni che diverranno evidenti, è comodo dare alla costante un valore numerico tale che il coefficiente del momento sia $r^{-(n+1)}$ quando tutti gli assi coincidono con il vettore. Divideremo quindi per n , quando differenzieremo rispetto a h_n .

In questo modo, otteniamo un valore numerico determinato, per un potenziale particolare, al quale daremo il nome di armonica solida di grado $-(n+1)$, cioè

$$(9.0.13) \quad V_n = (-)^n \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \frac{d}{dh_1} \cdot \frac{d}{dh_2} \cdots \frac{d}{dh_n} \cdot \frac{1}{r}$$

Se questa quantità è moltiplicata per una costante, lo è anche il potenziale dovuto a un certo punto di ordine n .

129d. Il risultato della (9-13) è della forma

$$(9.0.14) \quad V = Y_n r^{-(n+1)}$$

dove Y_n è una funzione dei coseni $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ degli angoli compresi tra r e gli n assi, e di $\frac{1}{2}n(n-1)$ coseni λ_{12} degli angoli compresi tra ogni coppia di assi.

Se consideriamo le direzioni di r e degli n assi come determinate da punti presi su una superficie sferica, possiamo considerare Y_n come una quantità variante da un punto all'altro di questa superficie e che sarà una funzione di $\frac{1}{2}n(n+1)$ distanze comprese tra gli n poli degli assi e il polo del vettore. Chiameremo quindi Y_n l'armonica della superficie di ordine n .

130a. Bisogna ora far vedere che a ogni armonica di superficie di ordine n corrisponde non solo un'armonica solida di ordine $-(n+1)$, ma anche un'altra di grado n , di modo che

$$(9.0.15) \quad H_n = Y_n r^n = V_n r^{2n+1}$$

soddisfi all'equazione di Laplace.

Infatti,

$$\frac{dH_n}{dx} = (2n+1)r^{2n-1}xV_n + r^{2n+1}\frac{dV_n}{dx}$$

$$\frac{d^2H_n}{dx^2} = (2n+1) \left[(2n-1)x^2 + r^2 \right] r^{2n-3}V_n + 2(2n+1)r^{2n+1}x\frac{dV_n}{dx} + r^{2n+1}\frac{d^2V_n}{dx^2}$$

Pertanto

$$(9.0.16) \quad \frac{d^2H_n}{dx^2} + \frac{d^2H_n}{dy^2} + \frac{d^2H_n}{dz^2} = (2n+1)(2n+2)r^{2n-1}V_n + 2(2n+1)r^{2n-1} \left(x\frac{dV_n}{dx} + y\frac{dV_n}{dy} + z\frac{dV_n}{dz} \right) + r^{2n-1} \left(\frac{d^2V_n}{dx^2} + y\frac{d^2V_n}{dy^2} + \frac{d^2V_n}{dz^2} \right) +$$

Ora, poiché V_n è una funzione omogenea di x, y, z , di grado negativo uguale a $(n+1)$

$$(9.0.17) \quad x\frac{dV_n}{dx} + y\frac{dV_n}{dy} + z\frac{dV_n}{dz} = -(n+1)V_n$$

di conseguenza, i primi due termini del secondo membro della (9-16) si eliminano, e, poiché V_n soddisfa all'equazione di Laplace, il terzo termine è nullo, di modo che H_n soddisfa anche all'equazione di Laplace e, di conseguenza, è un'armonica solida di grado n .

Questo è un caso particolare del teorema più generale dell'inversione elettrica, il quale afferma che, se $F(x, y, z)$ è una funzione di x, y, z che soddisfa all'equazione di Laplace, esiste anche un'altra funzione

$$\frac{a}{r} F\left(\frac{a^2x}{r^2}, \frac{a^2y}{r^2}, \frac{a^2z}{r^2}\right)$$

che soddisfa pure l'equazione di Laplace (si veda § 162).

130b. L'armonica di superficie Y_n contiene $2n$ variabili arbitrarie, poiché è definita dalla posizione dei suoi n poli sulla sfera, essendo ognuno di essi definito da due coordinate.

Pertanto le armoniche solide H_n e V_n contengono $2n$ variabili arbitrarie, e ognuna di queste quantità moltiplicate per una costante arbitraria soddisferà ancora all'equazione di Laplace.

Per dimostrare che AH_n è la funzione razionale omogenea di grado n più generale che soddisfa all'equazione di Laplace, osserviamo che K , la funzione razionale e omogenea di grado n più generale, contiene $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ termini. Ma $\nabla^2 K$ è una funzione omogenea di grado $(n-2)$ e contiene di conseguenza $\frac{1}{2}n(n-1)$ termini, e la condizione $\nabla^2 K = 0$ richiede che ognuno di questi termini si annulli. Vi sono quindi $\frac{1}{2}n(n-1)$ equazioni tra i coefficienti di $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ termini della funzione K , ciò che lascia $2n+1$ costanti indipendenti nella forma più generale della funzione omogenea di grado n che soddisfa all'equazione di Laplace. Ora H_n , moltiplicato per una costante arbitraria, soddisfa alla condizione in questione e contiene $2n+1$ costanti arbitrarie. Questa funzione è quindi della forma più generale.

131a. Siamo ora in grado di combinare una distribuzione di potenziale, tale che né il potenziale stesso né le sue derivate prime divengono infinite in alcun punto,

La funzione $V_N = Y_n r^{-(n+1)}$ soddisfa alla condizione di annullarsi all'infinito, ma diviene infinita nell'origine.

La funzione $H_n = Y_n r^n$ è finita e continua a distanza finita dall'origine, ma si annulla a una distanza infinita.

Ma, se prendiamo $a^n Y_n r^{-(n+1)}$ per potenziale in tutti i punti esterni a una sfera di raggio a , avente centro nell'origine, e $a^{-(n+1)} Y_n r^n$ per potenziale di tutti i punti interni alla sfera; e se, sulla sfera stessa, supponiamo l'elettricità distribuita con una densità superficiale σ , tale che

$$(9.0.18) \quad 4\pi\sigma a^2 = (2n+1) Y_n$$

tutte le condizioni saranno soddisfatte dal potenziale dovuto a una carica così ripartita in forma di strato.

Infatti, dappertutto il potenziale è finito e continuo; si annulla all'infinito; le sue derivate prime sono finite e continue, tranne sulla superficie carica, dove esse soddisfano all'equazione

$$(9.0.19) \quad \frac{dV}{dv} + \frac{dV'}{dv'} + 4\pi\sigma = 0$$

e l'equazione di Laplace è soddisfatta in tutti i punti interni o esterni alla sfera.

Questa è quindi una distribuzione del potenziale che soddisfa alle condizioni, e, dalla § 100a, è la sola distribuzione che soddisfa loro.

131b. Il potenziale dovuto a una sfera di raggio a la cui densità superficiale è data dall'equazione

$$(9.0.20) \quad 4\pi\sigma a^2 = (2n+1) Y_n$$

è, per tutti i punti esterni alla sfera, identico a quello dovuto al punto singolare di ordine n corrispondente.

Supponiamo ora un sistema elettrico che chiameremo E , esterno alla sfera, sua Ψ il potenziale dovuto a tale sistema, e cerchiamo il valore di $\sum(\Psi e)$ per il punto singolare. È la parte dell'energia elettrica che dipende dall'azione del sistema esterno sul punto singolare.

Se A_0 è la carica di un solo punto di ordine zero, l'energia potenziale in questione è

$$(9.0.21) \quad W_0 = A_0 \Psi$$

Se vi sono due di tali punti, uno negativo nell'origine, l'altro positivo, dello stesso valore numerico all'estremità dell'asse h_1 , l'energia potenziale sarà

$$-A_0\Psi + A_0\left(\Psi + h_1\frac{d\Psi}{dh_1} + \frac{1}{2}h_1^2\frac{d^2\Psi}{dh_1^2} + \dots\right)$$

e se A_0 aumenta e se h_1 diminuisce indefinitamente, di modo che $A_0h_1 = A_1$, il valore dell'energia potenziale, per un punto del primo ordine, sarà

$$(9.0.22) \quad W_1 = A_1\frac{d\Psi}{dh_1}$$

Analogamente, per un punto dell'ordine n , l'energia potenziale sarà¹

$$(9.0.23) \quad W_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} A_n \frac{d^n \Psi}{dh_1 \cdot dh_2 \cdot \dots \cdot dh_n}$$

131c. Se supponiamo il sistema esterno formato da parti ognuna delle quali è indicata da dE , e il punto singolare formato da parti ognuna delle quali è indicata da de , allora

$$(9.0.24) \quad \Psi = \sum \left(\frac{1}{r} dE \right)$$

Ma se V_n è il potenziale dovuto al punto singolare

$$(9.0.25) \quad V_n = \sum \left(\frac{1}{r} de \right)$$

e l'energia potenziale dovuta all'azione di E su e è

$$(9.0.26) \quad W = \sum (\Psi de) = \sum \sum \left(\frac{1}{r} dE de \right) = \sum V_n dE$$

essendo l'ultima espressione l'energia potenziale dovuta all'azione di e su E .

Analogamente, se σds è un elemento di elettricità dello strato, il potenziale dello sul sistema esterno E è V_n , e si ha

$$(9.0.27) \quad W = \sum (V_n dE) = \sum \sum \left(\frac{1}{r} dE \sigma ds \right) = \sum (\Psi \sigma ds)$$

L'ultimo termine contiene la sommatoria estesa su tutta la superficie della sfera. Eguagliando alla prima espressione di W , abbiamo

$$(9.0.28) \quad \iint \Psi \sigma ds = \sum (\Psi de) = \frac{1}{n!} A_n \frac{d^n \Psi}{dh_1 \cdot \dots \cdot dh_n}$$

Se ricordiamo che $4\pi\sigma a^2 = (2n+1)Y_n$, e che $A_n = a^n$, questa diviene

$$(9.0.29) \quad \iint \Psi Y_n ds = \frac{4\pi}{n!(2n+1)} a^{n+2} \frac{d^n \Psi}{dh_1 \cdot \dots \cdot dh_n}$$

In virtù di questa equazione, l'operazione che consiste nel prendere l'integrale di superficie di $\Psi Y_n ds$ per ognuno degli elementi della superficie della sfera di raggio a si riduce a differenziare Ψ rispetto agli n assi dell'armonica, e a prendere il valore di questo coefficiente differenziale per il centro della sfera, purché, tuttavia, Ψ soddisfi all'equazione di Laplace per tutti i punti interni alla sfera, e che Y_n sia un'armonica di superficie di ordine n .

132. Supponiamo ora che Ψ sia un'armonica solida di grado m positivo, della forma

$$(9.0.30) \quad \Psi = a^{-m} Y_m r^m$$

sulla superficie sferica, $r = a$ e $\Psi = Y_m$, di modo che la (9-29) diviene in questo caso

$$(9.0.31) \quad \iint Y_m Y_n ds = \frac{4\pi}{n!(2n+1)} a^{n-m} \frac{d^n (Y_m r^m)}{dh_1 \cdot \dots \cdot dh_n}$$

dove il valore del coefficiente differenziale è preso per il centro della sfera.

¹Per quanto segue, troveremo più comodo indicare con $n!$ il prodotto degli n numeri interi positivi $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

Se n è più piccolo di m , il risultato della differenziazione è una funzione omogenea di x, y, z , di grado $m - n$, il cui valore al centro della sfera è zero. Se n è uguale a m , il risultato della differenziazione è una costante, di cui determineremo il valore al § 134b. Se la differenziazione è spinta oltre, il risultato è zero; pertanto l'integrale di superficie $\iint Y_m Y_n ds$ si annulla tutte le volte che m e n sono diversi.

Tutti i passaggi intermedi con i quali siamo giunti a questo risultato sono puramente matematici; abbiamo pure impiegato termini aventi un significato fisico, come l'*energia elettrica*; ma ognuno di questi termini sottintendeva non un fenomeno fisico da studiare, ma un'espressione matematica determinata. Un matematico ha il diritto di servirsi di queste funzioni così come di tutte le altre che può trovare utili; e il fisico, che deve seguire un calcolo matematico, le comprenderà tanto meglio quanto i passaggi intermedi di questo calcolo offriranno una interpretazione fisica.

133. Determiniamo ora la forma dell'armonica di superficie Y_n , in funzione della posizione di un punto P della sfera rispetto agli n poli dell'armonica.

Abbiamo

$$(9.0.32) \quad \left. \begin{aligned} Y_0 &= 1 & Y_1 &= \mu_1 & Y_2 &= \frac{3}{2}\mu_1\mu_2 - \frac{1}{2}\lambda_{12} \\ Y_3 &= \frac{5}{2}\mu_1\mu_2\mu_3 - \frac{1}{2}(\mu_1\lambda_{23} + \mu_2\lambda_{31} + \mu_3\lambda_{12}) \end{aligned} \right\}$$

Ogni termine di Y_n è quindi formata da prodotti di coseni, gli uni della forma μ , a un solo indice, si riferiscono agli angoli compresi tra il punto P e i poli e gli altri della forma λ , a due indici, sono i coseni degli angoli compresi tra i poli.

Poiché ogni asse è introdotto da una delle n differenziazioni, l'indice di ogni asse deve presentarsi una volta, e una sola, tra gli indici dei coseni di ogni termine.

Se quindi in un termine vi sono s coseni a due indici, vi saranno in questo termine $n - 2s$ coseni a un solo indice.

Si scriva la somma di tutti i prodotti dei coseni nei quali s ha doppio indice nella forma abbreviata

$$\sum (\mu^{n-2} \lambda^s)$$

In ognuno di questi prodotti compare ognuno degli indici e nessuno è ripetuto.

Se vogliamo esprimere che un determinato indice m compaia solo nelle μ o nelle λ , lo mettiamo come indice a μ o a λ . Così l'equazione

$$(9.0.33) \quad \sum (\mu^{n-2s} \lambda^s) = \sum (\mu_m^{n-2s} \lambda^s) + \sum (\mu^{n-2s} \lambda_m^s)$$

esprime che tutto l'insieme dei prodotti può essere suddiviso in due gruppi: nell'uno, l'indice m appare tra i coseni che definiscono il punto variabile P , e nell'altro, tra i coseni degli angoli compresi tra i poli.

Supponiamo ora che, per un valore particolare di n ,

$$(9.0.34) \quad Y_n = A_{n,0} \sum (\mu^n) + A_{n,1} \sum (\mu^{n-2} \lambda^1) + \dots + A_{n,s} \sum (\mu^{n-2s} \lambda^s)$$

dove le A sono coefficienti numerici. Possiamo scrivere questa serie sotto la forma abbreviata

$$(9.0.35) \quad Y_n = S \left[A_{n,s} \sum (\mu^{n-2s} \lambda^s) \right]$$

dove S indica una sommatoria nella quale sono compresi tutti i valori di s da zero a $\frac{1}{2}n$, estremi compresi.

Per ottenere l'armonica solida di grado negativo $(n + 1)$ e di ordine n che gli corrisponde, moltiplichiamo per $r^{-(n+1)}$, e abbiamo

$$(9.0.36) \quad V_n = S \left[A_{n,s} r^{2s-2n-1} \sum (p^{n-2} \lambda^s) \right]$$

e ponendo $r\mu = p$, come nella (9-3).

Se differenziamo V_n , rispetto a un nuovo asse h_m , abbiamo $-(n + 1) V_{n+1}$ e, di conseguenza,

$$(9.0.37) \quad (n + 1) V_{n+1} = S \left[A_{n,s} (2n + 1 - 2s) r^{2s-2n-3} \sum (p_m^{n-2s+1} \lambda^s) - A_{n,s} r^{2s-2n-1} \sum (p^{n-2s+1} \lambda^{s+1}) \right]$$

Per ottenere i termini contenenti s coseni a doppio indice, basta diminuire s di una unità nell'ultimo termine, e troviamo

$$(9.0.38) \quad (n+1)V_{n+1} = S \left[r^{2s-2n-3} \left\{ A_{n,s} (2n+1-2s) \sum (p_m^{n-2s+1} \lambda^s) - A_{n,s-1} \sum (p^{n-2s+1} \lambda_m^s) \right\} \right]$$

Ora, i due gruppi di prodotti si distinguono tra loro solo per gli indici m che si incontrano solo tra le p in un gruppo e tra le λ nell'altro. I loro coefficienti devono quindi essere gli stessi; e poiché dobbiamo arrivare allo stesso risultato mettendo $n+1$ invece di n nell'espressione di V_n , e moltiplicando per $n+1$, otteniamo la seguente equazione:

$$(9.0.39) \quad (n+1)A_{n+1,s} = (2n-2s+1)A_{n,s} = -A_{n,s-1}$$

Se poniamo $s=0$, abbiamo

$$(9.0.40) \quad (n+1)A_{n+1} = (2n+1)A_n$$

e poiché $A_{1,0} = 1$,

$$(9.0.41) \quad A_{n,0} = \frac{2n!}{2^n (n!)^2}$$

e da questa ricaviamo l'espressione generale del coefficiente

$$(9.0.42) \quad A_{n,s} = (-)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s} n! (n-s)!}$$

e infine, l'espressione trigonometrica dell'armonica della superficie

$$(9.0.43) \quad Y_n = S \left[(-)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s} n! (n-s)!} \sum (\mu^{n-2s} \lambda^s) \right]$$

Questa espressione fornisce il valore dell'armonica di superficie in un punto P della superficie sferica, in funzione dei coseni delle distanze di P dai diversi poli e delle distanze dei poli tra loro.

È facile vedere che se uno dei poli è trasportato al punto diametralmente opposto sulla superficie sferica, il valore dell'armonica cambia di segno; poiché ogni coseno in cui appare l'indice di questo polo cambia di segno, e, in ogni termine dell'armonica, l'indica del polo compare una e una sola volta.

Di conseguenza, se due o un numero pari qualunque di poli sono trasportati ognuno al punto diametralmente opposto, il valore dell'armonica non cambia.

Il professor Sylvester ha d'altra parte dimostrato (*Phil. Mag.*, ott. 1876) che, data un'armonica, il problema che consiste nel trovare le n linee coincidenti con i suoi assi, ha una e una sola soluzione, sebbene si possa (così come mostrato) invertire a gruppi di due le direzioni che si considerano come positive sui diversi assi.

134. Siamo ora in grado di determinare il valore dell'integrale di superficie $\iint Y_m Y_n ds$, per due armoniche di superficie dello stesso ordine, essendo le direzioni degli assi di queste armoniche in generale differenti.

A tale scopo, formiamo l'armonica solida $Y_m r^n$ e differenziamola rispetto ad ognuno degli n assi di Y_n .

Tutti i termini di $Y_m r^n$, che sono della forma $r^m \mu^{m-2s} \lambda^s$ si possono scrivere $r^{2s} p_m^{m-2s} \lambda_{mm}^2$. Differenziando questi termini n volte rispetto a ognuno degli n assi di Y_n successivamente, troviamo che differenziando r^{2s} , rispetto a s tra questi assi, introduciamo s dei fattori p_n , così che il fattore numerico

$$2s(2s-2)\dots 2 \text{ o } 2^s s!$$

Se si continua a differenziare, rispetto agli s assi successivi, le p_n si trasformano in λ_{nn} senza introduzione di alcun fattore numerico; e se si continua a differenziare, rispetto agli $n-2s$ assi restanti, le p_m si trasformano in λ_{mm} , di modo che il risultato è $2^s s! \lambda_{nn}^s \lambda_{mm}^s \lambda_{mn}^{m-2s}$.

Abbiamo quindi, dalla (9-31),

$$(9.0.44) \quad \iint Y_m Y_n ds = \frac{4\pi}{n!(2n+1)} a^{n-m+2} \frac{d^n (Y_m r^m)}{dh_1 \cdot \dots \cdot dh_n}$$

e dalla (9-43),

$$(9.0.45) \quad Y_m r^s = S \left[(-)^s \frac{(2m-2s)!}{2^{m-s} m! (m-s)!} \sum (r^{2s} p_m^{m-2s} \lambda_{mn}^s) \right]$$

Da ciò ricaviamo, effettuando le differenziazioni e ricordando che $m = n$,

$$(9.0.46) \quad \iint Y_m Y_n ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1)(n!)^2} S \left[(-)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-2s} (n-s)!} \sum (\lambda_{mm}^s \lambda_{nn}^s \lambda_{mn}^{n-2s}) \right]$$

135a. L'espressione (9-46), che fornisce l'integrale di superficie del prodotto di due armoniche di superficie, assume una forma significativa se si suppone che tutti gli assi di una delle armoniche Y_m coincidono tra loro, di modo che Y_m diviene ciò che chiameremo in seguito un'*armonica zonale* di ordine m , indicata con il simbolo P_m .

In questo caso, tutti i coseni della forma λ_{mn} si possono scrivere μ_n , indicando con μ_n il coseno dell'angolo compreso tra l'asse unico di P_m e uno qualunque degli assi di Y_n . I coseni della forma λ_{mm} diventano tutti uguali all'unità, di modo che al posto di $\sum \lambda_{mm}^s$ dobbiamo mettere il numero delle combinazioni di s simboli, purché ognuno dei due indici differenti di n , senza nessuna ripetizione; da cui

$$(9.0.47) \quad \sum \lambda_{mm}^s = \frac{n!}{2^s s! (n-2s)!}$$

Il numero di permutazioni di $n-2s$ indici che restano su quelli di m assi di P_m è $(n-2s)!$; da cui

$$(9.0.48) \quad \sum (\lambda_{mn}^{n-2s}) = (n-2s)! \mu^{n-2s}$$

La (9-46) pertanto diviene, quando tutti gli assi di Y_m coincidono,

$$\iint Y_n P_m ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1)n!} S \left[(-)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-2s} (n-s)!} \sum (\mu^{n-2s} \lambda^s) \right]$$

o dalla (9-43)

$$(9.0.49) \quad = \frac{4\pi a^2}{2n+1} Y_{n(m)}$$

dove $Y_{n(m)}$ indica il valore di Y_n nel polo di P_m .

Si può arrivare allo stesso risultato con il metodo seguente che è più rapido.

Prendiamo un sistema di coordinate rettangolari tale che l'asse z coincide con l'asse di P_m ; e sviluppiamo $Y_n r^n$ in funzione omogenea di grado n di x, y, z .

Al polo di P_m , $x = y = 0$ e $z = r$, di modo che, se Cz^n è il termine che non contiene né y né x , C è il valore di Y_n al polo di P_m .

In questo caso, la (9-31) diviene

$$\iint Y_n P_m ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1)n!} \frac{d^m}{dz^m} (Y_n r^n)$$

Se m è uguale a n , il risultato della differenziazione è $n!C$ per Cz^n e zero per tutti gli altri termini; pertanto

$$\iint Y_n P_m ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1)} C$$

essendo C il valore di Y_n al polo P_m .

135b. Questo risultato è molto importante nella teoria delle armoniche sferiche; esso ci mostra come si può formare una serie di armoniche sferiche che rappresentano una quantità

avente un certo valore arbitrariamente fissato, ma finito e continuo in tutti i punti di una superficie sferica.

Infatti, siano F il valore della quantità e ds l'elemento di superficie in un punto Q della superficie sferica; se moltiplichiamo Fds per P_n , l'armonica zonale, il cui polo è il punto P della stessa superficie, e se prendiamo l'integrale di questo prodotto per tutta la superficie, il risultato, non dipendente dalla posizione del punto P , potrà essere considerata come una funzione della posizione di questo punto.

Ma, in P , il valore dell'armonica zonale il cui polo è Q è uguale al valore in Q dell'armonica zonale dello stesso ordine avente il suo polo in P . Possiamo quindi ammettere che, per ogni elemento ds della superficie, si sia formata un'armonica zonale avente il suo polo in Q e avente un coefficiente Fds .

Avremo così un sistema di armoniche zonali sovrapposte le une alle altre, e aventi i loro poli in ognuno dei punti della sfera dove F ha un valore. E, poiché ognuno di essi è un multiplo di un'armonica di superficie di ordine n , la loro somma sarà un multiplo di un'armonica di superficie, che non è per forza zonale, di ordine n .

L'integrale di superficie $\iint FP_n ds$, considerato come funzione del punto P , è quindi un multiplo di un'armonica di superficie Y_n ; di conseguenza,

$$\frac{2n+1}{4\pi a^2} \iint FP_n ds$$

è precisamente l'armonica di superficie di ordine n che fa parte della serie di armoniche che esprime F , se F può essere espressa in questo modo.

Se F può essere espressa nella forma

$$F = A_0 Y_0 + A_1 Y_1 + \dots + A_n Y_n + \dots$$

allora moltiplicando per $P_n ds$ e prendendo l'integrale di superficie per tutta la sfera, tutti i termini contenenti prodotti di armoniche di ordine differente si annullano, e resta

$$\iint FP_n ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} A_n Y_n$$

Pertanto la sola forma sotto la quale lo sviluppo di F in armoniche sferiche sia possibile è

$$(9.0.50) \quad F = \frac{1}{4\pi a^2} \left[\iint FP_0 ds + \dots + (2n+1) \iint FP_n ds + \dots \right]$$

Armoniche coniugate. 136. Abbiamo visto che l'integrale di superficie del prodotto di due armoniche sferiche di ordine differente è sempre nullo. Ma, anche quando le due armoniche sono dello stesso ordine, l'integrale di superficie del loro prodotto può essere nullo. Si dice allora che le due armoniche sono coniugate. La condizione perché due armoniche dello stesso ordine siano coniugate si esprime per mezzo della (9-46), uguagliando i suoi due membri a zero.

Se una delle armoniche è zonale, la condizione perché l'altra armonica le sia coniugata è che essa abbia un valore nullo al polo dell'armonica zonale.

Se cominciamo col darci un'armonica semplice di ordine n , servirà, affinché una seconda armonica le sia coniugata, che le sue $2n$ variabili soddisfino a una condizione.

Se una terza armonica deve essere coniugata alle prime due, le $2n$ variabili devono soddisfare a due condizioni. Se continuiamo a formare armoniche ognuna delle quali sia coniugata a tutte quelle che la precedono, il numero di condizioni da soddisfare per ognuna di esse sarà uguale al numero delle armoniche già esistenti; di modo che la $(2n+1)^{esima}$ armonica dovrà soddisfare a $2n$ condizioni per mezzo di $2n$ variabili, e, di conseguenza, sarà completamente determinata.

Ogni multiplo di AY_n di un'armonica di superficie di ordine n si può esprimere sotto forma di una somma di multipli di una serie qualsiasi di $(2n+1)$ armoniche coniugate dello stesso ordine. Infatti, i coefficienti di $(2n+1)$ armoniche coniugate formano una serie di quantità di cui si può disporre, e il cui numero è uguale a quello di $2n$ variabili di Y_n e del coefficiente A .

Per trovare il coefficiente di una qualunque di queste armoniche coniugate, Y_n^σ , supponiamo che

$$AY_n = A_0 Y_0^\sigma + \dots + A_\sigma Y_n^\sigma + \dots$$

Moltiplichiamo per $Y_n^\sigma ds$ e prendiamo l'integrale di superficie su tutta l'estensione della sfera. Tutti i termini che contengono i prodotti di armoniche coniugate si annullano, lasciando

$$(9.0.51) \quad A \iint Y_n Y_n^\sigma ds = A_\sigma \iint (Y_n^\sigma)^2 ds$$

un'equazione che determina A_σ .

Pertanto, se supponiamo data una serie di $2n + 1$ armoniche coniugate, ogni altra armonica di ordine n si potrà esprimere in funzione di questa, e in un solo modo. Pertanto, nessun'altra armonica potrà essere coniugata a tutte quelle insieme.

137. Abbiamo visto che, se si dà un sistema completo di $2n + 1$ armoniche di ordine n , tutte coniugate tra loro, ogni altra armonica dello stesso ordine può essere espressa in funzione di questa. In un simile sistema di $2n + 1$ armoniche, vi sono $2n(2n + 1)$ variabili legate tra loro da $n(n + 1)$ equazioni: si possono quindi considerare come arbitrarie $n(n + 1)$ variabili tra loro.

Potremo, così come proposto da Thomson e Tait, scegliere un sistema di armoniche coniugate nel quale gli n poli saranno distribuiti in modo che j tra loro si confondono con il polo dell'asse x , k con il polo dell'asse y e $l (= n - j - k)$ con il polo dell'asse z . Essendo date le $n + 1$ distribuzioni per le quali $l = 0$ e le distribuzioni per le quali $l = 1$, tutte le altre armoniche si possono esprimere in funzione di queste.

Il sistema che è stato adottato finora da tutti i matematici, ivi compresi Thomson e Tait, consiste nel riunire $n - \sigma$ poli in un punto che si chiama polo positivo della sfera, e i restanti σ poli a intervalli uguali lungo l'equatore se il loro numero è dispari, e sulla meta dell'equatore se il loro numero è pari.

In questo caso, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-\sigma}$ sono tutti uguali a $\cos \theta$; li rappresenteremo con μ . Se inoltre rappresentiamo $\sin \theta$ con ν , $\mu_{n-\sigma+1}, \mu_{n-\sigma+2}, \dots, \mu_n$ sono della forma $\nu \cos(\Phi - \beta)$, essendo β l'azimut di uno dei poli equatoriali.

Analogamente, il valore di λ_{pq} è uguale all'unità se p e q sono tutti e due più piccoli di $n - \sigma$, uguale a zero se uno dei due indici p o q è maggiore di $n - \sigma$, e l'altro più piccolo; infine uguale a $\cos \frac{r\pi}{\sigma}$ se entrambi sono maggiori, essendo r un numero intero più piccolo di σ .

138. Se tutti i poli coincidono con il polo della sfera, $\sigma = 0$, e l'armonica è detta *armonica zonale*. Siccome l'armonica zonale ha una grande importanza, riserveremo ad essa la notazione P_n .

Possiamo ricavare il suo valore, sia dall'espressione trigonometrica (9-43), sia più direttamente per differenziazione nel modo seguente:

$$(9.0.52) \quad P_n = (-)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$(9.0.53) \quad P_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2 \cdot (2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)n-3}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - \dots \right] = \\ = \sum \left[(-)^p \frac{(2n-2p)!}{2^n p! (n-p)! (n-2p)!} \mu^{n-2p} \right]$$

dove bisogna dare a p tutti i valori interi compresi tra zero e il maggiore intero che non supera $\frac{1}{2}n$.

Qualche volta è comodo esprimere P_n sotto forma di funzione omogenea di $\cos \theta$ e di $\sin \theta$, o, secondo la nostra notazione, di μ e di ν ,

$$(9.0.54) \quad P_n = \mu^n - \frac{n(n-1)}{2 \cdot 2} \mu^{n-2} \nu^2 + \frac{n(n-1)(n-2)n-3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} \mu^{n-4} \nu^4 - \dots = \\ = \sum \left[(-)^p \frac{n!}{2^{2p} (p!)^2 (n-2p)!} \mu^{n-2p} \nu^{2p} \right]$$

Si dimostra nei lavori matematici che trattano di questo argomento che $P_n(\mu)$ è il coefficiente di h^n nello sviluppo di $(1 - 2\mu h + h^2)^{-\frac{1}{2}}$.

L'integrale di superficie del quadrato dell'armonica zonale, o

$$(9.0.55) \quad \iint (P_n)^2 ds = 2\pi a^2 \int_{-1}^1 (P_n(\mu))^2 d\mu = \frac{4\pi a^2}{2n+1}$$

da cui

$$(9.0.56) \quad \int_{-1}^1 (P_n(\mu))^2 d\mu = \frac{2}{2n+1}$$

139. Quando si considera un'armonica zonale semplicemente come funzione di μ , senza riferimento espresso ad alcuna sfera particolare, la si può chiamare un *polinomio di Legendre*.

Se consideriamo l'armonica zonale come esistente su una superficie sferica, i cui punti sono determinati dalle coordinate θ e φ , e se supponiamo che il polo dell'armonica zonale sia nel punto (θ', φ') , il valore dell'armonica zonale nel punto (θ, φ) è una funzione di quattro angoli $\theta', \varphi', \theta, \varphi$ e, siccome è una funzione di μ , coseno dell'arco che unisce i punti (θ, φ) e (θ', φ') , essa non sarà alterata se si scambia il piano di θ e θ' , e di φ e φ' . L'armonica zonale così espressa è stata chiamata *coefficiente di Laplace*. Thomson e Tait la chiamavano *armonica biassiale*.

Ogni funzione omogenea di x, y, z che soddisfa all'equazione di Laplace può essere chiamata un'armonica solida; e si può chiamare *armonica di superficie* il valore che assume un'armonica solida alla superficie di una sfera il cui centro è l'origine. In questa Opera, abbiamo definito l'armonica di superficie per mezzo dei suoi n poli, di modo che si hanno solo $2n$ variabili. L'armonica di superficie più generale a $2n+1$ variabili non è altro che l'armonica di superficie più particolare moltiplicata per una costante arbitraria. Quando è espressa in funzione di θ e di φ , l'armonica di superficie più generale è detta funzione di Laplace.

140a. Per ottenere le altre armoniche del sistema simmetrico, dobbiamo differenziare rispetto a σ assi posti nel piano xy , e inclinati gli uni sugli altri di angoli uguale a π/σ . Cosa che si fa facilmente, impiegando il sistema di coordinate immaginarie dato da Thomson e Tait, *Natural Philosophy*, vol. I, p. 148 (o 185 della seconda edizione).

Se poniamo

$$(9.0.57) \quad \xi = x + iy \quad \eta = x - iy$$

dove i indica $\sqrt{-1}$, l'operazione di differenziazione rispetto ai σ assi si può scrivere

$$(9.0.58) \quad i \left(\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma} - \frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma} \right) = D^{(\sigma)}_s$$

se uno degli assi coincide con l'asse y , e

$$(9.0.59) \quad \left(\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma} - \frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma} \right) = D^{(\sigma)}_c$$

se l'asse y biseca l'angolo tra i due assi.

Troveremo comodo rappresentare queste operazioni con i simboli abbreviati $D^{(\sigma)}_s$ e $D^{(\sigma)}_c$. Ma queste sono in effetti operazioni reali che si possono rappresentare nel modo seguente, senza ricorrere all'impiego simbolico degli immaginari,

$$(9.0.60) \quad 2^{\sigma-1} D^{(\sigma)}_s = \sigma \frac{d^{\sigma-1}}{dx^{\sigma-1}} \frac{d}{dy} - \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^{\sigma-3}}{dx^{\sigma-3}} \frac{d^3}{dy^3} + \dots$$

$$(9.0.61) \quad 2^{\sigma-1} D^{(\sigma)}_c = \frac{d^\sigma}{dx^\sigma} - \frac{\sigma(\sigma-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^{\sigma-2}}{dx^{\sigma-2}} \frac{d^2}{dy^2} + \dots$$

Potremo pure scrivere

$$(9.0.62) \quad \frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}} D^{(\sigma)}_s = D^{(\sigma)}_n \quad \frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}} D^{(\sigma)}_c = D^{(\sigma)}_n c$$

cosicch  $D_n^{(\sigma)}s$ e $D_n^{(\sigma)}c$ rappresentano le operazioni della differenziazione rispetto a n assi, dei quali $n - \sigma$ coincidono con l'asse z , e i σ restanti formano tra loro angoli uguali a π/σ nel piano xy ; il simbolo $D_n^{(\sigma)}s$ serve quando l'asse y coincide con uno degli assi, e il simbolo $D_n^{(\sigma)}c$ quando l'asse y   bisettrice dell'angolo compreso tra i due assi.

Le due armoniche di superficie tesserale di ordine n e di tipo σ si possono allora scrivere

$$(9.0.63) \quad Y_n^{(\sigma)}s = (-1)^n \frac{1}{n!} r^{n+1} D_n^{(\sigma)}s \frac{1}{r}$$

$$(9.0.64) \quad Y_n^{(\sigma)}c = (-1)^n \frac{1}{n!} r^{n+1} D_n^{(\sigma)}c \frac{1}{r}$$

Ponendo

$$\mu = \cos \theta \quad \nu = \sin \theta \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

cosicch 

$$z = \mu r \quad \rho = \nu r \quad x = \rho \cos \phi \quad y = \rho \sin \phi$$

abbiamo

$$(9.0.65) \quad D_n^{(\sigma)}s \frac{1}{r} = (-1)^\sigma \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\sigma!} i (\eta^\sigma - \xi^\sigma) \frac{1}{r^{2\sigma+1}}$$

$$(9.0.66) \quad D_n^{(\sigma)}c \frac{1}{r} = (-1)^\sigma \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\sigma!} i (\xi^\sigma + \eta^\sigma) \frac{1}{r^{2\sigma+1}}$$

dove possiamo porre

$$(9.0.67) \quad \frac{i}{2} (\eta^\sigma - \xi^\sigma) = \rho^\sigma \sin \sigma \phi \quad \frac{1}{2} (\xi^\sigma + \eta^\sigma) = \rho^\sigma \cos \sigma \phi$$

Ci basta ora solo differenziare rispetto a z , ci  che possiamo fare in modo da ottenere il risultato, sia come funzione di r e di z , sia come funzione omogenea di σ e di ρ divisi per una potenza di r

$$(9.0.68) \quad \frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}} \frac{1}{r^{2\sigma+1}} = (-1)^{n-\sigma} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{2^\sigma \sigma!}{(2\sigma)!} \frac{1}{r^{2n+1}} \left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)} z^{n-\sigma-2} r^2 + \dots \right]$$

o

$$(9.0.69) \quad \frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}} \frac{1}{r^{2\sigma+1}} = (-1)^{n-\sigma} \frac{(n+\sigma)!}{(2\sigma)!} \frac{1}{r^{2n+1}} \left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)} z^{n-\sigma-2} \rho^2 + \dots \right]$$

Se scriviamo

$$(9.0.70) \quad \Theta_n^{(\sigma)} = \left[\nu^\sigma \mu^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-\sigma-2} + \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-\sigma-4} - \dots \right]$$

e

$$(9.0.71) \quad \vartheta_n^{(\sigma)} = \nu^\sigma \left[\mu^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)} \mu^{n-\sigma-2} \nu^2 + \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{4 \cdot 6 \cdot (\sigma+1)(\sigma+2)} \mu^{n-\sigma-4} - \dots \right]$$

allora

$$(9.0.72) \quad \Theta_n^{(\sigma)} = \frac{2^{n-\sigma} n! (n+\sigma)!}{(2n)! \sigma!} \vartheta_n^{(\sigma)}$$

cosicch  le due funzioni differiscono solo per un fattore costante.

Possiamo ora scrivere le espressioni di due armoniche tesserale di ordine n e di tipo σ in funzione di θ o di ϑ .

$$(9.0.73) \quad Y_n^{(\sigma)}s = \frac{(2n)!}{2^{n+\sigma} n!} \Theta_n^{(\sigma)} 2 \sin \sigma \phi = \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma} n! \sigma!} \vartheta_n^{(\sigma)} 2 \sin \sigma \phi$$

$$(9.0.74) \quad Y_n^{(\sigma)c} = \frac{(2n)!}{2^{n+\sigma}n!} \Theta_n^{(\sigma)} 2 \cos \sigma \phi = \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma}n!\sigma!} \vartheta_n^{(\sigma)} 2 \cos \sigma \phi$$

Bisogna ricordare che se $\sigma = 0$, $\sin \sigma \phi = 0$ e $\cos \sigma \phi = 1$.

Per tutti i valori di σ compresi da 1 a n compresi, vi è una coppia di armoniche; ma, quando $\sigma = 0$, $Y_n^{(\sigma)s} = 0$ e $Y_n^{(\sigma)c} = 2P_n$, l'armonica zonale. Il numero totale di armoniche di ordine n è quindi $2n + 1$, così come deve essere.

140b. Il valore numerico di Y , che si è adottato in questa Opera, è quello che otteniamo differenziando r^{-1} rispetto a n assi e dividendo il risultato per $n!$. È il prodotto di quattro fattori, il seno o il coseno di $\sigma \phi$, ν^σ , una funzione di μ (o di μ e ν) e un coefficiente numerico.

Il prodotto del secondo e del terzo fattore, cioè della parte che dipende da θ , è stata espressa in funzione di tre simboli differenti, che si distinguono solo per i loro fattori numerici. Quando è espresso sotto la forma del prodotto di ν^σ mediante una serie di potenze decrescenti di μ che iniziano da $\mu^{n-\sigma}$, è la funzione che indicheremo con Thomson e Tait con Θ .

La funzione che Heine (*Handbuch der Kugelfunctionen*, § 47) indica con $P_\sigma^{(n)}$ e detta *eine zugeordnete Function erster Art*, o, secondo la traduzione di Todhunter, una funzione associata di prima specie, è legata a $\Theta_n^{(\sigma)}$ dall'equazione

$$(9.0.75) \quad \Theta_n^{(\sigma)} = (-)^{\frac{\sigma}{2}} P_\sigma^{(n)}$$

La serie di potenze decrescenti inizianti da $\mu^{n-\sigma}$ è indicata da Heine per mezzo del simbolo $\mathfrak{B}_\sigma^{(n)}$ e da Todhunter per mezzo del simbolo $\omega(\sigma, n)$.

Questa serie si può esprimere anche in altre due forme

$$(9.0.76) \quad \mathfrak{B}_\sigma^{(n)} = \omega(\sigma, n) = \frac{(n-\sigma)!}{(2n)!} \frac{d^{n+\sigma}}{d\mu^{n+\sigma}} (\mu^2 - 1)^n = \frac{2^n (n-\sigma)!n!}{(2n)!} \frac{d^\sigma}{d\mu^\sigma} P_n$$

Quest'ultima forma, sotto la quale si ottiene la serie quando si differenzia l'armonica zonale rispetto a μ , che sembra aver dato l'idea del simbolo adottata da Ferrers, e definita da lui nel modo seguente:

$$(9.0.77) \quad T_n^{(\sigma)} = \nu^\sigma \frac{d^\sigma}{d\mu^\sigma} P_n = \frac{(2n)!}{2^n (n-\sigma)!n!} \Theta_n^{(\sigma)}$$

Quando si mette questa stessa quantità sotto forma di funzione omogenea di μ e di ν , e la si divide per il coefficiente di $\mu^{n-\sigma} \nu^\sigma$, si ha ciò che abbiamo già indicato con $\vartheta_n^{(\sigma)}$.

140c. Le armoniche del sistema simmetrico sono state classificate da Thomson e Tait, in base alla forma di curve sferiche lungo le quali si annullano.

Il valore dell'armonica zonale in un punto qualunque della sfera è una funzione del coseno della distanza polare; uguagliando questa funzione a zero, si ottiene un'equazione di grado n , le cui radici sono comprese tra $+1$ e -1 , e corrispondono di conseguenza a n paralleli in latitudine sulla sfera.

Le zone comprese tra queste parallele sono alternativamente positive e negative, e il cerchio che circonda il polo è sempre positivo.

L'armonica zonale può quindi servire a esprimere una funzione che si annulla lungo certe parallele in latitudine della sfera, o lungo certe superfici coniche nello spazio.

Le altre armoniche del sistema simmetrico si presentano a gruppi di due, una contenente i coseni e l'altra i seni di $\sigma \phi$. Esse si annullano quindi lungo σ cerchi meridiani, e $n - \sigma$ paralleli della sfera, di modo che la superficie della sfera è divisa in $2\sigma(n - \sigma - 1)$ quadrilateri o tessere, e quarantasei triangoli ai poli. Esse sono quindi utili nelle ricerche relative a quadrilateri o tessere ritagliate sulla sfera dai meridiani e paralleli.

Le si chiama *armoniche tesserali*, tranne quelle dell'ultimo gruppo, le quali si annullano solo su n cerchi meridiani, che dividono la superficie sferica in n settori. Le si chiama, di conseguenza, *armoniche settoriali*.

141. Bisogna ora trovare l'integrale di superficie del quadrato di un'armonica tesserale qualsiasi per l'intera estensione della sfera. Possiamo ottenerlo con il metodo del § 134.

Trasformiamo l'armonica di superficie $Y_n^{(\sigma)}$ in un'armonica solida di grado positivo, moltiplicando per r^n , differenziamo questa armonica solida rispetto agli n assi dell'armonica stessa, poniamo allora $x = y = 0$, e moltiplichiamo il risultato per

$$\frac{4\pi a^2}{n!(2n+1)}$$

Nella nostra notazione, queste operazioni sono rappresentate dalla formula

$$(9.0.78) \quad \iint (Y_n^{(\sigma)})^2 ds = \frac{4\pi a^2}{n!(2n+1)} D_n^{(\sigma)} (r^n Y_n^{(\sigma)})$$

Scrivendo l'armonica solida sotto forma di funzione omogenea di z, ξ, η , cioè

$$(9.0.79) \quad r^n Y_n^{(\sigma)} = \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma} n! \sigma!} i (n^\sigma - \xi^\sigma) \left(z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)} z^{n-\sigma-2} \xi \eta + \dots \right)$$

si trova che, una volta effettuate le differenziazioni rispetto a z , tutti i termini della serie scompaiono tranne il primo, e il fattore $(n-\sigma)$ è introdotto.

Continuando a differenziare rispetto a ξ e η , ci sbarazziamo pure di queste variabili e introduciamo il fattore $\sigma!$, di modo che il risultato finale è

$$(9.0.80) \quad \iint (Y_n^{(\sigma)} s)^2 ds = \frac{8\pi a^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n! n!}$$

Indicheremo il secondo membro di questa equazione con il simbolo $[n, \sigma]$.

Questa espressione è esatta per tutti i valori di σ da 1 a n compresi, ma non vi sono armoniche in $\sin \sigma \varphi$ per $\sigma = 0$.

Si può mostrare allo stesso modo che

$$(9.0.81) \quad \iint (Y_n^{(\sigma)} c)^2 ds = \frac{8\pi a^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n! n!}$$

per tutti i valori di σ da 1 a n compresi.

Quando $\sigma = 0$, l'armonica diviene zonale, e

$$(9.0.82) \quad \iint (Y_n^{(\sigma)} c)^2 ds = \iint (P_n)^2 ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1}$$

risultato che si poteva ricavare direttamente dalla (9-50) ponendo $Y_n = P_n$ e ricordando che il valore dell'armonica zonale al suo polo è uguale all'unità.

142a. Possiamo ora applicare il metodo del § 136 per la determinazione del coefficiente di un'armonica tesserale data qualsiasi nello sviluppo di una funzione qualunque della posizione di un punto sulla sfera. Sia, infatti, F la funzione, e sia $A_n^{(\sigma)}$ il coefficiente di $Y_n^{(\sigma)}$ nello sviluppo di questa funzione in serie di armoniche di superficie del sistema simmetrico:

$$(9.0.83) \quad \iint F Y_n^{(\sigma)} ds = A_n^{(\sigma)} \iint (Y_n^{(\sigma)})^2 ds = A_n^{(\sigma)} [n, \sigma]$$

dove $[n, \sigma]$ è un'abbreviazione per il valore dell'integrale di superficie dato nella (9-81).

142b. Sia Ψ una funzione qualunque che soddisfa all'equazione di Laplace e non presenta valori singolari in una regione a attorno a un punto Q che possiamo prendere come origine delle coordinate. È sempre possibile sviluppare una tale funzione in una serie di armoniche solide di grado positivo aventi origine nel punto O .

Un modo per fare questo sviluppo consiste nel descrivere attorno al punto O , come centro, una sfera di raggio inferiore ad a , e sviluppare il valore del potenziale alla superficie di questa sfera in una serie armonica di superficie. Moltiplichiamo ognuna di queste armoniche per un potenza di $\left(\frac{r}{a}\right)$ uguale all'ordine dell'armonica di superficie, e otteniamo le armoniche solide di cui la funzione data è la somma.

Ma un metodo più semplice e che non implica integrazione consiste nel differenziare rispetto agli assi delle armoniche del sistema simmetrico.

Supponiamo, per esempio, che, nell'espressione di Ψ , si abbia un termine della forma $A_n^{(\sigma)} c Y_n^{(\sigma) r^n}$.

Se effettuiamo su Ψ e sul suo sviluppo l'operazione

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}} \left(\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma} + \frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma} \right)$$

e se poniamo poi x, y, z uguali a zero dopo la differenziazione, tutti i termini dello sviluppo si annullano, tranne quello che contiene $A_n^{(\sigma)} c$.

Esprimendo l'operazione effettuata su Ψ in funzione del simbolo di differenziazioni rispetto agli assi reali, otteniamo l'equazione

$$(9.0.84) \quad \frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}} \left(\frac{d^\sigma}{dx^\sigma} - \frac{\sigma(\sigma-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^{\sigma-2}}{dx^{\sigma-2}} \frac{d^2}{dy^2} + \dots \right) \Psi = A_n^{(\sigma)} c \frac{(n+\sigma)!(n-\sigma)!}{2^\sigma n!}$$

per mezzo della quale possiamo determinare il coefficiente di un'armonica qualunque della serie in funzione dei coefficienti differenziali di Ψ rispetto a x, y, z presa nell'origine.

143. Dalla (9-50) risulta che è sempre possibile esprimere un'armonica qualsiasi con la somma di un sistema di armoniche zonali dello stesso ordine i cui poli sono distribuiti sulla superficie della sfera; ma non sembra facile semplificare questo sistema. Tuttavia, per far cogliere ad occhio alcune delle caratteristiche delle armoniche sferiche, ho calcolato le armoniche zonali di terzo e quarto ordine, e ho disegnato, con il metodo già descritto con l'aggiunta di funzioni, le linee equipotenziali della sfera per le armoniche che sono la somma di due armoniche zonali.

La tavola VI rappresenta la differenza di due armoniche zonali del terzo ordine, i cui assi sono inclinati di 120° nel piano del foglio. Questa differenza è un'armonica del secondo tipo, per la quale $\sigma = 1$ e l'asse è perpendicolare al foglio.

Nella tavola VII, l'armonica è pure del terzo ordine, ma gli assi delle armoniche zonali delle quali è la somma, sono inclinati l'uno sull'altro di 90° , di modo che il risultato non appartiene ad alcun tipo del sistema simmetrico. Una delle linee nodali è un grande cerchio, ma le altre due che la prima incontra non sono cerchi.

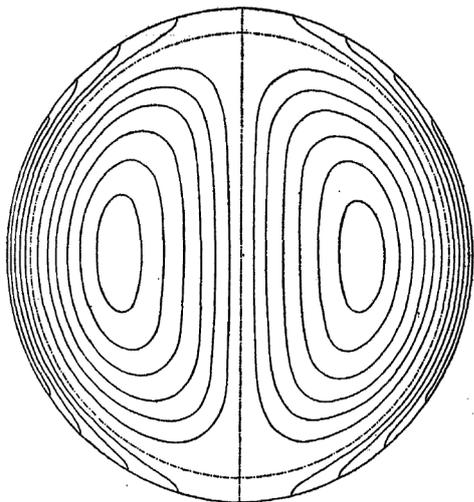
La tavola VIII rappresenta la differenza di due armoniche del quarto ordine, i cui assi sono rettangolari. Il risultato è un'armonica generale del quarto ordine. In questo tipo, la linea nodale sulla sfera è formata da sei ovali che non si intersecano. All'interno di questi ovali, l'armonica è positiva; e nella parte della superficie sferica che è esterna a questi ovali e che presenta sei passaggi o regioni di connessione, l'armonica è negativa-

Tutte queste figure sono d'altra parte proiezioni ortogonali delle figure della superficie sferica.

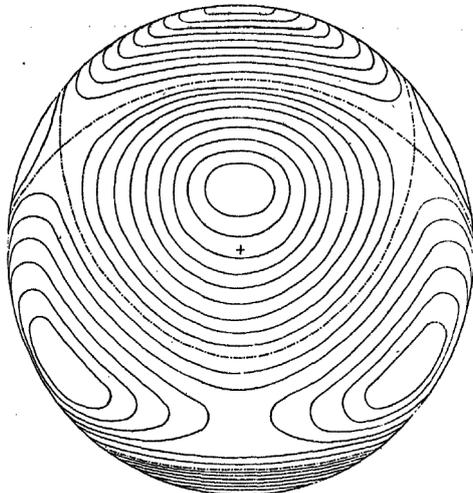
Ho disegnato pure (tavola V) una sezione piana passante per l'asse della sfera, per mostrare le superfici equipotenziali e le linee di forza dovute a una superficie sferica sulla quale la carica è distribuita secondo i valori di un'armonica sferica del primo ordine.

All'interno della sfera, le superfici equipotenziali sono piano equidistanti e le linee di forza, rette parallele all'asse, le cui distanze dall'asse stanno come le radici quadrate dei numeri naturali. Quanto alle linee esterne, esse rappresenteranno quelle che sarebbero dovute al magnetismo terrestre, se questo fosse distribuito secondo la legge più semplice.

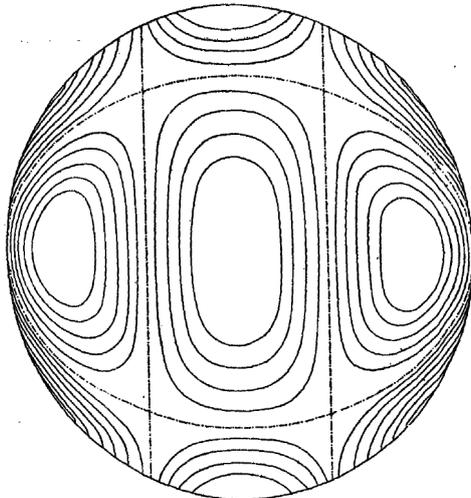
Pl. VI.

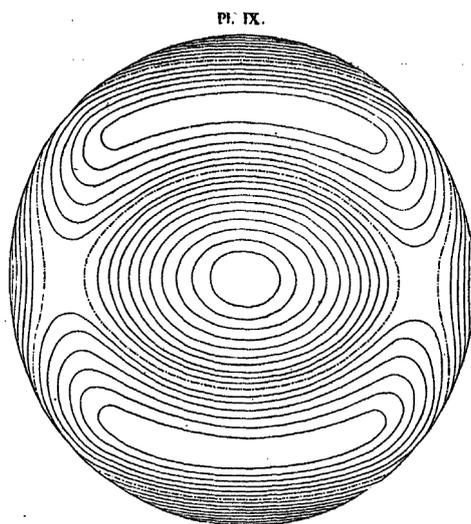


Pl. VII.

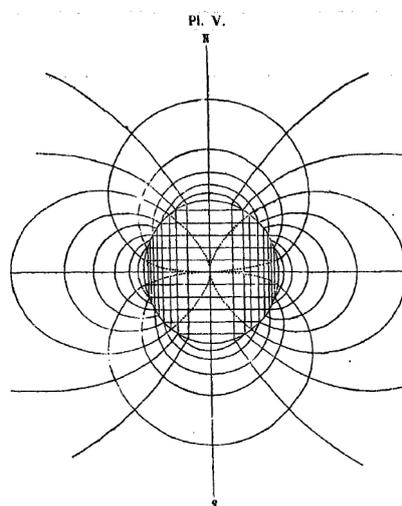
Armonica sferica del terzo ordine - $n = 3$

Pl. VIII.

Armonica sferica del quarto ordine - $n = 4, O = 2$



Armonica sferica del quarto ordine - $n = 4$, $O = 2$



Linee di forza e superfici equipotenziali in una sezione diametrale di una superficie sferica, per la quale la densità superficiale è un'armonica di primo grado

144a. Siamo ora in grado di determinare la distribuzione dell'elettricità su un conduttore sferico sottoposto all'azione delle forze elettriche di potenziale dato.

Per mezzo dei metodi indicati in precedenza, si sviluppa il potenziale Ψ dovuto alle forze date in una serie di armoniche solide di grado positivo aventi la loro origine nel centro della sfera.

Sia $A_n r^n Y_n$ una di queste armoniche: siccome il potenziale è uniforme su tutta la sfera conduttrice, vi deve essere un termine $-A_n r^n Y_n$ dovuto alla distribuzione dell'elettricità sulla superficie della sfera; e, di conseguenza, nello sviluppo di $4\pi\sigma$, vi deve essere un termine

$$4\pi\sigma_n = (2n + 1) a^{n-1} A_n Y_n$$

In questo modo possiamo determinare i coefficienti delle armoniche di tutti gli ordini, tranne quello dell'ordine zero, nell'espressione della densità superficiale. Il coefficiente corrispondente all'armonica di ordine zero, dipende dalla carica e della sfera, ed è dato da $4\pi\sigma_0 = a^{-2}e$.

Il potenziale della sfera è

$$V = \Psi_0 + \frac{e}{a}$$

144b. Supponiamo ora che la sfera sia posta nelle vicinanze di conduttori messi a terra e che la funzione di Green G sia stata determinata in funzione delle coordinate x, y, z e x', y', z' di due punti posti nella regione in cui la sfera si trova.

Se la densità superficiale della sfera è espressa da una serie di armoniche sferiche, i fenomeni elettrici che si producono al di fuori in virtù di questa carica della sfera saranno identici a quelli che produrrebbe una serie fittizia di punti singolari tutti posti al centro della sfera, essendo il primo di essi un punto semplice che possiede una carica uguale a quella della sfera, e gli altri punti multipli di diversi ordini corrispondenti alle armoniche per mezzo delle quali è stata espressa la densità superficiale.

Indichiamo la funzione di Green con $G_{pp'}$, dove p indica il punto le cui coordinate sono x, y, z e p' il punto le cui coordinate sono x', y', z' .

Sia A_0 la carica posta nel punto p' : allora, considerando x', y', z' come costanti, $G_{pp'}$ diviene una funzione di x, y, z e il potenziale dovuta all'elettricità indotta da A_0 sui corpi circostanti è

$$(9.0.85) \quad \Psi = A_0 G_{pp'}$$

Se, invece di porre in p' la carica A_0 , la distribuiamo uniformemente su una sfera di raggio a avente il suo centro in p' , il valore di Ψ resterà lo stesso per i punti esterni alla sfera.

Se la carica non è uniformemente distribuita sulla superficie della sfera, esprimiamo, come possiamo sempre, la densità superficiale con una serie armonica sferica, tale che

$$(9.0.86) \quad 4\pi a^2 \sigma = A_0 + 3A_1 Y_1 + \dots + (2n + 1) A_n Y_n$$

Il potenziale dovuto a uno qualunque dei termini di questa distribuzione

$$(9.0.87) \quad 4\pi a^2 \sigma_n = (2n + 1) A_n Y_n$$

per esempio sarà, $\frac{r^n}{a^{n+1}} A_n Y_n$ per i punti interni alla sfera e $\frac{a^n}{r^{n+1}} A_n Y_n$ per i punti esterni.

Dalle (9-13,14) del § 129, quest'ultima espressione è uguale a

$$(-1)^n A_n \frac{a_n}{n!} \frac{d^n}{dh_1 \cdot \dots \cdot dh_n} \frac{1}{r}$$

cioè che il potenziale in un punto esterno alla sfera dovuto a una certa carica di questa sfera è uguale al potenziale dovuto a un certo punto multiplo i cui assi sono h_1, h_2, \dots, h_n e il cui momento è $A_n a^n$.

Pertanto, la distribuzione dell'elettricità sui conduttori circostanti, e il potenziale dovuto a questa distribuzione, sono identici a quelli che sarebbero dovuti a un simile punto multiplo.

Di conseguenza, nel punto $p(x, y, z)$, il potenziale dovuto alle cariche indotte sui corpi circostanti è

$$(9.0.88) \quad \Psi_n = A_n \frac{a_n}{n!} \frac{d'^n}{d'h_1 \cdot \dots \cdot dh_n} G$$

dove l'accento su d' indica che le differenziazioni sono effettuate rispetto a x', y', z' . Dopo che si rendono queste coordinate uguali a quelle del centro della sfera.

È comodo supporre Y_n risolto nei suoi $2n + 1$ elementi del sistema simmetrico. Sia $A_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)}$ uno di questi elementi; allora

$$(9.0.89) \quad \frac{d'^n}{d'h_1 \cdot \dots \cdot dh_n} = D_n^{(\sigma)}$$

Non è necessario, nel caso attuale, aggiungere l'indice s o c , che indicano la presenza del seno o del coseno di $n\varphi$ che si presenta nell'armonica.

Possiamo ora scrivere l'espressione completa di Ψ

$$(9.0.90) \quad \Psi = A_0 G + \sum \sum \left[A_n^{(\sigma)} \frac{a_n}{n!} D_n^{(\sigma)} G \right]$$

Ma, all'interno della sfera, il potenziale è costante, cioè

$$(9.0.91) \quad \Psi + \frac{A_0}{a} + \sum \sum \left[\frac{r^{n_1}}{a^{n_1+1}} A_{n_1}^{(\sigma_1)} Y_{n_1}^{(\sigma_1)} \right] = \text{costante}$$

Effettuiamo su questa espressione l'operazione $D_{n_1}^{(\sigma_1)}$, dove le differenziazioni devono essere fatte rispetto a x, y, z e dove i valori di n_1 e σ_1 sono indipendenti da quelli di n e σ . Tutti i termini della (9-92) scompaiono, tranne quello che fa parte di $Y_{n_1}^{(\sigma_1)}$ e troviamo

$$(9.0.92) \quad -2 \frac{(n_1 + \sigma_1)! (n_1 - \sigma_1)!}{2^{2\sigma_1} n!} \frac{1}{a^{n_1+1}} A_{n_1}^{(\sigma_1)} = A_0 D_{n_1}^{(\sigma_1)} G + \sum \sum \left[A_n^{(\sigma)} \frac{a^n}{n!} D_{n_1}^{(\sigma_1)} D_n^{(\sigma)} G \right]$$

Otteniamo così una serie di equazioni: il primo membro di ognuna di esse contiene uno dei coefficienti che vogliamo determinare. Il primo termine del secondo membro contiene A_0 la carica della sfera, e lo possiamo considerare.

Trascurando provvisoriamente gli altri termini, abbiamo, in prima approssimazione ,

$$(9.0.93) \quad A_{n_1}^{(\sigma_1)} = -\frac{1}{2} \frac{2^{2\sigma} n_1!}{(n_1 + \sigma_1)! (n_1 - \sigma_1)!} A_0 a^{n_1+1} D_{n_1}^{(\sigma_1)} G$$

Se si indica con b la più breve distanza dal centro della sfera al più vicino dei conduttori circostanti,

$$a^{n_1+1} D_{n_1}^{(\sigma_1)} G < \left(\frac{a}{b} \right)^{n_1+1}$$

Se quindi b è grande rispetto al raggio a della sfera, i coefficienti delle altre armoniche sferiche sono molto piccoli rispetto a A_0 . Pertanto, i termini che seguono il primo nel secondo membro della (9-93) saranno dello stesso ordine di grandezza di $\left(\frac{a}{b} \right)^{2n+n_1+1}$.

Li si può quindi trascurare in una prima approssimazione; poi, alla seconda approssimazione, introdurre in certi termini i valori dei coefficienti ottenuti nella prima approssimazione, e così di seguito finché si raggiunge il grado di approssimazione voluto.

Distribuzione dell'elettricità su un conduttore quasi sferico. 145a. Sia

$$(9.0.94) \quad r = a(1 + F)$$

l'equazione della superficie del conduttore, essendo F funzione della direzione di r , cioè di θ e di φ ; e supporremo in questo studio che il suo quadrato possa essere trascurato.

Sviluppiamo F in una serie di armoniche di superficie

$$(9.0.95) \quad F = f_0 + f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \dots + f_n Y_n$$

Di questi termini, il primo dipende dall'eccesso del raggio media su a . Se quindi ammettiamo che a sia il raggio medio, cioè che a sia all'incirca il raggio di una sfera il cui volume è uguale a quello del conduttore dato, il coefficiente f_0 scompare.

Il secondo termine, in f_1 , dipende dalla distanza dell'origine dal centro di massa del conduttore che si suppone di densità uniforme. Se quindi prendiamo questo centro per origine, pure questo secondo termine scompare.

Supporremo dapprima che il conduttore ha una carica A_0 , senza che alcuna forza elettrica esterna agisca su di lui. Il potenziale all'esterno del conduttore deve quindi essere della forma

$$(9.0.96) \quad V = A_0 \frac{1}{r} + A_1 Y_1' \frac{1}{r^2} + \dots + A_n Y_n' \frac{1}{r^{n+1}}$$

dove le armoniche di superficie non sono assunte essere dello stesso tipo dello sviluppo di F .

Alla superficie del conduttore, il potenziale è quello del conduttore, cioè la quantità costante a .

Pertanto, se si sviluppano le potenze di r in funzione di a e di F , e si trascura il quadrato e le potenze superiori di F , si ha

$$(9.0.97) \quad a = A_0 \frac{1}{a} (1 - F) + A_1 \frac{1}{a^2} Y_1' (1 - 2F) + \dots + A_n \frac{1}{a^{n+1}} Y_n' (1 - (n + 1) F)$$

Poiché i coefficienti A_1, \dots sono evidentemente molto piccoli rispetto ad A_0 , si possono all'inizio trascurare i prodotti di questi coefficienti con F .

Se ora nel primo termine si sostituisce F con il suo sviluppo in armoniche sferiche e se si uguagliano a zero i termini contenenti armoniche dello stesso ordine, si trova

$$(9.0.98) \quad a = A_0 \frac{1}{a}$$

$$(9.0.99) \quad A_1 Y_1' = A_0 a f_1 Y_1 = 0$$

$$(9.0.100) \quad A_n Y_n' = A_0 a^n f_n Y_n$$

Da queste equazioni risulta che le Y' devono essere dello stesso tipo delle Y e, di conseguenza, essere loro identiche; e che

$$A_1 = 0 \quad A_n = A_0 a^n f_n$$

Per determinare la densità in un punto della superficie, abbiamo l'equazione

$$(9.0.101) \quad 4\pi\sigma = -\frac{dV}{d\nu} = -\frac{dV}{dr} \cos \epsilon$$

dove ν è la normale, e ϵ l'angolo della normale con il raggio. Poiché, in questo studio, si suppone molto piccoli F e le sue derivate prime rispetto a θ e a φ , si può prendere $\cos \epsilon = 1$, di modo che

$$(9.0.102) \quad 4\pi\sigma = -\frac{dV}{dr} = A_0 \frac{1}{r^2} + \dots + (n+1) A_n Y_n \frac{1}{r^{n+2}}$$

Sviluppando le potenze di r in funzione di a e di F , e trascurando i prodotti di A_n per F , si trova

$$(9.0.103) \quad 4\pi\sigma = A_0 \frac{1}{a^2} (1 - 2F) + \dots + (n+1) A_n Y_n \frac{1}{a^{n+2}}$$

Sviluppando F in armoniche sferiche e dando ad A_n il suo valore precedentemente trovato, si ottiene

$$(9.0.104) \quad 4\pi\sigma = A_0 \frac{1}{a^2} [1 + f_2 Y_2 + 2f_3 Y_3 + \dots + (n-1) f_n Y_n]$$

Pertanto, se la superficie data differisce dalla superficie di una sfera per uno strato sottile il cui spessore varia come il valore di un'armonica sferica di ordine n , il rapporto tra la differenza delle densità superficiali in due punti e la loro somma sarà uguale a $n-1$ volte il rapporto tra la differenza e la somma dei raggi in questi due punti.

145b. Sia un conduttore quasi sferico e soggetto all'azione di forze esterne, il cui potenziale è U : sviluppiamo questo potenziale in una serie di armoniche sferiche di grado positivo, aventi la loro origine nel centro del volume del condensatore:

$$(9.0.105) \quad U = B_0 + B_1 r Y_1' + B_2 r^2 Y_2' + \dots + B_n r^n Y_n'$$

dove l'accento di Y significa che queste armoniche non sono necessariamente dello stesso tipo di quelle che compaiono nello sviluppo di F .

Se il conduttore fosse esattamente sferico, il potenziale dovuto alla sua carica superficiale in un punto esterno sarebbe

$$(9.0.106) \quad V = A_0 \frac{1}{r} - B_1 \frac{a^3}{r^2} Y_1' - \dots - B_n \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} Y_n'$$

Rappresentiamo con $V + W$ il potenziale dovuto alla carica superficiale effettiva, dove

$$(9.0.107) \quad W = C_0 \frac{1}{r} + C_1 Y_1'' \frac{1}{r^2} + \dots + C_n Y_n'' \frac{1}{r^{m+1}}$$

essendo le armoniche dotate di un doppio accento differenti da quelle che incontrano sia in F , sia in U , e essendo i coefficienti C piccoli, poiché pure lo stesso F è piccolo.

La condizione da soddisfare è che, per $r = a(1 + F)$

$$U + V + W = \text{cost} = A_0 \frac{1}{a} + B_0$$

potenziale del conduttore.

Sviluppiamo le potenze di r in funzione di a e F , conservando la prima potenza di F quando è moltiplicata per A o B , e trascurandola quando è moltiplicata per la piccola quantità C ; troviamo

$$(9.0.108) \quad F \left[-A_0 \frac{1}{a} + 3B_1 a^3 Y_1' + 5B_2 a^5 Y_2' + \dots + (2n+1) B_n a^{2n+1} Y_n' \right] + C_0 \frac{1}{r} + C_1 \frac{1}{r^2} Y_1'' + \dots + C_m \frac{1}{r^{m+1}} Y_m'' = 0$$

Per determinare i coefficienti C , bisogna effettuare la moltiplicazione indicata nel primo termine ed esprimere il risultato con una serie di armoniche sferiche. Questa serie, con i suoi segni cambiati, rappresenterà W alla superficie del conduttore.

Il prodotto di due armoniche sferiche di ordine n e m è una funzione razionale di grado $m+n$ di $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$; può quindi essere sviluppata in una serie di armoniche sferiche il cui ordine non supera m , e se il potenziale dovuto alle forze esterne può essere sviluppato in armoniche sferiche il cui ordine non supera n , il potenziale dovuto alla carica superficiale non comprenderà armoniche sferiche di ordine superiore a $m+n$.

Questa densità superficiale può essere dedotta dal potenziale dall'equazione

$$(9.0.109) \quad 4\pi\sigma + \frac{d}{dr} (U + V + W) = 0$$

145c. *Conduttore quasi sferico racchiuso in un contenitore quasi sferico e quasi concentrico.*
Sia

$$(9.0.110) \quad r = a(1 + F)$$

l'equazione della superficie del conduttore, dove

$$(9.0.111) \quad F = f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \dots + f_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)}$$

Sia

$$(9.0.112) \quad r = b(1 + G)$$

l'equazione della superficie interna del recipiente dove

$$(9.0.113) \quad G = g_1 Y_1 + g_2 Y_2 + \dots + g_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)}$$

essendo le f e le g piccole rispetto all'unità, e $Y_n^{(\sigma)}$ l'armonica di superficie di ordine n e di tipo σ .

Siano α il potenziale del conduttore e β quello del recipiente; e sviluppiamo in serie di armoniche sferiche il potenziale di un punto qualunque compreso tra il conduttore e il recipiente

$$(9.0.114) \quad \Psi = h_0 + h_1 Y_1 r + \dots + h_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)} r^n + k_0 \frac{1}{r} + k_1 Y_1 \frac{1}{r^2} + \dots + k_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)} \frac{1}{r^{n+1}}$$

bisogna determinare le costanti della forma h e k in modo tale che, per $r = a(1 + F)$, $\Psi = \alpha$ e quando $r = b(1 + G)$, $\Psi = \beta$.

È chiaro, dal nostro studio precedente, che tutte le h e le k , tranne h_0 e k_0 , sono quantità molto piccole, i cui prodotti per F si possono trascurare. Possiamo quindi porre

$$(9.0.115) \quad \alpha = h_0 + k_0 \frac{1}{a} (1 - F) + \dots + \left(h_n^{(\sigma)} a^n + k_n^{(\sigma)} \frac{1}{a^{n+1}} \right) Y_n^{(\sigma)}$$

$$(9.0.116) \quad \beta = h_0 + k_0 \frac{1}{b} (1 - G) + \dots + \left(h_n^{(\sigma)} b^n + k_n^{(\sigma)} \frac{1}{b^{n+1}} \right) Y_n^{(\sigma)}$$

abbiamo pertanto

$$(9.0.117) \quad \alpha = h_0 + k_0 \frac{1}{a}$$

$$(9.0.118) \quad \beta = h_0 + k_0 \frac{1}{b}$$

$$(9.0.119) \quad k_0 \frac{1}{a} f_n^{(\sigma)} = h_n^{(\sigma)} a^n + k_n^{(\sigma)} \frac{1}{a^{n+1}}$$

$$(9.0.120) \quad k_0 \frac{1}{a} g_n^{(\sigma)} = h_n^{(\sigma)} b^n + k_n^{(\sigma)} \frac{1}{b^{n+1}}$$

da cui ricaviamo, per la carica del conduttore interno

$$(9.0.121) \quad k_0 = (\alpha - \beta) \frac{ab}{b - a}$$

e, per i coefficienti delle armoniche di ordine n ,

$$(9.0.122) \quad h_n = k_0 \frac{b^n g_n - a^n f_n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}$$

$$(9.0.123) \quad k_n = k_0 a^n b^n \frac{b^{n+1} f_n - a^{n+1} g_n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}$$

dove serve ricordarsi che f_n, g_n, k_n sono i coefficienti dei termini dello stesso tipo e dello stesso ordine.

La densità superficiale sul conduttore interno è data dall'equazione

$$4\pi\sigma a^2 = k_0 (1 + \dots + A_n Y_n^{(\sigma)} + \dots)$$

dove

$$(9.0.124) \quad A_n = \frac{f_n \{na^{2n+1} + (n+1)b^{2n+1}\} - g_n (2n+1)a^{n+1}b^n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}$$

146. Come esempio dell'impiego delle armoniche zonali, ricerchiamo le condizioni dell'equilibrio elettrico su due conduttori sferici.

Siano a e b i raggi delle sfere; c la distanza dai centri. Per semplificare, porremo $a = cx$, $b = cy$, di modo che x e y sono quantità numeriche più piccole dell'unità.

Prendiamo, per asse delle armoniche zonali, la linea che congiunge i centri delle sfere; per polo di queste armoniche su ogni sfera, il punto di questa sfera più vicino all'altra sfera.

Sia r la distanza di un punto qualsiasi dal centro della prima sfera e sia s la distanza dello stesso punto dal centro della seconda sfera.

Supponiamo che la densità superficiale σ_1 della prima sfera sia data dall'equazione

$$(9.0.125) \quad 4\pi\sigma_1 a^2 = A + A_1 P_1 + 3A_2 P_2 + \dots + (2m+1) A_m P_m$$

di modo che A è la carica totale della sfera, e che A_1, A_2, \dots sono i coefficienti delle armoniche zonali P_1, P_2, \dots

Il potenziale, dovuto a una tale distribuzione della carica, può essere rappresentato da

$$(9.0.126) \quad U' = \frac{1}{a} \left[A + A_1 P_1 \frac{r}{a} + A_2 P_2 \frac{r^2}{a^2} + \dots + A_m P_m \frac{r^m}{a^m} \right]$$

per i punti all'interno della sfera, e da

$$(9.0.127) \quad U = \frac{1}{r} \left[A + A_1 P_1 \frac{a}{r} + A_2 P_2 \frac{a^2}{r^2} + \dots + A_m P_m \frac{a^m}{r^m} \right]$$

per i punti esterni.

Analogamente, se la densità superficiale della seconda sfera è data dall'equazione

$$(9.0.128) \quad 4\pi\sigma_1 b^2 = B + B_1 P_1 + \dots + (2n+1) B_n P_n$$

il potenziale interno ed esterno alla sfera si possono rappresentare con le equazioni della forma

$$(9.0.129) \quad V' = \frac{1}{b} \left[B + B_1 P_1 \frac{s}{b} + \dots + B_n P_n \frac{s^n}{b^n} \right]$$

$$(9.0.130) \quad V = \frac{1}{s} \left[B + B_1 P_1 \frac{b}{s} + \dots + B_n P_n \frac{b^n}{s_n} \right]$$

dove le armoniche generali sono qui relative alla seconda sfera.

Le rispettive cariche delle sfere sono A e B .

Il potenziale in tutti i punti interni alla prima sfera è costante, e uguale ad α , potenziale di questa sfera, di modo che per ogni punto interno alla prima sfera

$$(9.0.131) \quad U' + V = \alpha$$

Allo stesso modo, se β è il potenziale della seconda sfera, per punti interni a questa sfera,

$$(9.0.132) \quad U + V' = \beta$$

Per i punti esterni alle due sfere, il potenziale è Ψ e si ha

$$(9.0.133) \quad U + V = \Psi$$

Sull'asse, tra i centri delle sfere,

$$(9.0.134) \quad r + s = c$$

da cui, differenziando rispetto a r e ponendo $r = 0$ dopo la differenziazione, e ricordando che ciascuna delle armoniche zonali diviene uguale all'unità al suo polo, troviamo

$$(9.0.135) \quad \begin{aligned} A_1 \frac{1}{a^2} - \frac{dV}{ds} &= 0 \\ A_2 \frac{2!}{a^3} + \frac{d^2V}{ds^2} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ A_m \frac{m!}{a^{m+1}} + (-1)^m \frac{d^m V}{ds^m} &= 0 \end{aligned}$$

dove si deve porre $s = c$ dopo la differenziazione.

Se effettuiamo le differenziazioni e poniamo

$$\frac{a}{c} = x \quad \frac{b}{c} = y$$

queste equazioni divengono

$$(9.0.136) \quad \left. \begin{aligned} 0 &= A_1 + Bx^2 + 2B_1x^2y + 3B_2x^2y^2 + \dots + (n+1) B_nx^2y^n \\ 0 &= A_2 + Bx^3 + 3B_1x^3y + 6B_2x^3y^2 + \dots + \frac{1}{2} (n+1) (n+2) B_nx^3y^n \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= A_m + Bx^{m+1} + (m+1) B_1x^{m+1}y + \frac{1}{2} (m+1) (m+2) B_2x^{m+1}y^2 + \\ &\quad \dots + \frac{(m+n)!}{m!n!} B_nx^{m+1}y^n \end{aligned} \right\}$$

Le stesse operazioni effettuate per la seconda sfera danno

$$(9.0.137) \quad \left. \begin{aligned} 0 &= B_1 + Ay^2 + 2A_1xy^2 + 3A_2x^2y^2 + \dots + (m+1) A_mx^my^2 \\ 0 &= B_2 + Ay^3 + 3A_1xy^3 + 6A_2x^2y^3 + \dots + \frac{1}{2} (m+1) (m+2) A_nx^my^3 \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= B_m + Ay^{n+1} + (n+1) A_1xy^{n+1} + \frac{1}{2} (n+1) (n+2) A_2x^2y^{n+1} + \\ &\quad \dots + \frac{(m+n)!}{m!n!} A_mx^my^{n+1} \end{aligned} \right\}$$

Per determinare i potenziali di due sfere, abbiamo le equazioni (9-131,132) che, ora, possiamo scrivere

$$(9.0.138) \quad c\alpha = A \frac{1}{x} + B + B_1y + B_2y^2 + \dots + B_ny^n$$

$$(9.0.139) \quad c\beta = B \frac{1}{y} + A + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_mx^m$$

Se quindi limitiamo la nostra attenzione ai coefficienti da A_1 a A_m e da B_1 a B_n , abbiamo $m + n$ equazioni per determinare queste quantità in funzione delle cariche A e B di due sfere; introducendo poi nelle (9-139-139) i valori di questi coefficienti, possiamo esprimere i potenziali delle sfere in funzione delle loro cariche.

Queste operazioni possono essere espresse sotto forma di determinanti; ma, per il calcolo, è più comodo procedere nel modo seguente:

Sostituendo, nelle (9-136), i valori di B_1, \dots, B_n ricavati dalla (9-137) , troviamo

$$(9.0.140) \quad \begin{aligned} A_1 = & -Bx^2 + Ax^2y^2 [2 \cdot 1 + 3 \cdot 1y^2 + 10 \cdot 1y^4 + 5 \cdot 1y^6 + 6 \cdot 1y^8] \\ & + A_1x^3y^3 [2 \cdot 2 + 3 \cdot 3y^2 + 4 \cdot 4y^4 + 5 \cdot 5y^6] \\ & + A_2x^4y^3 [2 \cdot 3 + 3 \cdot 6y^2 + 4 \cdot 10y^4] + \\ & + A_3x^5y^3 [2 \cdot 4 + 3 \cdot 10y^2] + A_4x^6y^3 [2 \cdot 5] \end{aligned}$$

$$(9.0.141) \quad \begin{aligned} A_2 = & -Bx^2 + Ax^3y^3 [3 \cdot 1 + 6 \cdot 1y^2 + 10 \cdot 1y^4 + 15 \cdot 1y^6] \\ & + A_1x^4y^3 [3 \cdot 2 + 6 \cdot 3y^2 + 10 \cdot 4y^4] \\ & + A_2x^5y^3 [3 \cdot 3 + 6 \cdot 6y^2] + A_3x^6y^3 [3 \cdot 4] \end{aligned}$$

$$(9.0.142) \quad \begin{aligned} A_3 = & -Bx^4 + Ax^4y^3 [4 \cdot 1 + 10 \cdot 1y^2 + 20 \cdot 1y^4] \\ & + A_1x^5y^3 [4 \cdot 2 + 10 \cdot 3y^2] + A_2x^6y^3 [4 \cdot 3] \end{aligned}$$

$$(9.0.143) \quad A_4 = -Bx^5 + Ax^5y^3 [5 + 15y^2] + A_1x^6y^3 [5 \cdot 2]$$

Sostituendo nei secondi membri di queste equazioni i valori approssimati di A_1, \dots e ripetendo questa operazione per ottenere approssimazioni sempre migliori, possiamo spingere l'approssimazione del coefficiente a piacere nelle potenze crescenti e nei prodotti di x e y .

Se poniamo

$$\begin{aligned} A_n &= p_n A - q_n B \\ B_n &= -r_n A + s_n B \end{aligned}$$

troviamo

$$(9.0.144) \quad \begin{aligned} p_1 = & x^2y^3 [2 + 3y^2 + 4y^4 + 5y^6 + 6y^8 + 7y^{10} + 8y^{12} + 9y^{14} + \dots] + \\ & + x^5y^6 [8 + 30y^2 + 75y^4 + 154y^6 + 280y^8 + \dots] + \\ & + x^7y^6 [18 + 90y^2 + 288y^4 + 735y^6 + \dots] + \\ & + x^9y^6 [32 + 200y^2 + 780y^4 + \dots] + \\ & + x^{11}y^6 [50 + 375y^2 + \dots] + x^{13}y^6 [72 + \dots] + \\ & \dots \dots \dots \\ & + x^8y^9 [32 + 192y^2] + x^{10}y^9 [144 + \dots] \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$(9.0.145) \quad \begin{aligned} q_1 = & x^5y^3 [4 + 9y^2 + 16y^4 + 25y^6 + 36y^8 + 49y^{10} + 64y^{12} + \dots] + \\ & + x^7y^3 [6 + 18y^2 + 40y^4 + 75y^6 + 126y^8 + 196y^{10} \dots] + \\ & + x^9y^3 [8 + 30y^2 + 80y^4 + 175y^6 + 336y^8 + \dots] + \\ & + x^{11}y^3 [10 + 45y^2 + 140y^4 + 350y^6 + \dots] + \\ & + x^{13}y^3 [12 + 63y^2 + 224y^4 + \dots] + x^{15}y^3 [14 + 84y^2 + \dots] + \\ & + x^{17}y^3 [16 + \dots] + \\ & \dots \dots \dots \\ & + x^8y^6 [16 + 72y^2 + 209y^4 + 488y^6 + \dots] + \\ & + x^{10}y^6 [60 + 342y^2 + 1222y^4 + \dots] + \\ & + x^{12}y^6 [150 + 1050y^2 + \dots] + x^{14}y^6 [308 + \dots] + \\ & \dots \dots \dots \\ & + x^{11}y^9 [64 + \dots] \end{aligned}$$

Per gli ulteriori coefficienti, sarà più comodo scriverli in funzione di a, b, c e ordinare i termini secondo le potenze di c . Si rende così più facile la differenziazioni rispetto a c . Troviamo così

$$(9.0.146) \quad \begin{aligned} p_1 = & 2a^2b^3c^{-5} + 3a^2b^5c^{-7} + 4a^2b^7c^{-9} + (5a^2b^9 + 8a^5b^6)c^{-11} + \\ & + (6a^2b^{11} + 30a^5b^8 + 18a^7b^6)c^{-13} + \\ & + (7a^2b^{13} + 75a^5b^{10} + 90a^7b^8 + 32a^9b^6)c^{-15} + \\ & + (8a^2b^{15} + 154a^5b^{12} + 288a^7b^{10} + 32a^8b^9 + 200a^9b^8 + 50a^{11}b^6)c^{-17} + \\ & + (9a^2b^{17} + 280a^5b^{14} + 735a^7b^{12} + 192a^8b^{11} + 780a^9b^{10} + \\ & + 144a^{10}b^9 + 375a^{11}b^8 + 72a^{13}b^6)c^{-19} \end{aligned}$$

$$(9.0.147) \quad \begin{aligned} q_1 = & a^2c^{-2} + 4a^5b^3c^{-8} + (6a^7b^3 + 9a^5b^5)c^{-10} + \\ & + (8a^9b^3 + 18a^7b^5 + 186a^5b^7)c^{-12} + \\ & + (10a^{11}b^3 + 30a^9b^5 + 16a^8b^6 + 40a^7b^7 + 25a^5b^9)c^{-14} + \\ & + (12a^{13}b^3 + 45a^{11}b^5 + 60a^{10}b^6 + 80a^9b^7 + 72a^8b^8 + 75a^7b^9 + 36a^5b^{11})c^{-16} + \\ & + (14a^{15}b^3 + 63a^{13}b^5 + 150a^{12}b^6 + 140a^{11}b^7 + 342a^{10}b^8 + \\ & + 175a^9b^9 + 209a^8b^{10} + 126a^7b^{11} + 49a^5b^{13})c^{-18} + \\ & + (16a^{17}b^3 + 84a^{15}b^5 + 308a^{14}b^6 + 224a^{13}b^7 + 1050a^{12}b^8 + 414a^{11}b^9 + \\ & + 1222a^{10}b^{10} + 336a^9b^{11} + 488a^8b^{12} + 196a^7b^{13} + 64a^5b^{15})c^{-20} \end{aligned}$$

$$(9.0.148) \quad \begin{aligned} p_2 = & 3a^3b^3c^{-6} + 6a^3b^5c^{-8} + 10a^3b^7c^{-10} + (12a^6b^6 + 15a^3b^9)c^{-12} + \\ & + (27a^8b^6 + 54a^6b^8 + 21a^3b^{11})c^{-14} + \\ & + (48a^{10}b^6 + 162a^8b^8 + 158a^6b^{10} + 28a^3b^{13})c^{-16} + \\ & + (75a^{12}b^6 + 360a^{10}b^8 + 48a^9b^9 + 606a^8b^{10} + \\ & + 372a^6b^{12} + 36a^3b^{15})c^{-18} \end{aligned}$$

$$(9.0.149) \quad \begin{aligned} q_2 = & a^3c^{-3} + 6a^6b^3c^{-9} + (9a^8b^3 + 18a^6b^5)c^{-11} + \\ & + (12a^{10}b^3 + 36a^8b^5 + 40a^6b^7)c^{-13} + \\ & + (15a^{12}b^3 + 60a^{10}b^5 + 24a^9b^6 + 100a^8b^7 + 75a^6b^9)c^{-15} + \\ & + (18a^{14}b^3 + 90a^{12}b^5 + 90a^{11}b^6 + 200a^{10}b^7 + \\ & + 126a^9b^8 + 225a^8b^9 + 126a^6b^{11})c^{-17} + \\ & + (21a^{16}b^3 + 126a^{14}b^5 + 225a^{13}b^6 + 350a^{12}b^7 + 594a^{11}b^8 + \\ & + 525a^{10}b^9 + 418a^9b^{10} + 441a^8b^{11} + 196a^6b^{13})c^{-19} \end{aligned}$$

$$(9.0.150) \quad \begin{aligned} p_3 = & 4a^4b^3c^{-7} + 10a^4b^5c^{-9} + 20a^4b^7c^{-11} + (16a^7b^6 + 35a^4b^9)c^{-13} + \\ & + (36a^9b^6 + 84a^7b^8 + 56a^4b^{11})c^{-15} + \\ & + (64a^{11}b^6 + 252a^9b^8 + 282a^7b^{10} + 84a^4b^{13})c^{-17} \end{aligned}$$

$$(9.0.151) \quad \begin{aligned} q_3 = & a^4c^{-4} + 8a^7b^3c^{-10} + (12a^9b^3 + 30a^7b^5)c^{-12} + \\ & + (16a^{11}b^3 + 60a^9b^5 + 80a^7b^7)c^{-14} + \\ & + (20a^{13}b^3 + 100a^{11}b^5 + 32a^{10}b^6 + 200a^9b^7 + 175a^7b^9)c^{-16} + \\ & + (24a^{15}b^3 + 150a^{13}b^5 + 120a^{12}b^6 + 400a^{11}b^7 + 192a^{10}b^8 + \\ & + 525a^9b^9 + 336a^7b^{11})c^{-18} \end{aligned}$$

$$(9.0.152) \quad \begin{aligned} p_4 = & 5a^5b^3c^{-8} + 15a^5b^5c^{-10} + 35a^5b^7c^{-12} + (20a^8b^6 + 70a^5b^9)c^{-14} + \\ & + (45a^{10}b^6 + 120a^8b^8 + 126a^5b^{11})c^{-16} \end{aligned}$$

$$(9.0.153) \quad \begin{aligned} q_4 = & a^5c^{-5} + 10a^8b^3c^{-11} + (15a^{10}b^3 + 45a^8b^5)c^{-13} + \\ & + (20a^{12}b^3 + 90a^{10}b^5 + 140a^8b^7)c^{-15} + \\ & + (25a^{14}b^3 + 150a^{12}b^5 + 40a^{11}b^6 + 350a^{10}b^7 + 350a^8b^9)c^{-17} \end{aligned}$$

$$(9.0.154) \quad \begin{aligned} p_5 = & 6a^6b^3c^{-9} + 21a^6b^5c^{-11} + 56a^6b^7c^{-13} + \\ & + (24a^9b^6 + 126a^6b^9)c^{-15} \end{aligned}$$

$$(9.0.155) \quad \begin{aligned} q_5 = & a^6c^{-6} + 12a^9b^3c^{-12} + (18a^{11}b^3 + 63a^9b^5)c^{-14} + \\ & + (24a^{13}b^3 + 126a^{11}b^5 + 224a^9b^7)c^{-16} \end{aligned}$$

$$(9.0.156) \quad p_6 = 7a^7b^3c^{-10} + 28a^7b^5c^{-12} + 84a^7b^7c^{-14}$$

$$(9.0.157) \quad q_6 = a^7c^{-7} + 14a^{10}b^3c^{-13} + (21a^{12}b^3 + 84a^{10}b^5)c^{-15}$$

$$(9.0.158) \quad p_7 = 8a^8b^3c^{-11} + 36a^8b^5c^{-13}$$

$$(9.0.159) \quad q_7 = a^8c^{-8} + 16a^{11}b^3c^{-14}$$

$$(9.0.160) \quad p_8 = 9a^9b^3c^{-12}$$

$$(9.0.161) \quad q_8 = a^9c^{-9}$$

I valori di r e di s si possono dedurre scambiando a e b nelle p e nelle q .

Se, ora, calcoliamo il potenziale di due sfere in funzione di questi coefficienti sotto la forma

$$(9.0.162) \quad \alpha = lA + mB$$

$$(9.0.163) \quad \beta = mA + nB$$

allora l, m, n sono i coefficienti di potenziale (si veda § 87) e si ha

$$(9.0.164) \quad m = c^{-1} + p_1ac^{-2} + p_2a^2c^{-3} + \dots$$

$$(9.0.165) \quad n = b^{-1} - q_1ac^{-2} - q_2a^2c^{-3} - \dots$$

o, sviluppando in termini di a, b, c

$$(9.0.166)$$

$$\begin{aligned} m = & c^{-1} + 2a^3b^3c^{-7} + 3a^3b^3(a^2 + b^2)c^{-9} + a^3b^3(4a^4 + 6a^2b^2 + 4b^4)c^{-11} + \\ & + a^3b^3[5a^6 + 10a^4b^2 + 8a^3b^3 + 10a^2b^4 + 5b^6]c^{-13} + \\ & + a^3b^3[6a^8 + 15a^6b^2 + 30a^5b^3 + 20a^4b^4 + \\ & + 30a^3b^5 + 15a^2b^6 + 6b^8]c^{-15} + \\ & + a^3b^3[7a^{10} + 21a^8b^2 + 75a^7b^3 + 35a^6b^4 + 144a^5b^5 + \\ & + 35a^4b^6 + 75a^3b^7 + 21a^2b^8 + 7b^{10}]c^{-17} + \\ & + a^3b^3[8a^{12} + 28a^{10}b^2 + 154a^9b^3 + 56a^8b^4 + 446a^7b^5 + 102a^6b^6 + \\ & + 446a^5b^7 + 56a^4b^8 + 154a^3b^9 + 28a^2b^{10} + 8b^{12}]c^{-19} + \\ & + a^3b^3[9a^{14} + 36a^{12}b^2 + 280a^{11}b^3 + 84a^{10}b^4 + 1107a^9b^5 + 318a^8b^6 + \\ & + 1668a^7b^7 + 318a^6b^8 + 1107a^5b^9 + 84a^4b^{10} + 280a^3b^{11} + 36a^2b^{12} + 9b^{14}]c^{-21} \end{aligned}$$

$$(9.0.167) \quad \begin{aligned} n = & b^{-1} - a^3c^{-4} - a^5c^{-6} - (a^3 + 4b^3)a^6c^{-10} + \\ & - (a^5 + 12a^2b^3 + 9b^5)a^6c^{-12} - (a^7 + 25a^4b^3 + 36a^2b^5 + 16b^7)a^6c^{-14} + \\ & - (a^9 + 44a^6b^3 + 96a^4b^5 + 16a^3b^6 + 80a^2b^7 + 25b^9)a^6c^{-16} + \\ & - (a^{11} + 70a^8b^3 + 210a^6b^5 + 84a^5b^6 + 260a^4b^7 + \\ & + 72a^3b^8 + 150a^2b^9 + 36b^{11})a^6c^{-18} + \\ & - (a^{13} + 104a^{10}b^3 + 406a^8b^5 + 272a^7b^6 + 680a^6b^7 + 468a^5b^8 + \\ & + 575a^4b^9 + 209a^3b^{10} + 252a^2b^{11} + 49b^{13})a^6c^{-20} + \\ & - (a^{15} + 147a^{12}b^3 + 720a^{10}b^5 + 693a^9b^6 + 1548a^6b^7 + 1836a^7b^8 + \\ & + 1814a^6b^9 + 1640a^5b^{10} + 1113a^4b^{11} + 488a^3b^{12} + \\ & + 392a^2b^{13} + 64b^{15})a^6c^{-22} \end{aligned}$$

Il valore di l si può dedurre da quello di n scambiando tra loro a e b .

L'energia potenziale del sistema è, dalla § 87,

$$(9.0.168) \quad W = \frac{1}{2}lA^2 + mAB + \frac{1}{2}nB^2$$

e la repulsione che si esercita tra le due sfere è, dalla § 93a,

$$(9.0.169) \quad -\frac{dW}{dc} = \frac{1}{2}A^2\frac{dl}{dc} + AB\frac{dm}{dc} + \frac{1}{2}B^2\frac{dn}{dc}$$

La densità superficiale, in un punto qualunque di ognuna delle due sfere, è data dalle (9-125,128) in funzione dei coefficienti A_n e B_n .

Superfici di secondo grado omofocali¹

147. Sia l'equazione generale di un sistema omofocale

$$(10.0.1) \quad \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

dove λ è un parametro variabile a cui assegneremo un indice secondo la specie delle superfici considerate: così prenderemo λ_1 per gli iperboloidi a due falde, λ_2 per gli iperboloidi a una falda, e λ_3 per gli ellissoidi. Supponiamo che l'ordine

$$a, \lambda_1, b, \lambda_2, c, \lambda_3$$

sia quello delle grandezze crescenti di queste quantità. La quantità a è introdotto per la simmetria, ma in tutti i nostri risultati supporremo $a = 0$.

Se si considerano le tre superfici i cui parametri sono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, si trova, eliminando tra loro equazioni, per le quali il valore di x^2 , nel loro punto di intersezione, soddisfa all'equazione

$$(10.0.2) \quad x^2 (b^2 - a^2) (c^2 - a^2) = (\lambda_1^2 - a^2) (\lambda_2^2 - a^2) (\lambda_3^2 - a^2)$$

I valori di y^2 e z^2 si otterranno con la permutazione circolare di a, b, c .

Differenziando questa espressione rispetto a λ_1 , si trova

$$(10.0.3) \quad \frac{dx}{d\lambda_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 - a^2} x$$

Se ds_1 è la lunghezza dell'arco della curva di intersezione di λ_2 e λ_3 , che è compreso tra le superfici λ_1 e $\lambda_1 + d\lambda_1$, si ha

$$(10.0.4) \quad \left| \frac{ds_1}{d\lambda_1} \right|^2 = \left| \frac{dx}{d\lambda_1} \right|^2 + \left| \frac{dy}{d\lambda_1} \right|^2 + \left| \frac{dz}{d\lambda_1} \right|^2 = \frac{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)}{(\lambda_1^2 - a^2) (\lambda_2^2 - b^2) (\lambda_3^2 - c^2)}$$

Il denominatore di questa frazione è il prodotto dei quadrati dei semiassi della superficie λ_1 . Se poniamo

$$(10.0.5) \quad D_1^2 = \lambda_3^2 - \lambda_2^2 \quad D_2^2 = \lambda_3^2 - \lambda_1^2 \quad D_3^2 = \lambda_2^2 - \lambda_1^2$$

e se poniamo $a = 0$, viene

$$(10.0.6) \quad \frac{ds_1}{d\lambda_1} = \frac{D_2 D_3}{\sqrt{b^2 - \lambda_1^2} \sqrt{c^2 - \lambda_1^2}}$$

È facile vedere che D_2 e D_3 sono i semiassi della sezione centrale di λ_1 , che è coniugata del diametro passante per il punto dato, e che D_2 è parallelo a ds_2 e D_3 a ds_3 .

¹Questo studio è principalmente preso in prestito dall'Opera così interessante di G. Lamé: *Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes*, Parigi, 1857.

Se sostituiamo ai parametri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i loro valori in funzione di tre funzioni α, β, γ definite dalle equazioni

$$(10.0.7) \quad \begin{aligned} \alpha &= \int_0^{\lambda_1} \frac{cd\lambda_1}{\sqrt{(b^2-\lambda_1^2)(c^2-\lambda_1^2)}} \\ \beta &= \int_0^{\lambda_1} \frac{cd\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_2^2-b^2)(c^2-\lambda_2^2)}} \\ \gamma &= \int_0^{\lambda_1} \frac{cd\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_3^2-b^2)(\lambda_3^2-c^2)}} \end{aligned}$$

allora

$$(10.0.8) \quad ds_1 = \frac{1}{c} D_2 D_3 d\alpha \quad ds_2 = \frac{1}{c} D_3 D_1 d\beta \quad ds_3 = \frac{1}{c} D_1 D_2 d\gamma$$

148. Ora, sia V il potenziale in un punto qualunque α, β, γ : la forza risultante nella direzione di ds_1 sarà

$$(10.0.9) \quad R_1 = -\frac{dV}{ds_1} = -\frac{dV}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds_1} = -\frac{dV}{d\alpha} \frac{c}{D_2 D_3}$$

Poiché ds_1, ds_2, ds_3 sono perpendicolari tra loro, l'integrale di superficie sull'elemento superficiale ds_1, ds_2 è

$$(10.0.10) \quad R ds_2 ds_3 = -\frac{dV}{d\alpha} \frac{c}{D_2 D_3} \cdot \frac{D_3 D_1}{c} \cdot \frac{D_1 D_2}{c} d\beta d\gamma = -\frac{dV}{d\alpha} \frac{D_1^2}{c} d\beta d\gamma$$

Consideriamo ora l'elemento di volume compreso tra le superfici α, β, γ e $\alpha+d\alpha, \beta+d\beta, \gamma+d\gamma$. Vi saranno otto elementi superficiali ritagliati sulla superficie α dalle superfici β e $\beta+d\beta, \gamma$ e $\gamma+d\gamma$. L'integrale di superficie per l'elemento corrispondente della superficie $\alpha+d\alpha$, sarà

$$+\frac{dV}{d\alpha} \frac{D_1^2}{c} d\beta d\gamma + \frac{d^2 V}{d\alpha^2} \frac{D_1^2}{c} d\alpha d\beta d\gamma$$

poiché D_1 è indipendente da α . L'integrale di superficie per due facce opposte dell'elemento di volume sarà la somma di queste quantità, o

$$\frac{d^2 V}{d\alpha^2} \frac{D_1^2}{c} d\alpha d\beta d\gamma$$

Analogamente gli integrali di superficie per le altre due coppie di facce opposte saranno

$$\frac{d^2 V}{d\beta^2} \frac{D_1^2}{c} d\alpha d\beta d\gamma \quad \frac{d^2 V}{d\gamma^2} \frac{D_1^2}{c} d\alpha d\beta d\gamma$$

Queste sei facce comprendenti un elemento il cui volume è

$$ds_1 ds_2 ds_3 = \frac{D_1^2 D_2^2 D_3^2}{c^3} d\alpha d\beta d\gamma$$

e se ρ è la densità di volume in questo elemento, troviamo, in virtù del § 77, che l'integrale preso sulla superficie totale di questo elemento, aumentata della quantità di elettricità che vi è compresa moltiplicata per 4π , è uguale a zero, o, dividendo per $d\alpha d\beta d\gamma$

$$(10.0.11) \quad \frac{d^2 V}{d\alpha^2} D_1^2 + \frac{d^2 V}{d\beta^2} D_2^2 + \frac{d^2 V}{d\gamma^2} D_3^2 + 4\pi\rho \frac{D_1^2 D_2^2 D_3^2}{c^3} = 0$$

che è la forma che assume in coordinate ellittiche l'equazione di Laplace generalizzata da Poisson.

Se $\rho = 0$, il quarto termine si annulla, e l'equazione equivale a quella di Laplace.

Per la discussione generale di questa equazione, si rinvia il lettore all'opera di Lamé già citata.

149. Per determinare le quantità α, β, γ , le si può mettere sotto forma di integrali ellittici ordinati, introducendo gli angoli ausiliari θ, ϕ, ψ ; si ha

$$(10.0.12) \quad \lambda_1 = b \sin \theta$$

$$(10.0.13) \quad \lambda_2 = \sqrt{c^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}$$

$$(10.0.14) \quad \lambda_3 = c \sec \psi$$

Se si pone $b = k$, e $k^2 + k'^2 = 1$, chiamando k, k' i due moduli complementari del sistema omofocale, si trova

$$(10.0.15) \quad \alpha = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

un integrale ellittico di prima specie, che si può scrivere secondo la notazione consueta: $F(k, \theta)$.

Analogamente, si ha

$$(10.0.16) \quad \beta = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \phi}} = F(k') - F(k)$$

dove $F'(k')$ è la funzione completa per il modulo k' ,

$$(10.0.17) \quad \gamma = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi}} = F(k) - F(k, \psi)$$

Qui α è raffigurata come funzione dell'angolo θ , che, di conseguenza, deve essere una funzione del parametro λ_1 ; β , come una funzione di ϕ , e, di conseguenza, di λ_2 ; e γ , come una funzione di ψ o di λ_3 .

Ma questi angoli e questi parametri possono essere considerati come funzioni di α, β, γ . Le proprietà di queste funzioni inverse, e di altre che ne dipendono, sono sviluppate nel Trattato di M. Lamé su questo argomento.

È facile vedere che i parametri, essendo funzioni periodiche degli angoli ausiliari, devono essere funzioni periodiche di α, β, γ . Il periodo di λ_1 e di λ_3 è $4F(k)$, quello di λ_2 è $2F(k')$.

Soluzioni particolari. 150. Se V è una funzione lineare di α, β, γ , l'equazione è soddisfatta. Pertanto possiamo dedurre dall'equazione la distribuzione dell'elettricità su due superfici cofocali della stessa famiglia, mantenute a potenziali costanti, e il potenziale in un punto qualunque dello spazio compreso tra queste superfici.

Iperboloide a due falde. Se α è una costante, la superficie corrispondente è un'iperboloide a due falde. Supponiamo che il segno di α sia lo stesso di quello di x sulla falda che consideriamo. Potremo così studiarne una sola falda alla volta.

Siano α_1 e α_2 i valori di α per due falde particolari appartenenti allo stesso iperboloide o a iperboloidi diversi, e siano V_1 e V_2 i potenziali ai quali essi sono mantenuti. Allora, se poniamo

$$(10.0.18) \quad V = \frac{\alpha_1 V_2 - \alpha_2 V_1 + \alpha (V_1 - V_2)}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

le condizioni saranno soddisfatte sulle due superfici e in tutto lo spazio intermedio. Se poniamo V costante e uguale a V_1 per tutto lo spazio posto al di là della superficie α_1 , V costante e uguale a V_2 per tutto lo spazio posto al di là della superficie α_2 , avremo la soluzione completa in questo caso particolare.

La forza risultante in un punto qualunque dell'una o dell'altra falda è

$$(10.0.19) \quad R_1 = -\frac{dV}{ds_1} = -\frac{dV}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds_1}$$

o

$$(10.0.20) \quad R_1 = \frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{c}{D_2 D_3}$$

Se p_1 è la perpendicolare abbassata dal centro sul piano tangente in un punto qualsiasi della superficie, e se P , è il prodotto dei semiassi della superficie, allora $p_1 D_2 D_3 = P_1$, da cui si ricava

$$(10.0.21) \quad R_1 = \frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{c p_1}{P_1}$$

cioè che in un punto qualunque della superficie la forza risultante è proporzionale alla perpendicolare abbassata dal centro sul piano tangente. La densità superficiale σ si deduce dall'equazione

$$(10.0.22) \quad 4\pi\sigma = R$$

La quantità totale di elettricità distribuita sul segmento intercettato su una delle falde dell'iperboloide dal piano la cui equazione è $x = a$, è

$$(10.0.23) \quad Q = \frac{c}{2} \frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \left(\frac{a}{\lambda_1} - 1 \right)$$

La quantità distribuita sull'intera falda infinita è quindi infinita.

Le forme limite della superficie sono le seguenti:

1° Per $\alpha = F(k)$, la superficie è la parte del piano xz , che è posto dalla parte positiva del ramo positivo dell'iperbole avente per equazione

$$(10.0.24) \quad \frac{x^2}{b_1} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$$

2° Per $\alpha = 0$, la superficie si riduce al piano yz .

3° Per $\alpha = -F(\alpha)$, la superficie si riduce alla parte del piano xz che è dalla parte negativa del ramo negativo dell'iperbole precedente.

Iperboloide a una falda. Ponendo β costante, otteniamo un iperboloide a una falda. Le due superfici che limitano il campo elettrico devono quindi appartenere a due diversi iperboloidi. Per tutto il resto, lo studio è lo stesso degli iperboloidi a due falde; quando la differenza dei potenziali è assegnata, la densità in un punto qualsiasi della superficie è proporzionale alla perpendicolare abbassata dal centro sul piano tangente, e la quantità totale distribuita sulla falda infinita è infinita.

Le forme limite della superficie sono le seguenti:

1° Quando $\beta = 0$, la superficie è la parte di piano xz compresa tra i rami dell'iperbole la cui equazione è la (10-24).

2°. Quando $\beta = F(k')$ la superficie è la parte del piano xy esterna all'ellisse omofocale la cui equazione è

$$(10.0.25) \quad \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1$$

Ellissoidi. γ è costante per un ellissoide dato. Se due ellissoidi γ_1 e γ_2 sono mantenuti a potenziali V_1 e V_2 , abbiamo in un punto qualunque γ dello spazio intermedio

$$(10.0.26) \quad V = \frac{\gamma_1 V_2 - \gamma_2 V_1 + \gamma (V_1 - V_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

La densità superficiale in un punto qualunque è

$$(10.0.27) \quad \sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{c p_3}{P_3}$$

dove p_3 è la perpendicolare abbassata dal centro sul piano tangente, e P_3 il prodotto dei semiassi.

La carica elettrica totale distribuita sull'una o sull'altra delle due superfici è data da

$$(10.0.28) \quad Q_2 = c \frac{V_1 - V_2}{\gamma_1 - \gamma_2} = -Q_1$$

ed è finita.

Se $\gamma = F(k)$, la superficie dell'ellissoide è all'infinito in tutti i versi.

Se si pone $V_2 = 0$ e $\gamma_2 = F(k)$, si trova per la quantità di elettricità che carica un ellissoide mantenuto al potenziale V nel mezzo di un campo indefinito

$$(10.0.29) \quad Q = c \frac{V}{F(k) - \gamma}$$

La forma limite dell'ellissoide si presenta quando $\gamma = 0$; allora la superficie si riduce alla parte i piano xy interna all'ellisse omofocale la cui equazione è la (10-25).

La densità superficiale su ognuna delle facce del piano ellittico rappresentato dalla (10-25) e la cui eccentricità è k è

$$(10.0.30) \quad \sigma = \frac{V}{4\pi\sqrt{c^2 - b^2}} \frac{1}{F(k)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2 - b^2}}}$$

e la sua carica è

$$(10.0.31) \quad Q = c \frac{V}{F(k)}$$

Casi particolari. 151. Se c rimane finito, mentre b e, di conseguenza, k decrescono fino a divenire nulli, il sistema di superfici si trasforma nel modo seguente:

L'asse reale e uno degli assi immaginari di ognuno degli iperboloidi a due falde decrescono indefinitamente, e, al limite, la superficie si riduce a due piani che si intersecano lungo l'asse z .

La quantità α diviene identica a θ , e l'equazione dei piani meridiani ai quali si riduce il primo sistema è

$$(10.0.32) \quad \frac{x^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = 0$$

Per la quantità β , se impieghiamo la definizione data dalla (10-7) (§147), troviamo un valore infinito dell'integrale per il limite inferiore. Al fine di evitare questa difficoltà, definiremo β , in questo caso particolare, come, essendo il valore dell'integrale

$$(10.0.33) \quad \int_{\lambda_2}^c \frac{cd\lambda_2}{\sqrt{c^2 - b^2}}$$

Se ora poniamo $\lambda_2 = c \sin \phi$, β diviene

$$(10.0.34) \quad \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sin \phi} = \log \cot \frac{1}{2} \phi$$

da cui

$$\cos \phi = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{e^{\beta} + e^{-\beta}}$$

e pertanto

$$\sin \phi = \frac{2}{e^{\beta} + e^{-\beta}}$$

Se indichiamo la quantità esponenziale $\frac{1}{2}(e^{\beta} + e^{-\beta})$ con il nome di *coseno iperbolico*, o più brevemente, di *ipocoseno* di β (o $\cosh \beta$), e la quantità $\frac{1}{2}(e^{\beta} - e^{-\beta})$ con il nome di *iposeno* o $\sinh \beta$, e se impieghiamo altre funzioni dello stesso genere analoghe alle funzioni trigonometriche ordinarie, $\lambda_2 = c \sec h\beta$, e l'equazione del sistema di iperboloidi a una falda è

$$(10.0.35) \quad \frac{x^2 + y^2}{(\sec h\beta)^2} - \frac{z^2}{(\tanh \beta)^2} = c^2$$

La quantità γ si riduce a ψ , di modo che $\lambda_2 = c \csc \gamma$, e l'equazione del sistema di ellissoidi è

$$(10.0.36) \quad \frac{x^2 + y^2}{(\sec \gamma)^2} - \frac{z^2}{(\tan \gamma)^2} = c^2$$

Gli ellissoidi di questo genere, che sono figure di rivoluzione attorno ai loro assi coniugati, sono detti *ellissoidi planetari*.

La carica elettrica di un ellissoide planetario mantenuto al potenziale V nel mezzo di un campo indefinito è

$$(10.0.37) \quad Q = c \frac{V}{\frac{1}{2}\pi - \gamma}$$

dove $c \csc \gamma$ è il raggio equatoriale, e $c \tan \gamma$ il raggio polare.

Se $\gamma = 0$, la figura è un disco circolare di raggio c , e

$$(10.0.38) \quad \sigma = \frac{V}{2\pi^2 \sqrt{c^2 - r^2}}$$

$$(10.0.39) \quad Q = c \frac{V}{\frac{1}{2}\pi}$$

152. Secondo caso. - Sia $b = c$; allora $k = 1$ e $k' = 0$,

$$\alpha = \log \tan \frac{\pi + 2\theta}{4}$$

da cui

$$(10.0.40) \quad \lambda_1 = c \tanh \alpha$$

e l'equazione delle iperboloidi di rivoluzione a due falde diviene

$$(10.0.41) \quad \frac{x^2}{(\tanh \alpha)^2} - \frac{y^2 + z^2}{(\sec h\alpha)^2} = c^2$$

La quantità β si riduce a ϕ , e ognuno degli iperboloidi a una falda si riduce a una coppia di piani intersecanti lungo l'asse x , e aventi per equazione

$$(10.0.42) \quad \frac{y^2}{\sin^2 \beta} - \frac{z^2}{\cos^2 \beta} = 0$$

Questo è un sistema di piani meridiani dove β è la longitudine.

La quantità γ , definita dalla (10-7) del § 147, diverrà infinita al limite inferiore: per evitare questa difficoltà, la definiremo come se fosse il valore dell'integrale $\int_{\lambda_3}^{\infty} \frac{cd\lambda_3}{\lambda_3^2 - c^2}$.

Se quindi poniamo $\lambda_3 = c \sec \psi$, troviamo

$$\gamma = \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sin \psi}$$

dove $\lambda_3 = c \coth \gamma$ e l'equazione della famiglia degli ellissoidi è

$$(10.0.43) \quad \frac{x^2}{(c \coth \gamma)^2} + \frac{y^2 + z^2}{(\csc h\gamma)^2} = c^2$$

Questi ellissoidi, nei quali l'asse di rivoluzione è l'asse trasverso sono detti *ellissoidi ovoidali*.

La quantità di elettricità di un ellissoide ovoidale mantenuto al potenziale V in un campo indefinito è in questo caso, dalla (10-29),

$$(10.0.44) \quad \frac{cV}{\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sin \psi}}$$

dove $c \sec \psi_0$ è il raggio polare.

Se indichiamo con A il raggio polare, con B il raggio equatoriale, il risultato precedente diviene

$$(10.0.45) \quad V \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{\log \frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{B}}$$

Se il raggio equatoriale è molto piccolo, rispetto al raggio polare, come in un filo con estremi arrotondati

$$(10.0.46) \quad Q = \frac{AV}{\log 2A - \log B}$$

Se b e c si annullano, rimanendo il loro rapporto finito, il sistema di superfici si riduce a due sistemi di coni cofocali, e un sistema di sfere il cui raggio è inversamente proporzionale a γ .

Se il rapporto tra b e c è zero o uno, il sistema di superfici si riporta a un sistema di piani meridiani, un sistema di coni retto aventi l'asse in comune, e un sistema di superfici sferiche concentriche, il cui raggio è inversamente proporzionale a γ . Questo è il sistema ordinario di coordinate polari sferiche.

Superfici cilindriche. 153. Quando c è infinito, le superfici sono cilindri le cui generatrici sono parallele all'asse z .

Uno dei sistemi di cilindri è iperbolico: è quello al quale si riducono le iperboloidi a due falde. Siccome per $c = \infty$, $k = 0$ e di conseguenza $\theta = \alpha$, l'equazione di questo sistema deve essere

$$(10.0.47) \quad \frac{x^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = b^2$$

L'altro sistema è ellittico, e, poiché per $k = 0$, β si riduce a

$$\int_b^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 - b^2}} \quad \text{o} \quad \lambda_2 = b \cosh \beta$$

l'equazione del sistema è

$$(10.0.48) \quad \frac{x^2}{(\cosh \beta)^2} + \frac{y^2}{(\sinh \beta)^2} = b^2$$

Paraboloidi cofocali. 154. Se, nell'equazione generale, si trasporta l'origine delle coordinate date in un punto qualunque dell'asse x , a una distanza t dal centro, e se a x, λ, b, c si sostituisce $t + x, t + \lambda, t + b, t + c$, poi si fa crescere t indefinitamente, si ottiene, al limite, l'equazione di un sistema di paraboloidi i cui fuochi sono i punti $x = b, x = c$, e la cui equazione è

$$(10.0.49) \quad 4(x - \lambda) + \frac{y^2}{\lambda - b} + \frac{z^2}{\lambda - c} = 0$$

Se si chiama il primo parametro λ per il primo sistema di paraboloidi ellittici, μ per i paraboloidi iperbolici, e ν per il secondo sistema di paraboloidi ellittici, si avrà, nell'ordine delle grandezze crescenti: λ, b, μ, c, ν e

$$(10.0.50) \quad \left. \begin{aligned} x &= \lambda + \mu + \nu - c - b \\ y^2 &= 4 \frac{(b-\lambda)(\mu-b)(\nu-b)}{c-b} \\ z^2 &= 4 \frac{(c-\lambda)(c-\mu)(\nu-c)}{c-b} \end{aligned} \right\}$$

Per evitare i valori infiniti degli integrali (10-7), si prendono entro altri limiti gli integrali corrispondenti del sistema di paraboloidi.

Si pone in questo caso

$$\alpha = \int_{\lambda}^b \frac{d\lambda}{\sqrt{(b-\lambda)(c-\lambda)}}$$

$$\beta = \int_b^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu-b)(c-\mu)}}$$

$$\nu = \int_c^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu-b)(\nu-c)}}$$

Da queste troviamo

$$(10.0.51) \quad \left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}(c+b) - \frac{1}{2}(c-b) \cosh \alpha \\ \mu &= \frac{1}{2}(c+b) - \frac{1}{2}(c-b) \cos \beta \\ \gamma &= \frac{1}{2}(c+b) + \frac{1}{2}(c-b) \cosh \gamma \end{aligned} \right\}$$

$$(10.0.52) \quad \left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(c+b) - \frac{1}{2}(c-b) (\cosh \gamma - \cos \beta - \cosh \alpha) \\ y &= 2(c-b) \sinh \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cosh \frac{\gamma}{2} \\ z &= 2(c-b) \cosh \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sinh \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\}$$

Se $b = c$, si ha il caso dei paraboloidi di rivoluzione attorno all'asse x , e

$$(10.0.53) \quad \left. \begin{aligned} x &= a(e^{2\alpha} - e^{2\gamma}) \\ y^2 &= 2ae^{\alpha+\gamma} \cos \beta \\ z^2 &= 2ae^{\alpha+\gamma} \sin \beta \end{aligned} \right\}$$

Le superfici per le quali β è costante sono piani passanti per l'asse e formanti un angolo β con un piano fisso passante per l'asse.

Le superfici per le quali α è costante sono paraboloidi cofocali. Se $\alpha = -\infty$, il paraboloido si riduce a una retta che si ferma nell'origine.

Possiamo così trovare i valori α, β, γ in funzione di r, θ, ϕ , coordinate polari sferiche riferite al fuoco come origine, e all'asse delle parabole come asse della sfera

$$(10.0.54) \quad \begin{aligned} \alpha &= \log \left(r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\theta \right) \\ \beta &= \phi \\ \gamma &= \log \left(r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2}\theta \right) \end{aligned}$$

Possiamo confrontare il caso in cui il potenziale è uguale a α con l'armonica zonale $r_i Q_i$. Entrambi soddisfano all'equazione di Laplace e sono funzioni omogenee di x, y, z ; ma, nel caso che si deducono paraboloidi, vi è una discontinuità sull'asse, e non esiste differenza finita tra zero e il valore di i .

La densità superficiale su un paraboloido elettrizzato posto nel mezzo di un campo indefinito (ivi compreso il caso di una retta che si estende all'infinito in una direzione) è inversamente proporzionale alla radice quadrata della distanza dal fuoco o, nel caso della retta, dalla distanza dall'estremità della linea.

Teoria delle immagini elettriche e dell'inversione elettrica

155. Abbiamo già mostrato che, quando una sfera conduttrice è sottoposto all'azione delle cariche elettriche distribuite in un modo determinato, la distribuzione dell'elettricità sulla superficie di questa sfera si può determinare con il metodo delle armoniche sferiche.

A tale scopo, si sviluppa il potenziale del sistema agente in una serie di armoniche solide di grado positivo avente per origine il centro della sfera, e si trova allora una serie corrispondente di armoniche solide di grado negativo, che rappresenta il potenziale dovuto all'elettrizzazione della sfera.

Per mezzo di questo potente metodo di analisi, Poisson riuscì a determinare l'elettrizzazione di una sfera soggetta all'azione di un sistema elettrica dato e risolse anche il problema più difficile della distribuzione su due sfere conduttrici in presenza l'una dell'altra. Questi studi sono stati proseguiti da Plana e da altri, che hanno confermato l'esattezza dei risultati di Poisson.

Se si applica questo metodo al caso più elementare, quello di una sfera sottoposta all'azione di un punto elettrizzato unico, bisogna sviluppare il potenziale dovuto alla carica di questo punto in una serie di armoniche solide, poi determinare una seconda serie di armoniche solide che rappresentano il potenziale esterno dovuto alla elettrizzazione della sfera.

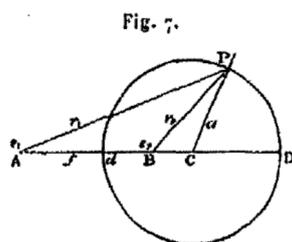
Non sembra che alcuno dei matematici sopra nominati abbia osservato che questa seconda serie rappresenta il potenziale dovuto a un punto elettrizzato immaginario: questo punto non esiste fisicamente, e in quanto punto elettrizzato, ma può essere chiamata un'immagine elettrica, poiché l'azione della superficie sui punti esterni è la stessa che produrrebbe il punto elettrizzato immaginario se si togliesse la superficie sferica.

Questa scoperta sembra essere stata riservata a Sir William Thomson che ne ha prodotto un metodo di grande potenza per la soluzione dei problemi elettrici, suscettibili di essere presentata sotto una forma geometrica elementare.

Nei lavori originali, pubblicati nel *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* del 1848, egli impiega le espressioni della teoria ordinaria dell'attrazione a distanza, e non si serve del metodo dei potenziali né dei teoremi generali del Cap. IV, che tuttavia hanno probabilmente portato a queste scoperte. Invece di seguire il percorso dell'autore, farò correntemente uso della nozione di potenziale e delle superfici equipotenziali, tutte le volte che l'esposizione potrà essere resa più chiara con questo procedimento.

Teoria delle immagini elettriche. 156. Siano A e B (fig. 7) due punti in un mezzo dielettrico uniforme che si estende all'infinito: siano e_1 e e_2 le rispettive cariche di A e di B ; sia P un punto dello spazio le cui distanze da A e B sono r_1 e r_2 . Il valore del potenziale in P sarà

$$(11.0.1) \quad V = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}$$



Le superfici equipotenziali dovute a questa distribuzione elettrica sono rappresentate nella Tavola I quando le cariche e_1 e e_2 hanno lo stesso segno, e dalla Tavola II quando hanno segni contrari. Consideriamo ora la superficie per la quale $V = 0$, che è la sola superficie sferica del sistema. Se le cariche e_1 e e_2 hanno lo stesso segno, questa superficie è tutta intera all'infinito; se hanno segni contrari, vi è, a una distanza finita, un piano o una superficie sferica dove il potenziale è nullo.

L'equazione di questa superficie è

$$(11.0.2) \quad \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} = 0$$

e il suo centro è in punto C posto sul prolungamento di AB , e tale che

$$AC : BC = e_1^2 : e_2^2$$

il raggio della sfera è

$$AB \frac{e_1 e_2}{e_1^2 - e_2^2}$$

I due punti A e B sono due punti reciproci rispetto a questa sfera, cioè sono posti sullo stesso raggio e che il raggio è un medio proporzionale tra le loro distanze dal centro della sfera.

Poiché questa superficie sferica è a potenziale zero, nulla cambierà nel potenziale di alcun altro punto interno o esterno, se supponiamo questa sfera formata da uno strato sottile di metallo e messa a terra; le azioni elettriche resteranno dappertutto quelle che sono dovute ai due punti elettrizzato A e B .

Se ora, lasciando l'involuppo metallico collegato a terra, togliamo il punto B , il potenziale diverrà zero per tutti i punti interni alla sfera, ma resterà lo stesso per tutti i punti esterni. Infatti la superficie della sfera resta allo stesso potenziale di prima, e nessun cambiamento è stato apportato nelle cariche elettriche esterne a questa sfera.

Pertanto, se un punto elettrizzato A è posto all'esterno di una sfera conduttrice mantenuta a potenziale zero, l'azione elettrica su tutti i punti esterni alla sfera è lo stesso di quello che sarebbe dovuto al punto A e a un altro punto B interno alla sfera, che si può chiamare l'immagine elettrica del punto A .

157. Definizione di un'immagine elettrica. - Un'immagine elettrica è un punto o un sistema di punti elettrizzati, posti da un lato di una superficie, e producenti dall'altro lato un'azione elettrica identica a quella che è dovuta alla carica effettiva di questa superficie.

In Ottica, si chiama immagine *virtuale* un punto o un sistema di punti posti da un lato di uno specchio o di una lente, che, se esistessero realmente, emetterebbero lo stesso sistema di raggi che esistono effettivamente dall'altro lato dello specchio o della lente.

Le immagini elettriche corrispondono alle immagini virtuali dell'Ottica, in ciò che esse si rapportano allo spazio situato al di là della superficie. Ma esse non gli corrispondono in posizione, neppure nel ruolo semplicemente approssimativo dei fuochi ottici.

Non vi è un punto di immagini elettriche *reali*, cioè punti elettrizzati immaginari che produrrebbero, nella regione posta dalla parte della superficie elettrizzata dove si trovano, un effetto equivalente a quello di questa superficie elettrizzata.

Se, in una certa regione dello spazio, il potenziale è lo stesso di quello che sarebbe dovuto a una certa carica elettrica posta in questa regione, può essere dovuto solo questa carica realmente esistente. Infatti, la carica in un punto si può dedurre dal potenziale nelle vicinanze di questo punto, per mezzo dell'equazione di Poisson.

Siano a il raggio della sfera; f la distanza del punto elettrizzato A dal centro C ; e la carica di questo punto.

Allora l'immagine del punto è posta in B , sullo stesso raggio della sfera, e a una distanza $\frac{a^2}{f}$; la carica dell'immagine è $-e \frac{a}{f}$.

Abbiamo mostrato che questa immagine produce, dall'altro lato della superficie, lo stesso effetto della carica effettiva della superficie. Determineremo ora la densità superficiale di questa carica, in un punto qualunque P della superficie sferica: per questo scopo, useremo il teorema

di Coulomb (§ 80), che se R è la forza risultante e σ la densità superficiale alla superficie di un conduttore,

$$R = 4\pi\sigma$$

essendo R misurata allontanandosi dalla superficie.

Possiamo considerare R come la risultante di due forze, una repulsiva $\frac{e}{AP^2}$ agente lungo AP , e una attrattiva $e\frac{a}{f}\frac{1}{PB^2}$ lungo PB .

Scomponendo queste forze nelle direzioni di AC e di CP , troviamo:

Per le componenti della repulsiva

$$\frac{ef}{AP^3} \text{ lungo } AC \quad -\frac{ea}{AP^3} \text{ lungo } CP$$

Quelle dell'attrattiva

$$-e\frac{e}{f}\frac{1}{BP^3}BC \text{ lungo } AC \quad -\frac{ea^2}{f}\frac{1}{BP^3} \text{ lungo } CP$$

Ora $BP = \frac{a}{f}AP$ e $BC = \frac{a^2}{f}$, di modo che le componenti della attrattiva si possono scrivere

$$-\frac{ef}{AP^3} \text{ lungo } AC \quad -e\frac{f^2}{a}\frac{1}{AP^3} \text{ lungo } CP$$

Le componenti dell'attrattiva e della repulsiva lungo AC sono uguali e opposte: la forza risultante è quindi interamente diretto lungo il raggio CP . Questo risultato non fa che confermare quanto già stabilito, cioè che la sfera è una superficie equipotenziale, cioè una superficie alla quale la forza risultante è sempre perpendicolare.

La forza risultante misurata lungo la normale CP alla superficie, e contata verso il lato della superficie in cui si trova il punto A , è

$$(11.0.3) \quad R = -e\frac{f^2 - a^2}{a}\frac{1}{AP^3}$$

Se A è preso all'interno della sfera, f è minore di a , e bisogna contare R verso l'interno. Si ha quindi, in questo caso,

$$(11.0.4) \quad R = -e\frac{a^2 - f^2}{a}\frac{1}{AP^3}$$

In tutti i casi possiamo scrivere

$$(11.0.5) \quad R = -e\frac{AD \cdot Ad}{CP}\frac{1}{AP^3}$$

dove AD e Ad sono i segmenti intercettati dalla sfera su una linea qualunque passante per A , segmenti il cui prodotto deve sempre essere contato positivamente.

158. Da ciò risulta, per il teorema di Coulomb (§ 80) che la densità superficiale σ nel punto P è

$$(11.0.6) \quad \sigma = -e\frac{AD \cdot Ad}{4\pi \cdot CP}\frac{1}{AP^3}$$

La densità elettrica in un punto qualsiasi della sfera è in ragione inversa del cubo della sua distanza dal punto A .

L'effetto combinato da questa distribuzione superficiale e dal punto A è di produrre: dalla parte della superficie dove è posto il punto A , un potenziale equivalente a quello che è dovuto alla carica e posta in A e alla sua immagine $-\frac{ea}{f}$ in B ; dall'altro lato della superficie, il potenziale è nullo in tutti i punti. Pertanto l'effetto di questa distribuzione superficiale presa in se stessa è quello di produrre: dalla parte di A , un potenziale equivalente a quello dovuto all'immagine $-\frac{ea}{f}$ posta in B ; e dal lato opposto, un potenziale uguale e di segno contrario a quello che è dovuto alla carica e posta in A .

La carica totale distribuita sulla superficie della sfera è evidentemente $-\frac{ea}{f}$, poiché è equivalente alla carica dell'immagine B .

Giungiamo così ai teoremi seguenti relativi all'azione di una carica elettrica distribuita su una superficie sferica, di modo che la densità superficiale sia in ragione inversa del cubo della distanza da un punto A esterno o interno alla sfera.

Supponiamo la densità data dall'equazione

$$(11.0.7) \quad \sigma = \frac{C}{AP^3}$$

dove C è una quantità costante, allora dalla (11-6)

$$(11.0.8) \quad C = -e \frac{AD \cdot Ad}{4\pi a}$$

L'azione di questa distribuzione superficiale su un punto separato da A dalla superficie è uguale a quella di una carica elettrica $-e$, o

$$\frac{4\pi a C}{AD \cdot Ad}$$

concentrata in A .

La sua azione in un punto qualunque posto dalla stessa parte della superficie di A è uguale a quella di una quantità di elettricità

$$\frac{4\pi C a^2}{f \cdot AD \cdot Ad}$$

concentrata in un punto B , immagine di A .

La quantità totale di elettricità distribuita sulla sfera è uguale alla prima di queste quantità se A è interno, alla seconda se A è esterno alla sfera.

Queste proposizioni sono state stabilite da Sir William Thomson, nelle sue prime ricerche geometriche relative alla distribuzione dell'elettricità nei conduttori sferici: il lettore dovrà riferirvisi.

159. Se un sistema, per il quale la distribuzione elettrica è nota, è posto nelle vicinanze di una sfera conduttrice di raggio a , che si mantiene a potenziale zero mettendola a terra, le cariche dovute alle diverse parti del sistema si sovrappongono.

Siano A_1, A_2, \dots i punti elettrizzati del sistema, f_1, f_2, \dots le loro distanze dal centro della sfera, e_1, e_2, \dots le loro cariche. Le immagini B_1, B_2, \dots di questi punti saranno posti sullo stesso raggio dei punti stessi, e a distanze $\frac{a_1}{f_1}, \frac{a_2}{f_2}, \dots$ dal centro della sfera: le loro cariche saranno

$$-e_1 \frac{a}{f_1}, -e_2 \frac{a}{f_2}, \dots$$

All'esterno della sfera, il potenziale dovuto alla distribuzione superficiale sarà lo stesso di quello che sarebbe prodotto dal sistema delle immagini B_1, B_2, \dots . Questo sistema è detto, di conseguenza, l'immagine elettrica del sistema A_1, A_2, \dots .

Se, invece di essere a potenziale zero, la sfera al potenziale V , bisogna ancora sovrapporre uno strato esteso sulla sua superficie esterna con la densità superficiale uniforme

$$\sigma = \frac{V}{4\pi a}$$

L'effetto di questo strato su tutti i punti esterni alla sfera sarà uguale a quello di una quantità di elettricità Va posta al centro; in tutti i punti interni, il potenziale sarà semplicemente aumentato di V .

La carica totale della sfera dovuta al sistema di punti agenti esterni A_1, A_2, \dots , è

$$(11.0.9) \quad E = Va - e_1 \frac{a}{f_1} - e_2 \frac{a}{f_2} - \dots$$

da cui si può ricavare sia la carica E , sia il potenziale V , in base a quale dei due è assegnato.

Se il sistema elettrizzato è interno alla superficie sferica, la carica indotta sulla superficie è uguale e di segno contrario alla carica induttrice, così come abbiamo dimostrato per ogni superficie chiusa soggetta all'azione di punti interni.

160.¹ Un punto elettrizzato e posto a una distanza f dal centro più grande del raggio a della sfera, e la carica della superficie sferica dovuta sia all'azione del punto elettrizzato sia alla carica propria della sfera, esercitano l'una sull'altra un'azione reciproca nella quale l'energia è

$$(11.0.10) \quad M = \frac{Ee}{f} - \frac{1}{1} \frac{e^2 a^2}{f^2 (f^2 - a^2)}$$

dove V è il potenziale ed E la carica della sfera.

La repulsione tra il punto elettrizzato e la sfera è quindi, dal § 92,

$$(11.0.11) \quad F = ea \left(\frac{V}{f^2} - \frac{ef}{(f^2 - a^2)} \right) = \frac{e}{f^2} \left(E - e \frac{a^3 (2f^2 - a^2)}{f (f^2 - a^2)^2} \right)$$

Di conseguenza la forza che si esercita tra il punto e la sfera è sempre una attrazione nei casi seguenti:

- 1° Quando la sfera non è isolata;
- 2° Quando essa non ha carica;
- 3° Quando il punto elettrizzato è molto vicino alla superficie.

Affinché la forza sia repulsiva, serve che il potenziale della sfera sia positivo e maggiore di $\frac{f^2}{(f^2 - a^2)^2}$ e che la sfera abbia una carica dello stesso segno di e e maggiore di $e \frac{a^3 (2f^2 - a^2)}{f (f^2 - a^2)^2}$.

Nel punto di equilibrio, l'equilibrio è instabile, divenendo la forza attrattiva se i corpi sono vicini, repulsiva se sono più lontani.

Se il punto elettrizzato è interno alla superficie sferica, la forza che agisce su di esso tende sempre ad allontanarsi dal centro della sfera e vale

$$\frac{e^2 a f}{(a^2 - f^2)^2}$$

La densità superficiale nel punto della sfera più vicino al punto elettrizzato, quando questo punto è esterno alla sfera, è

$$(11.0.12) \quad \sigma_1 = \frac{1}{4\pi a^2} \left\{ Va - e \frac{a(f+a)}{(f-a)^2} \right\} = \frac{1}{4\pi a^2} \left\{ E - e \frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2} \right\}$$

La densità superficiale nel punto della sfera più lontano dal punto elettrificato è

$$(11.0.13) \quad \sigma_2 = \frac{1}{4\pi a^2} \left\{ Va - e \frac{a(f-a)}{(f+a)^2} \right\} = \frac{1}{4\pi a^2} \left\{ E + e \frac{a^2(3f+a)}{f(f+a)^2} \right\}$$

¹Questa discussione sarà facile più facile da comprendere, se si considera il problema come un esempio a sostegno del § 86. Supponiamo che ciò che si chiama *punto elettrizzato* sia in realtà un piccolo conduttore sferico, di raggio b e potenziale v . Si ha così un caso particolare del problema delle due sfere, la cui soluzione è già stata data al § 146 e un'altra lo sarà al 173. Nel caso in questione, il raggio b è così piccolo che si può considerare la carica del piccolo conduttore come distribuita uniformemente sulla sua superficie, e si possono trascurare le immagini elettriche del piccolo conduttore, tranne la prima.

Si ha così

$$V = \frac{E}{a} + \frac{c}{f}$$

$$v = \frac{E + e \frac{a}{f}}{f} - \frac{ea}{f^2 - a^2} + \frac{e}{b}$$

L'energia del sistema è pertanto, § 85,

$$\frac{E^2}{2a} + \frac{Ee}{f} + \frac{e^2}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{a^2}{f^2 (f^2 - a^2)} \right)$$

Per mezzo della equazione precedente possiamo pure esprimere l'energia in termini del potenziale: con lo stesso ordine di approssimazione

$$\frac{aV^2}{2} - \frac{ab}{f} Ve + \frac{1}{2} \left(b + \frac{ab^2}{f^2 - a^2} \right) v^2$$

Quando E , la carica della sfera, è compresa tra

$$e \frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2} \quad -e \frac{a^2(3f+a)}{f(f+a)^2}$$

l'elettrificazione sarà negativa vicino al punto elettrizzato, e positiva sul lato opposta. Vi è una linea circolare che separa le parti della superficie elettrizzata positivamente e negativamente, e questa linea è di equilibrio.

Se

$$(11.0.14) \quad E = ea \left(\frac{1}{\sqrt{f^2 - a^2}} - \frac{1}{f} \right)$$

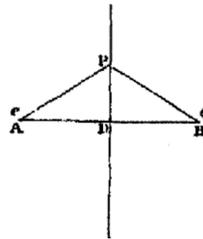
la superficie equipotenziale che taglia la sfera lungo la linea di equilibrio è una sfera il cui centro è nel punto elettrizzato, e il cui raggio è uguale a $\sqrt{f^2 - a^2}$.

Le linee di forza e le superfici equipotenziali corrispondenti a questo caso sono date nella tavola IV.

Immagini in una superficie piana conduttrice indefinita. 161. Se i due punti elettrizzati A e B del § 156 hanno cariche elettriche uguali e di segno contrario, la superficie di potenziale zero sarà un piano i cui punto sono ugualmente distanti da A e B .

Se quindi A è un punto elettrizzato la cui carica è e , e AD una perpendicolare al piano; e se sul prolungamento di AD si prende un punto B tale che $AD = DB$ e si pone in B una carica $-e$, questa carica posta in B sarà l'immagine di A ; essa produrrà, su tutti i punti posti dalla stessa parte di A rispetto al piano, un effetto identico a quello della carica reale di questo piano. Infatti, dalla parte di A , il potenziale dovuto a A e B soddisfa alle condizioni che $\nabla^2 V = 0$ in tutti i punti tranne A , e che $V = 0$ nel piano. Vi è una sola forma che possa soddisfare a queste condizioni.

Fig. 8.



Per determinare la forza risultante in un punto P del piano, osserviamo che essa è la risultante di due forze uguali ciascuna a $\frac{e}{AP^2}$, agenti l'una lungo AP e l'altra lungo PB . Pertanto, la risultante di queste forze è diretta parallelamente a AB ed è uguale a

$$\frac{e}{AP^2} \cdot \frac{AB}{AP}$$

Pertanto R , la forza risultante misurata dalla superficie verso lo spazio in cui si trova A , è

$$(11.0.15) \quad R = -\frac{2eAD}{AP^3}$$

e la densità nel punto P è

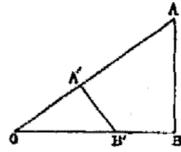
$$\sigma = -\frac{eAD}{2\pi AP^3}$$

Inversione elettrica. 162. Il metodo delle immagini elettriche porta direttamente a un metodo di trasformazione per mezzo del quale si può dedurre da un problema la cui la soluzione è nota la soluzione di un numero qualunque di altri problemi.

Abbiamo visto che un punto posto a una distanza r dal centro di una sfera di R ha per immagine un altro punto posto sullo stesso raggio a una distanza r' , tale che $rr' = R^2$. Pertanto l'immagine di un sistema di punti, di linee o di superfici si deduce dal sistema iniziale con il

metodo noto in Geometria sotto il nome di *metodo di inversione*, il quale è stato descritto da Chasles, Salmon e altri matematici.

Fig. 9.



Se A e B sono due punti, A' e B' le loro immagini, rispetto al centro O di una sfera di inversione di raggio R ,

$$OA \cdot OA' = R^2 = OB \cdot OB'$$

Pertanto i triangoli $OAB, OA'B'$ sono simili, e

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} = \frac{OA \cdot OB}{R^2}$$

Se la quantità di elettricità e è posta in A , il suo potenziale su B sarà

$$V = \frac{e}{AB}$$

Se e' è posta in A' , il suo potenziale in B' sarà

$$V' = \frac{e'}{A'B'}$$

Nella teoria delle immagini elettriche

$$\frac{e}{e'} = \frac{OA}{R} = \frac{R}{OA'}$$

da cui si ricava

$$(11.0.16) \quad \frac{V}{V'} = \frac{R}{OB}$$

cioè che il potenziale su B della carica elettrica di A sta al potenziale sull'immagine di B dell'immagine elettrica di A come R sta a OB .

Poiché questo rapporto dipende solo da OB e non da OA , il potenziale su B dovuto a un sistema qualsiasi di corpi elettrizzati sta al potenziale su B' dovuto all'immagine di questo sistema nel rapporto tra R e OB .

Se r è la distanza dal centro di un punto qualunque A e r' quella della sua immagine A' ; se e è la carica di A e e' quella di A' ; se L, S, K sono elementi di lunghezza, di superficie e di volume in A , L', S', K' le loro immagini in A' ; se $\lambda, \sigma, \rho, \lambda', \sigma', \rho'$ sono le densità lineari, superficiali e di volume corrispondenti a questi due punti; se V è il potenziale in A dovuto al sistema iniziale, e V' il potenziale in A' dovuto al sistema inverso, si ha²

$$(11.0.17) \quad \left. \begin{aligned} \frac{r'}{r} = \frac{L'}{L} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{r'^2}{R^2} \quad \frac{S'}{S} = \frac{R^4}{r^4} = \frac{r'^4}{R^4} \quad \frac{K'}{K} = \frac{R^6}{r^6} = \frac{r'^6}{R^6} \\ \frac{e'}{e} = \frac{R}{r} = \frac{r'}{R} \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{r}{R} = \frac{R}{r'} \\ \frac{\sigma'^e}{\sigma} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{R^3}{r'^3} \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{r^5}{R^5} = \frac{R^5}{r'^5} \end{aligned} \right\} \quad \frac{V'}{V} = \frac{r}{R} = \frac{R}{r'}$$

Se, nel sistema iniziale, una certa superficie è quella di un conduttore, e ha, di conseguenza, un potenziale costante P , la sua immagine nel sistema trasformato avrà un potenziale $P \frac{R}{r'}$. Ma, ponendo nel centro di inversione O una quantità di elettricità uguale a $-PR$, il potenziale della superficie trasformata è ridotto a zero.

Se quindi si conosce la distribuzione elettrica su un conduttore isolato nello spazio indefinito, e carico al potenziale P , si può trovare per inversione la distribuzione su un conduttore la cui

²Si veda Thomson e Tait, *Natural Philosophy*, § 515.

forma è l'immagine del primo, quando questo conduttore messa a terra è soggetto all'azione di una carica $-PR$ posta nel centro di inversione.

163. Ecco alcuni teoremi di Geometria molto utili quando si studiano i casi di inversione.

Ogni sfera si trasforma per inversione in un'altra sfera, a meno che essa non passi per il centro di inversione, nel qual caso si trasforma in un piano.

Se a e a' sono le distanze dal centro di inversione dei centri di due sfere i cui raggi sono α e α' , e se si chiama potenza di una sfera rispetto a un centro di inversione il prodotto dei segmenti intercettati dalla sfera su una linea passante per il centro di inversione, la potenza della prima sfera è $a^2 - \alpha^2$ e quella della seconda è $a'^2 - \alpha'^2$. Abbiamo in questo caso

$$(11.0.18) \quad \frac{a'}{a} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{R^2}{a^2 - \alpha^2} = \frac{a'^2 - \alpha'^2}{R^2}$$

cioè il rapporto tra le distanze dei centri della prima e seconda sfera è uguale al rapporto tra i loro raggi, e al rapporto tra la potenza della sfera di inversione e la potenza della prima sfera, o al rapporto tra la potenza della seconda sfera e la potenza della sfera di inversione.

Nel caso in cui le superfici inverse sono un piano e una sfera, la perpendicolare abbassata dal centro di inversione sul piano sta al raggio di inversione come questo raggio sta al diametro della sfera; la sfera ha il suo centro su questa perpendicolare, e passa per il centro di inversione.

Una circonferenza si trasforma in un'altra circonferenza, a meno che essa non passi per il centro di inversione; essa diviene allora una linea retta.

L'angolo tra due linee o due superfici nel loro punto di intersezione non è alterato dall'inversione.

Ogni cerchio che passa per un punto e per l'immagine di tale punto presa rispetto a una sfera è ortogonale a questa sfera.

Pertanto, ogni cerchio che passa per un punto ed è ortogonale alla sfera passa per l'immagine del punto.

164. Si può, applicando il metodo di inversione, dedurre dalla distribuzione uniforme sulla superficie di una sfera isolata che non è soggetta ad alcuna azione, la distribuzione sulla superficie di una sfera non isolata soggetta all'azione di un punto elettrizzato.

Se il punto elettrizzato è posto in A , lo si prende come centro di inversione; e, se è posto a una distanza f dalla sfera di raggio a , la figura inversa sarà una sfera di raggio a' , il cui centro è a una distanza f' , con le relazioni

$$(11.0.19) \quad \frac{a'}{a} = \frac{f'}{f} = \frac{R}{f^2 - a^2}$$

Il centro di ognuna di queste sfere corrisponde al punto inverso dell'altra rispetto ad A , cioè che se C è il centro e B il punto inverso della prima sfera, C' sarà il punto inverso e B' il centro della seconda sfera.

Sia ora e' una carica elettrica data alla seconda sfera, e non sottoposta a forze esterne. Essa si distribuirà uniformemente sulla sfera, con una densità superficiale

$$(11.0.20) \quad \sigma' = \frac{e'}{4\pi a'^2}$$

La sua azione su ogni punto esterno alla sfera sarà identica a quella di una carica e' posta nel centro B' della sfera.

Sulla superficie sferica e all'interno, il potenziale è una quantità costante

$$(11.0.21) \quad P' = \frac{e'}{a'}$$

Trasformiamo il sistema: il centro B' diviene allora il punto inverso B , e la carica e' di B' diviene $e' \frac{R}{f}$ in BM e in ogni punto separato da B dalla superficie, il potenziale è quello che dovuto a questa carica posta in B .

Il potenziale in un punto qualsiasi P posto sulla superficie o dalla stessa parte di B rispetto a questa superficie, è nel sistema trasformato

$$\frac{e'}{a'} \frac{R}{AP}$$

Se ora si sovrappone a questo sistema una carica e posta in A , essendo e uguale a

$$(11.0.22) \quad e = -\frac{e'}{a'} R$$

il potenziale si riduce a zero sulla superficie stessa e su tutti i punti posto dalla stessa parte di B . Per tutti i punti posti dalla stessa parte di A , il potenziale è lo stesso di quello che sarebbe dovuto a una carica e in A e a una carica $e' \frac{R}{f'}$ posta in B .

Ma

$$(11.0.23) \quad e' \frac{R}{f'} = -e \frac{a'}{f'} = -e \frac{a}{f'}$$

così come abbiamo trovato prima, a proposito della carica dell'immagine B .

Per trovare la densità in un punto qualunque della prima sfera, abbiamo

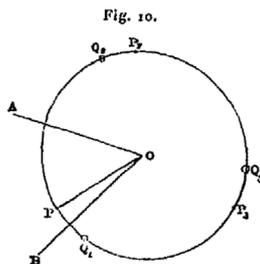
$$(11.0.24) \quad \sigma = \sigma' \frac{R^3}{AP^3}$$

e, sostituendo a σ' la sua espressione in funzione di quantità appartenenti alla prima sfera, troviamo lo stesso calore del § 158

$$(11.0.25) \quad \sigma = -\frac{e(f^2 - a^2)}{4\pi a AP^3}$$

Sistemi finiti di immagini successive. 165. Se due conduttori si intersecano sotto un angolo che sia un sottomultiplo di un angolo piatto, vi è un sistema di immagini in numero finito che determina completamente la distribuzione.

Sia, infatti, AOB una sezione dei piani conduttori normale alla loro intersezione, e siano $AOB = \frac{\pi}{n}$ l'angolo di intersezione, P il punto elettrizzato, $PO = r$ e $POB = \theta$. Tracciamo un cerchio di centro O e di raggio OP , e cerchiamo i punti che sono le immagini successive di P nei due piani, iniziando da OB .



Troviamo così Q_1 per l'immagine di P su OB , P_2 per l'immagine di Q_1 su OA , Q_3 per quella di P_2 su OB , P_3 per quella di Q_3 su OA e Q_2 per quella di P_3 su OB .

Se avessimo iniziato dall'immagine di P su AO e se AOB soddisfacesse alla condizione di essere un sottomultiplo di due angoli retti, avremmo trovato gli stessi punti nell'ordine inverso Q_2, P_3, Q_3, P_2, Q_1 .

Infatti, le immagini di due in due P_1, P_2, P_3, \dots sono sul cerchio, a distanze angolari uguali a $2AOB$ e le immagini intermedie Q_1, Q_2, Q_3 sono a intervalli della stessa grandezza. Pertanto, se $2AOB$ è un sottomultiplo di 2π , vi sarà un numero finito di immagini, nessuna delle quali cadrà all'interno dell'angolo AOB ; ma, se AOB non è un sottomultiplo di π , sarà impossibile rappresentare la distribuzione esistente per mezzo di un numero finito di punti elettrizzati.

Se $AOB = \frac{\pi}{n}$, vi saranno n immagini negative Q_1, Q_2, \dots , tutte uguali e di segno contrario a P , e $n - 1$ immagini positive, tutte uguali e dello stesso segno.

L'angolo compreso tra due immagini successive dello stesso segno è $\frac{2\pi}{n}$. Se consideriamo l'uno o l'altro dei piani conduttori come piano di simmetria, vediamo che le immagini positive e negative sono poste simmetricamente, rispetto a questo piano, di modo che ogni immagine positiva corrisponde a una immagine negativa posta sulla stessa normale, a una distanza uguale, dall'altra parte del piano.

Se, ora, trasformiamo questo sistema rispetto a un punto qualunque, i due piani divengono due sfere, o una sfera e un piano si tagliano sotto l'angolo $\frac{\pi}{n}$, essendo il punto agente P compreso in questo angolo.

Le immagini successive sono poste sul cerchio che passa per P e che taglia ortogonalmente le due sfere.

Per trovare la posizione delle immagini, possiamo usare il principio che un punto e la sua immagine sono sullo stesso raggio della sfera: siamo portati a tracciare delle corde successive in questo cerchio, partendo da P e passando per il centro di ognuna delle due sfere alternativamente.

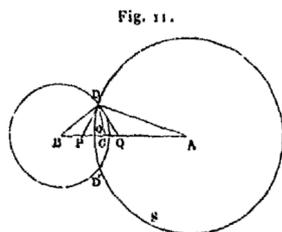
Per trovare la carica che conviene attribuire a ogni immagine, prendiamo un punto qualunque del cerchio di intersezione: la carica di ogni immagine è proporzionale alla sua distanza da questo punto e il suo segno è positivo o negativa, secondo che essa appartiene al primo o al secondo sistema.

166. Abbiamo così trovato la distribuzione delle immagini, quando si sottopone all'azione di un punto elettrizzato un conduttore formato da due sfere intersecantesi sotto un angolo $\frac{\pi}{n}$ e mantenuto al potenziale zero.

Da ciò possiamo dedurre, per inversione, il caso di un conduttore formato da due segmenti di sfera tagliantesi sotto un angolo rientrante uguale a $\frac{\pi}{n}$, caricato al potenziale unitario e posto nello spazio indefinito.

A tale scopo, trasformiamo il sistema rispetto a P ; il cerchio sul quale sarebbero le immagini diviene una linea retta passante per il centro delle sfere.

La fig. 11 rappresenta una sezione passante per la linea dei centri AB . Siano D e D' i punti in cui il cerchio di intersezione taglia il piano del foglio. Per trovare le immagini successive, tracciamo un raggio DA del primo cerchio, poi dei raggi DC, DB, \dots , formanti con DA angoli $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots$. I punti C, B, \dots , dove questi raggi tagliano la linea dei centri, sono le posizioni delle immagini positive; la carica di ognuno di essi è rappresentata dalla sua distanza da D . L'ultima di queste immagini è al centro del secondo cerchio.



Per trovare le immagini negative, tracciamo DP, DQ, \dots , formanti con la linea dei centro gli angoli $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots$. L'intersezione di queste linee con la linea dei centri darà la posizione delle immagini negative, e la carica di ognuna di esse sarà rappresentata dalla sua distanza da D .

La densità superficiale in un punto qualunque dell'una o dell'altra sfera è la somma delle densità dovute al sistema di immagini. Così la densità superficiale in un punto qualunque S della sfera che ha il suo centro in A è

$$\sigma = \frac{1}{4\pi DA} \left\{ a + (AD^2 - AB^2) \frac{DB}{BS^2} + (AD^2 - AC^2) \frac{DC}{CS^2} + \dots \right\}$$

dove A, B, C, \dots sono le serie delle immagini positive.

Se S sta sul cerchio di intersezione, la densità è zero.

Per trovare la carica totale di ognuno dei segmenti sferici, possiamo prendere l'integrale di superficie dell'induzione prodotta attraverso questo segmento da ognuna delle immagini.

La carica totale del segmento di centro A , dovuta all'immagine A , la cui carica è D , è

$$DA \frac{DA + OA}{2DA} = \frac{1}{2} (DA + OA)$$

dove O è il centro del cerchio di intersezione.

Allo stesso modo la carica di ogni segmento dovuta all'immagine B è $\frac{1}{2} (DB + OB)$, e, così di seguito, essendo le linee come OB che sono misurate da O verso sinistra, contate negativamente.

Pertanto la carica totale del segmento il cui centro è A è

$$\frac{1}{2} (DA + DB + DC + \dots) + \frac{1}{2} (OA + OB + OC + \dots)$$

$$- \frac{1}{2} (DP + DQ + \dots) - \frac{1}{2} (OP + OQ + \dots)$$

167. Il metodo delle immagini elettriche si può applicare a un qualsiasi spazio, limitato da superfici piane o sferiche, intersecantesi tra loro sotto angoli che sono sottomultipli di due angoli retti.

Affinché un simile sistema di superfici sferiche possa esistere, tutti gli angoli solidi della figura devono essere triedri e avere due dei loro angoli retti, e il terzo retto o sottomultipli di due retti.

Di conseguenza, il caso in cui il numero delle immagini è finito sono i seguenti:

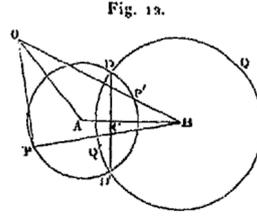
- (1) Una sola superficie, piano o sferico;
- (2) Due piani, una sfera e un piano, o due sfere tagliandosi sotto un angolo $\frac{\pi}{n}$;
- (3) Queste due superfici, unite a una terza, piano o sfera, che le taglia ortogonalmente;
- (4) Queste tre superfici e una quarta tagliano le prime due ortogonalmente e la terza sotto un angolo $\frac{\pi}{n}$. Di queste quattro superfici, una almeno deve essere sferica

Abbiamo già esaminato il primo e il secondo caso. Nel primo caso, abbiamo una sola immagine; nel secondo, ne abbiamo $2n - 1$, disposti in due serie su una circonferenza passante per il punto agente e ortogonali alle due superfici. Nel terzo caso, abbiamo, oltre alle immagini precedenti, le loro immagini rispetto alla terza superficie, cioè in tutto $4n - 1$ immagini oltre il punto agente.

Nel quarto caso, iniziamo a tracciare dal punto agente un cerchio ortogonale alle prime due superfici, sul quale determiniamo la posizione e la grandezza di n immagini negative e delle $n - 1$ immagini positive; poi, per ognuno di questi $2n$ punti (compreso il punto agente), tracciamo un cerchio ortogonale alle altre due superfici, sulla quale determiniamo due serie di n' immagine ognuna. Otteniamo così, in aggiunta al punto agente, $2nn' - 1$ immagini positive e $2nn'$ negative; e queste $4nn'$ punti sono le intersezioni di n cerchi con n' altri cerchi, appartenendo questi ai due sistemi di linee di curvatura di una cicloide.

Se ognuno di questi punti riceve la carica voluta di elettricità, la superficie, il cui potenziale è nullo, si compone di $n + n'$ sfere formanti due serie; le sfere successive della prima serie si tagliano sotto un angolo $\frac{\pi}{n}$, quelle della seconda serie sotto un angolo $\frac{\pi}{n'}$, e ognuna delle sfere di ogni serie è ortogonale a tutte le sfere dell'altra serie.

Caso di due sfere ortogonali (vedere Tav. IV). 168. Siano A e B i centri di due sfere che si tagliano ortogonalmente in D e D' (fig. 12), e sia C il punto in cui la linea DD' incontra la retta dei centri. C è l'immagine di A rispetto alla sfera B , e l'immagine di B rispetto alla sfera A . Se $AD = \alpha$ e $BD = \beta$, $AB = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; e se si pongono in A, B, C quantità di elettricità uguali a α, β e $-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, le due sfere saranno superfici equipotenziali, il cui potenziale sarà uguale all'unità.



Pertanto, tramite questo sistema, possiamo determinare la distribuzione nei casi seguenti:

1° Sul conduttore $PDQD'$ formato dai grandi segmenti delle due sfere. Il suo potenziale è uguale all'unità e la sua carica è

$$\alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = AD + BD - CD$$

Questa quantità è quindi la misura della capacità di un conduttore di questa forma, che non è soggetto ad alcuna azione induttiva da parte di altri corpi.

La densità in un punto qualsiasi P della sfera di centro A , e la densità in un punto qualunque Q della sfera B , sono rispettivamente

$$\frac{1}{4\pi\alpha} \left[1 - \left(\frac{\beta}{BP} \right)^2 \right] \quad \frac{1}{4\pi\beta} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{AQ} \right)^2 \right]$$

Nei punti di intersezione D e D' , la densità è zero.

Se una delle sfere è molto più grande dell'altra, al limite, la densità al vertice della piccola sfera è uguale a tre volte quella al vertice della grande sfera.

2° La lente $P'DQ'D'$, formata dai piccoli segmenti di due sfere, carica di una quantità di elettricità $-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ e soggetta all'azione dei punti A e B carichi delle quantità α e β , è pure al potenziale unità, e la sua densità è espressa dalle stesse formule.

3° Il menisco $DPD'Q'$, formato dalla differenza dei segmenti, essendo carichi della quantità α e soggetti all'azione delle cariche β in B e $-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ in C , è pure in equilibrio al potenziale unità.

4° Il menisco $QDP'D'$, sotto l'azione dei punti A e C .

Ai può così dedurre la distribuzione elettrica sulle superfici interno seguenti:

La lente cava $PDP'D'$ soggetta all'azione di un punto interno elettrizzato C , posto al centro del cerchio DD' ;

Il menisco cavo sotto l'azione di un punto posto al centro della superficie concava;

La croce formata dai grandi segmenti delle due sfere, sotto l'azione di tre punti A, B, C .

Ma, invece di ricercare la soluzione di questi casi, applichiamo il principio delle immagini elettriche per determinare la densità della carica indotta in un punto P della superficie esterna del conduttore $PDQD'$, per una unità di elettricità posta nel punto O .

Siano

$$OA = a \quad OB = b \quad OP = r \quad BP = p \\ AD = \alpha \quad BD = \beta \quad AB = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Invertiamo il sistema rispetto a una sfera di raggio unitario e di centro O .

Le due sfere rimarranno sfere, avendo i loro centri sullo stesso raggio di A e B . Se distinguiamo con un accento le quantità relative al sistema invertito

$$a' = \frac{a}{a^2 - \alpha^2} \quad b' = \frac{b}{b^2 - \beta^2} \quad \alpha' = \frac{\alpha}{a^2 - \alpha^2} \quad \beta' = \frac{\beta}{b^2 - \beta^2} \\ r' = \frac{1}{r} \quad p'^2 = \frac{\beta^2 r^2 + (b^2 - \beta^2)(p^2 - \beta^2)}{r^2(b^2 - \beta^2)}$$

Se, invertendo il sistema, il potenziale della superficie è l'unità, allora la densità nel punto P' è

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[1 - \left(\frac{\beta'}{p'} \right)^2 \right]$$

Se, nel sistema di partenza, la densità in P è σ , allora

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{1}{r^3}$$

e il potenziale è $\frac{1}{r}$. Ponendo in O una carica negativa di elettricità uguale all'unità, il potenziale diverrà zero sulla superficie, e la densità in P sarà

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{a^2 - \alpha^2}{\alpha r^3} \left(1 - \frac{\beta^3 r^3}{[\beta^2 r^2 + (b^2 - \beta^2)(p^2 - \beta^2)]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Si ha così la distribuzione prodotta su una delle superfici sferiche con una unità di elettricità posta in O . La distribuzione sull'altra superficie sferica si otterrà scambiando a e b e sostituendo p con q o AQ .

Per trovare la carica totale indotta sul conduttore da un punto elettrizzato O , esaminiamo il sistema invertito.

In esso, abbiamo cariche α' in A' , β' in B' , e una carica negativa $\frac{\alpha'\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}}$ in un punto C' della linea $A'B'$, tale che

$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{\alpha'^2}{\beta'^2}$$

Se $OA' = a'$, $OB' = b'$, $OC' = c'$, troviamo

$$c'^2 = \frac{a'^2 \beta'^2 + b'^2 \alpha'^2 - \alpha'^2 \beta'^2}{\alpha'^2 + \beta'^2}$$

Invertendo questo sistema di cariche diviene

$$\frac{\alpha'}{a'} = \frac{\alpha}{a} \quad \frac{\beta'}{b'} = \frac{\beta}{b}$$

e

$$-\frac{\alpha'\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} c'} = -\frac{\alpha\beta}{\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - \alpha^2\beta^2}}$$

Pertanto la carica totale che è indotta sul conduttore dall'unità di elettricità negativa posta in O , è

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - \alpha^2\beta^2}}$$

Distribuzione di elettricità su tre superficie sferiche che si intersecano ad angoli retti. Siano α, β, γ i raggi delle sfere, allora

$$BC = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \quad CA = \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2} \quad AB = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Siano P, Q, R (fig. 13) i piedi delle perpendicolari abbassate da A, B, C sui lati opposti del triangolo e sia O l'intersezione di queste perpendicolari.

Allora P è l'immagine di B nella sfera γ , e l'immagine di C nella sfera β e O è l'immagine di P nella sfera α . Siano α, β, γ le cariche poste in A, B, C . La carica in P sarà

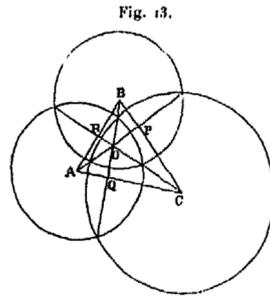
$$-\frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}}$$

Analogamente

$$AP = \frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$$

cosicché la carica del punto O , considerata come immagine di P , è

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}}$$



Si troverò pure il sistema di immagini, che sono elettricamente equivalenti, a quattro superfici sferiche ortogonali mantenute al potenziale unitario.

Se δ è il raggio di questa sfera, e se si pone al centro di essa una carica uguale a δ , la carica nel punto in cui la retta dei centri di due sfere qualunque, α e β per esempio, incontra il loro piano di intersezione, è

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}}}$$

La carica nel punto in cui il piano dei tre centri, A, B, C per esempio, incontra la perpendicolare abbassata da D è

$$+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}}$$

e la carica, nel punto di intersezione delle quattro perpendicolari, è

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2}}}$$

Sistema di quattro sfere ortogonali soggette all'azione di un punto elettrizzato.

170. Siano A, B, C, D le quattro sfere, e sia O il punto elettrizzato. Tracciamo quattro sfere A_1, B_1, C_1, D_1 di cui ogni A_1 passa per il punto O e taglia ortogonalmente tre delle sfere iniziali B, C, D nel caso presente; tracciamo sei sfere $(ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd)$ passanti ognuna per il punto O e per il cerchio di intersezione di due delle sfere iniziali.

Le tre sfere B_1, C_1, D_1 si tagliano in un secondo punto diverso da O . Sia A' questo punto, e siano B', C', D' le intersezioni di C_1, D_1 e A_1 di D_1, A_1, B_1 e di A_1, B_1, C_1 . Sue qualunque di queste sfere A_1, B_1 tagliano una delle sei sfere (cd) in un punto $(a'b')$; vi sono quindi sei di questi punti.

Una qualunque delle sfere A_1 taglia tre delle sei sfere $(ab), (ac), (ad)$ in un punto a' . Vi sono quattro punti di questa specie. Infine, le sei sfere $(ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd)$ si tagliano in un punto S .

Se ora invertiamo il sistema rispetto a una sfera di raggio R e di centro O , le quattro sfere A, B, C, D si invertono in sfere, e le altre dieci sfere in piani. Dei punti di intersezione delle prime quattro, A', B', C', D' , divengono i centri delle sfere: le altre corrispondono agli altri undici punti del paragrafo precedente, e questi quindici punti formano l'immagine di O nel sistema a quattro sfere.

Nel punto A' , immagine di O nella sfera A , bisogna porre una carica uguale all'immagine di O , cioè $-\frac{\alpha}{a}$, essendo α il raggio della sfera A e alla distanza del suo centro dal punto. Analogamente, bisogna porre le cariche volute in B', C', D' .

Le cariche di ognuno degli undici punti restanti si possono dedurre espressioni trovate al paragrafo precedente, sostituendo α', β', γ' e δ' a α, β, γ e δ , e moltiplicando il risultato ottenuto per ogni punto per la distanza di questo punto da O , impiegando la notazione seguente:

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{a^2 - \alpha^2} \quad \beta' = -\frac{\beta}{b^2 - \beta^2} \quad \gamma' = -\frac{\gamma}{c^2 - \gamma^2} \quad \delta' = -\frac{\delta}{d^2 - \delta^2}$$

[I casi studiati ai § 169 e 170 possono essere trattati come segue: Prendiamo tre piani coordinati rettangolari, e poniamo delle cariche $\pm e$, in ognuno degli otto punti del sistema

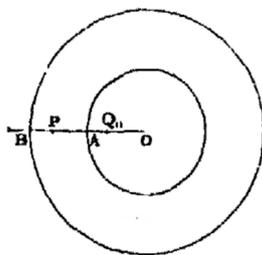
$(\pm \frac{1}{2\alpha}, \pm \frac{1}{2\beta}, \pm \frac{1}{2\gamma})$, essendo le cariche negative posto nei punti che hanno una o tre coordinate negative. È chiaro che allora i piani coordinati sono al potenziale zero. Invertiamo allora rispetto a un punto qualunque, e abbiamo il caso di tre sfere che si tagliano ortogonalmente soggette all'azione di un punto elettrizzato. Se invertiamo rispetto a uno dei punti elettrizzati, abbiamo la soluzione per il caso di un conduttore avente la forma di tre sfere di raggi α, β, γ che si tagliano ortogonalmente, e liberamente caricate.

Se al sistema dei punti elettrizzati descritti sopra, aggiungiamo la sua immagine rispetto a una sfera avente il suo centro nell'origine, vediamo che oltre ai tre piani coordinati, la superficie della sfera forma anche parte della superficie al potenziale zero.

Due sfere che non si incontrano. 171. Quando uno spazio è limitato da due superfici sferiche che non si incontrano, le immagini successive di un punto agente interno a questo spazio formano due serie infinite poste entrambe al di fuori di queste sfere: la condizione, affinché si possa applicare il metodo delle immagini elettriche è quindi soddisfatta.

Due sfere qualsiasi che non si incontrano si invertono in due sfere concentriche, se si assume come centro di inversione l'uno o l'altro dei due punti inversi comuni alle due sfere.

Fig. 14.



Cominceremo quindi con il caso di due superfici sferiche concentriche non isolate e soggette all'azione di un punto elettrizzato posto tra le due superfici.

Siano b il raggio della prima, e quello della seconda be^ω ; e sia $r = be^u$ la distanza tra il centro e il punto agente.

Tutte le immagini successive saranno sullo stesso raggio del punto agente.

Siano Q_0 (fig. 14) l'immagine di P rispetto alla prima sfera; P_1 l'immagine di Q_0 rispetto alla seconda sfera; Q_1 quella di P_1 rispetto alla prima e così di seguito; allora

$$\begin{aligned} OP_s \cdot OQ_s &= b^2 & OP_s \cdot OQ_{s-1} &= b^2 e^{2\omega} \\ OQ_0 &= be^{-u} & OP_1 &= be^{u+2\omega} & OQ_1 &= be^{-(u+2\omega)} \quad \dots \end{aligned}$$

Pertanto

$$OP_s = be^{(u+2s\omega)} \quad OQ_s = be^{-(u+2s\omega)}$$

e, se si rappresenta con P la carica del punto P , si ha

$$P_s = Pe^{s\omega} \quad Q_s = -Pe^{-(u+s\omega)}$$

Siano ora Q'_1 l'immagine di P nella seconda sfera, P'_1 quello di Q'_1 nella prima, ecc.

$$\begin{aligned} OQ'_1 &= be^{2\omega-u} & OP'_1 &= be^{u-2\omega} \\ OQ'_2 &= be^{4\omega-u} & OP'_2 &= be^{u-4\omega} \\ OQ'_s &= be^{2s\omega-u} & OP'_s &= be^{u-2s\omega} \\ Q'_s &= -Pe^{s\omega-u} & P'_s &= Pe^{-s\omega} \end{aligned}$$

Tra queste immagini, tutte le P sono positive e tutte le Q sono negative; tutti le P e tutte le Q appartengono alla prima sfera, tutte le P' e le Q' alla seconda sfera.

Le immagini interne alla prima sfera formano una serie convergente la cui somma è

$$-P \frac{e^{\omega-u} - 1}{e^\omega - 1}$$

Questa è dunque la quantità di elettricità distribuita sulla prima sfera, quella interna. Le immagini esterne alla seconda sfera formano una serie divergente; ma l'integrale di superficie di ognuna di queste immagini, rispetto alla sfera, è uguale a zero. La carica elettrica sulla sfera esterna è quindi

$$P \left(\frac{e^{\omega-u} - 1}{e^{\omega} - 1} - 1 \right) = -P \frac{e^{\omega} - e^{\omega-u}}{e^{\omega} - 1}$$

Se sostituiamo a queste espressioni i loro valori in funzione di OA, OB, OP , troviamo

$$\text{carica di } A = -P \frac{OA \cdot OB}{OP \cdot AB}$$

$$\text{carica di } B = -P \frac{OB \cdot AP}{OP \cdot AB}$$

Se si suppone che i raggi delle due sfere divengano infiniti, il caso diviene quello di un punto elettrizzato posto tra due piani paralleli A e B . In questo caso, le espressioni divengono

$$\text{carica di } A = -P \frac{PB}{AB}$$

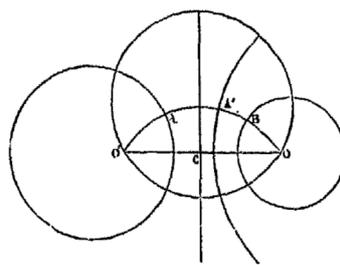
$$\text{carica di } B = -P \frac{AP}{AB}$$

172. Per passare da questo caso a quello delle due sfere che non si tagliano, iniziamo a trovare i due punti inversi comuni O e O' , per i quali passano tutti i cerchi ortogonali alle due sfere. Se allora invertiamo il sistema rispetto a uno o l'altro di questi punti, le due sfere divengono concentriche, come nel primo caso.

Se prendiamo come centro di inversione il punto O della fig. 15, questo sarà posta nelle fig. 14, da qualche parte tra le due sfere.

Ora, al § 171, abbiamo trattato il caso di un punto elettrizzato posto tra due conduttori concentrici mantenuto al potenziale zero. Pertanto, trasformando questo caso rispetto al punto O , ricaveremo la distribuzione dell'elettricità su due conduttori sferici esterni tra loro, mantenuti al potenziale zero, e soggetti all'azione di un punto elettrizzato posto nelle vicinanze. Si vedrà al § 173 come i risultati così ottenuti possono servire a trovare la distribuzione su due conduttori sferici elettrizzati e soggetti unicamente alla loro azione reciproca.

Fig. 15.



Il raggio $OAPB$ della fig. 14, sul quale si trovano le immagini successive, diviene nella fig. 15 un arco di cerchio passante per O e O' ; e il rapporto tra $O'P$ e OP è uguale a Ce^u , dove C è una quantità numerica.

Se poniamo

$$\theta = \log \frac{O'P}{OP} \quad \alpha = \log \frac{O'A}{OA} \quad \beta = \log \frac{O'B}{OB}$$

allora

$$\beta - \alpha = \omega \quad u + \alpha = \theta$$

Tutte le immagini successive di P si troveranno sull'arco $OAPBO'$.

La posizione dell'immagini di P in A è Q_0 dove

$$\theta(Q_0) = \log \frac{O'Q}{OQ} = 2\alpha - \theta$$

Quella di Q_0 in B è P_1 dove

$$\theta(P_1) = \log \frac{O'P_1}{OP_1} = \theta - 2\omega$$

Analogamente

$$\theta(P_s) = \theta + 2s\omega \quad \theta(Q_s) = 2\alpha - \theta - 2s\omega$$

Allo stesso modo se le immagini successive di P in B, A, B , ecc. sono Q'_0, P'_1, Q'_1 , ecc.

$$\begin{aligned} \theta(Q'_0) &= 2\beta - \theta & \theta(P'_1) &= \theta - 2\omega \\ \theta(P'_s) &= \theta - 2s\omega & \theta(Q'_s) &= 2\beta - \theta + 2s\omega \end{aligned}$$

Per trovare la carica di una immagine P_s , osserviamo che la sua carica nel sistema invertito è

$$P \sqrt{\frac{OP_s}{OP}}$$

che deve essere moltiplicato per OP_s nella figura originaria. Pertanto la carica di P_s nella figura bipolare è

$$P \sqrt{\frac{OP_s \cdot O'P_s}{OP \cdot O'P}}$$

Se poniamo $\xi = \sqrt{OP \cdot O'P}$ e se chiamiamo ξ il parametro del punto P , possiamo scrivere

$$P_s = \frac{\xi_s}{\xi} P$$

cioè che la carica di una immagine è proporzionale al suo parametro.

Se impieghiamo le coordinate curvilinee θ e ϕ , di modo che

$$e^{\theta + \sqrt{-1}\phi} = \frac{x + \sqrt{-1}y - k}{x + \sqrt{-1}y + k}$$

dove $2k$ è la distanza OO' , allora

$$x = -\frac{k \sinh \theta}{\cosh \theta - \cos \phi} \quad y = \frac{k \sin \phi}{\cosh \theta - \cos \phi}$$

$$x^2 + (y - k \cot \phi)^2 = k^2 \csc^2 \phi$$

$$(x + k \coth \theta)^2 + y^2 = k^2 \csc^2 \theta$$

3

$$\cot \phi = \frac{x^2 + y^2 - k^2}{2ky} \quad \coth \theta = -\frac{x^2 + y^2 - k^2}{2kx}$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{\cosh \theta - \cos \phi}}$$

Poiché la carica di ogni immagine è proporzionale al suo parametro e deve essere presa positiva o negativa, secondo che essa è della forma P e della forma Q , troviamo

$$P_s = \frac{P \sqrt{\cosh \theta - \cos \phi}}{\sqrt{\cosh(\theta + 2s\omega) - \cos \phi}}$$

$$Q_s = -\frac{P \sqrt{\cosh \theta - \cos \phi}}{\sqrt{\cosh(2\alpha - \theta - 2s\omega) - \cos \phi}}$$

³Bisogna ricordare che in queste espressioni $2 \cosh \theta = e^\theta + e^{-\theta}$, e $2 \sinh \theta = e^\theta - e^{-\theta}$ e le altre funzioni di θ si derivano da quelle con le stesse regole delle funzioni trigonometriche corrispondenti.

Il modo di applicare le coordinate bipolari a questo argomento è stato indicato da Thomson, nel *Journal de Liouville* del 1847. (Si veda, Thomson, Reprint of Papres, § 211 e 212). Nel testo, mi sono servito del metodo del professor Betti (*Nuovo Cimento*, vol. XX) perché è il metodo analitico; ma ho conservato la nozione di immagini elettriche, così come è stata impiegata da Thomson nella sua Memoria originale, *Phil. Mag.*, 1853.

$$P'_s = \frac{P\sqrt{\cosh \theta - \cos \phi}}{\sqrt{\cosh(\theta - 2s\omega) - \cos \phi}}$$

$$Q'_s = -\frac{P\sqrt{\cosh \theta - \cos \phi}}{\sqrt{\cosh(2\beta - \theta + 2s\omega) - \cos \phi}}$$

Abbiamo così ottenuto le posizioni e le cariche di due serie infinite di immagini. Dobbiamo ora determinare la carica totale della sfera A , trovando la somma delle immagini interne della forma P' o della forma Q' . Possiamo scrivere questa come

$$P\sqrt{\cosh \theta - \cos \phi} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{\sqrt{\cosh(\theta - 2s\omega) - \cos \phi}}$$

$$-P\sqrt{\cosh \theta - \cos \phi} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{\sqrt{\cosh(2\alpha - \theta - 2s\omega) - \cos \phi}}$$

Allo stesso modo la carica totale indotta su B è

$$P\sqrt{\cosh \theta - \cos \phi} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{\sqrt{\cosh(\theta + 2s\omega) - \cos \phi}}$$

$$-P\sqrt{\cosh \theta - \cos \phi} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{\sqrt{\cosh(2\beta - \theta + 2s\omega) - \cos \phi}}$$

173. Applicheremo ora questi risultati alla determinazione dei coefficienti di capacità e di induzione nel caso di due sfere di raggio a e b , la cui distanza dai centri è c .

Supponiamo la sfera A al potenziale unitario, e la sfera B al potenziale zero.

Le immagini successive di una carica a posto al centro della sfera A saranno quelle che corrispondono alla distribuzione effettiva. Tutte le immagini saranno sull'asse, tra i poli e i centri delle sfere; e si osserverà che dei quattro sistemi di immagini determinati nel § 172, il primo e il quarto soltanto esistono nel caso attuale.

Se poniamo

$$k = \frac{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2}}{2c}$$

allora $\sinh \alpha = -\frac{k}{a}$ e $\sinh \beta = \frac{k}{b}$.

I valori di θ e di ϕ , nel centro della sfera A , sono

$$\theta = 2\alpha \quad \phi = 0$$

Se quindi, nelle equazioni, sostituiamo a o $-k\frac{1}{\sinh \alpha}$ per P , 2α per θ e 0 per ϕ , ricordando che lo stesso P fa parte della carica di A , troviamo per il coefficiente di capacità di A

$$q_{aa} = k \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{\sinh(s\omega - \alpha)}$$

per il coefficiente di induzione di A su B o di B su A

$$q_{ab} = -k \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{\sinh s\omega}$$

Analogamente, supponendo B al potenziale unità e A a quello zero, possiamo determinare il valore di q_{bb} ; troviamo con la nostra notazione

$$q_{bb} = k \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{\sinh(\beta + s\omega)}$$

Per calcolare queste quantità in funzione dei raggi a e b delle sfere e della distanza c dai loro centri, osserveremo che,

$$K = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2}$$

e possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sinh \alpha &= -\frac{K}{2ac} & \sinh \beta &= \frac{K}{2bc} & \sinh \omega &= \frac{K}{2ab} \\ \cosh \alpha &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} & \cosh \beta &= \frac{c^2+b^2-a^2}{2cb} & \cosh \omega &= \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab} \end{aligned}$$

e, servendoci della relazione

$$\begin{aligned} \sinh(\alpha + \beta) &= \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta \\ \cosh(\alpha + \beta) &= \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta \end{aligned}$$

In questo modo, ossia calcolando direttamente le immagini successive con il metodo indicato nelle Memoria di Sir W. Thomson, troviamo

$$\begin{aligned} q_{aa} &= a + \frac{a^2b}{c^2 - b^2} + \frac{a^3b^2}{(c^2 - b^2 + ac)(c^2 - b^2 - ac)} + \dots \\ q_{ab} &= -\frac{ab}{c} - \frac{a^2b^2}{(c^2 - a^2 - b^2)} - \frac{a^3b^3}{c(c^2 - a^2 - b^2 + ab)(c^2 - a^2 - b^2 - ab)} + \dots \\ q_{bb} &= b + \frac{ab^2}{c^2 - a^2} + \frac{a^2b^3}{(c^2 - a^2 + bc)(c^2 - a^2 - bc)} + \dots \end{aligned}$$

174. Abbiamo allora le seguenti equazioni per determinare le cariche E_a e E_b di due sfere, quando esse sono portate ai potenziali V_a e V_b

$$\begin{aligned} E_a &= V_a q_{aa} + V_b q_{bb} \\ E_b &= V_a q_{ab} + V_b q_{bb} \end{aligned}$$

Se poniamo

$$q_{aa}q_{bb} - q_{ab}^2 = D = \frac{1}{D'}$$

e

$$p_{aa} = q_{bb}D' \quad p_{ab} = -q_{ab}D' \quad p_{bb} = q_{aa}D'$$

da cui

$$p_{aa}p_{bb} - p_{ab}^2 = D'$$

allora le equazioni per determinare i potenziali in funzione della cariche sono

$$\begin{aligned} V_a &= p_{aa}E_a + p_{ab}E_b \\ V_b &= p_{ab}E_a + p_{bb}E_b \end{aligned}$$

e p_{aa}, p_{bb}, p_{ab} sono i coefficienti di potenziale.

L'energia totale del sistema è, dal § 85,

$$Q = \frac{1}{2} (E_a V_a + E_b V_b) = \frac{1}{2} (V_a^2 q_{aa} + 2V_a V_b q_{ab} + V_b^2 q_{bb}) = \frac{1}{2} (E_a^2 p_{aa} + 2E_a E_b p_{ab} + E_b^2 p_{bb})$$

La repulsione tra le sfere è pertanto, dai § 92-93,

$$F = \frac{1}{2} \left\{ V_a^2 \frac{dq_{aa}}{dc} + 2V_a V_b \frac{dq_{ab}}{dc} + V_b^2 \frac{dq_{bb}}{dc} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ E_a^2 \frac{dp_{aa}}{dc} + 2E_a E_b \frac{dp_{ab}}{dc} + E_b^2 \frac{dp_{bb}}{dc} \right\}$$

dove c è la distanza tra i centri delle sfere.

Di queste due relazioni della repulsione, la prima, che è espressa in funzione dei potenziali delle sfere e delle variazioni dei coefficienti di capacità e di induzione, è la più comoda per il calcolo.

Dobbiamo quindi differenziare le q rispetto a c . Queste quantità che sono espresse in funzione di k, α, β, ω , devono essere differenziate, supponendo a e b costanti. Abbiamo le equazioni

$$k = -a \sinh \alpha = b \sinh \beta = -c \frac{\sinh \alpha \sinh \beta}{\sinh \omega}$$

troviamo

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dc} &= \frac{\cosh \alpha \cosh \beta}{\sinh \omega} \\ \frac{d\alpha}{dc} &= \frac{\sinh \omega}{k \cosh \alpha \cosh \beta} \\ \frac{d\beta}{dc} &= \frac{k \sinh \omega}{\cosh \alpha \sinh \beta} \\ \frac{d\omega}{dc} &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} \frac{dq_{aa}}{dc} &= \frac{\cosh \alpha \cosh \beta}{\sinh \omega} \frac{q_{aa}}{k} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(sc + b \cosh \beta) \cosh (s\omega - \alpha)}{c (\sinh (s\omega - \alpha))^2} \\ \frac{dq_{ab}}{dc} &= \frac{\cosh \alpha \cosh \beta}{\sinh \omega} \frac{q_{ab}}{k} + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s \cosh s\omega}{(\sinh s\omega)^2} \\ \frac{dq_{bb}}{dc} &= \frac{\cosh \alpha \cosh \beta}{\sinh \omega} \frac{q_{bb}}{k} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(sc - a \cosh \alpha) \cosh (\beta + s\omega)}{c (\sinh (\beta + s\omega))^2} \end{aligned}$$

Sir W. Thomson ha calcolato la forza che si esercita tra due sfere di raggio uguale, separate da una distanza minore del diametro di ciascuna di esse. Per distanze maggiori, non è necessario impiegare più di due o tre immagini successive.

La serie dei coefficienti differenziali di q rispetto a c si ottiene facilmente per differenziazione diretta.

$$\begin{aligned} \frac{dq_{aa}}{dc} &= -\frac{2a^2bc}{(c^2 - b^2)^2} - \frac{2a^3b^2c(2c^2 - 2b^2 - a^2)}{(c^2 - b^2 + ac)(c^2 - b^2 - ac)} - \dots \\ \frac{dq_{ab}}{dc} &= -\frac{ab}{c^2} + \frac{a^2b^2(3c^2 - a^2 - b^2)}{c^2(c^2 - a^2 - b^2)} + \frac{a^3b^3\{(5c^2 - a^2 - b^2)(c^2 - a^2 - b^2) - a^2b^2\}}{c^2(c^2 - a^2 - b^2 + ab)^2(c^2 - a^2 - b^2 - ab)^2} + \dots \\ \frac{dq_{bb}}{dc} &= -\frac{2ab^2c}{(c^2 - a^2)^2} - \frac{2a^2b^3c(2c^2 - 2a^2 - b^2)}{(c^2 - a^2 + bc)(c^2 - a^2 - bc)^2} + \dots \end{aligned}$$

Distribuzione elettrica su due sfere a contatto. 175. Se supponiamo le due sfere al potenziale unitario, senza influenza di nessun altro punto, e se invertiamo il sistema rispetto al punto di contatto, avremo due piani paralleli, alle distanze $\frac{1}{2a}$ e $\frac{1}{2b}$ dal punto di inversione, soggetti all'azione di una unità elettrica posta in questo punto.

Vi sarà una serie di immagini positive, tutte uguale all'unità, a distanze $s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ dall'origine, essendo s un numero intero qualsiasi compreso tra $-\infty$ e $+\infty$.

Vi sarà anche una serie di immagini negative tutte uguali a -1 , le cui distanze dall'origine, contate nel verso di a , sono $\frac{1}{a} + s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

Se questo sistema è nuovamente invertito e riportato alla forma di due sfere a contatto, abbiamo una serie corrispondente di immagini negative, le cui distanze dal punto di contatto sono della forma $s\frac{1}{s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$, dove s è positivo per la sfera A e negativo per la sfera B . La carica di ogni immagine (essendo il potenziale delle sfere uguale all'unità) è numericamente uguale alla sua distanza dal punto di contatto ed è sempre negativa.

Vi sarà pure una serie di immagini positive, le cui distanze dal punto di contatto, misurate nella direzione del centro di A , sono della forma $\frac{1}{\frac{1}{a} + s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$.

Quando s è zero o un intero positivo, l'immagine è interna alla sfera A .

Se s è un intero negativo, l'immagine è nella sfera B .

La carica di ogni immagine ha per misura la sua distanza dall'origine ed è sempre positiva.

La carica totale della sfera A è quindi

$$E_a = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{\frac{1}{a} + s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} - \frac{ab}{a+b} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s}$$

Ognuna di queste serie è infinita, ma, se le combiniamo nella forma

$$E_a = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a^2b}{s(a+b)[s(a+b) - a]}$$

le serie diventano convergenti.

Nello stesso modo troviamo per la carica della sfera B

$$E_b = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{ab}{s(a+b)-b} - \frac{ab}{a+b} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s} \frac{ab^2}{s(a+b)[s(a+b)-b]}$$

L'espressione di E_a è ovviamente uguale a

$$\frac{ab}{a+b} \int_0^1 \frac{\theta^{\frac{b}{a+b}-1}}{1-\theta} d\theta$$

che è la forma sotto la quale Poisson aveva dato questo risultato.

Si può pure mostrare (Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 438) che la serie E_a che precede è uguale a

$$a - \left\{ \gamma + \Psi \left(\frac{b}{a+b} \right) \right\} \frac{ab}{a+b}$$

dove $\gamma = 0,57712\dots$, e $\Psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(1+x)$.

Si è stilata una tabella di valori di Ψ . (Si veda *Œuvres de Gauss*, t. III, p. 161-162).

Se si indica un istante $\frac{b}{a+b}$ per x , la differenza tra le cariche E_a e E_b è

$$-\frac{d}{dx} \log \Gamma(x) \Gamma(1-x) \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{d}{dx} \log \sin \pi x \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{\pi ab}{a+b} \cot \frac{\pi b}{a+b}$$

Quando le sfere sono uguali la carica di ognuna per un potenziale unitario è

$$E_a = a \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{2s(2s-1)} = a \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = a \ln 2 = 0,69314718a$$

Quando la sfera A è molto piccola rispetto alla sfera B la carica su A è approssimativamente

$$E_a = \frac{a^2}{b} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^2}$$

o

$$E_a = \frac{\pi^2 a^2}{6 b}$$

La carica su B è quasi la stessa come se A fosse tolta, o

$$E_b = b$$

La densità media su ogni sfera si ottiene dividendo la carica per la superficie; si ottiene così

$$\sigma_a = \frac{E_a}{4\pi a^2} = \frac{\pi}{24b}$$

$$\sigma_b = \frac{E_b}{4\pi b^2} = \frac{1}{4\pi b}$$

$$\sigma_c = \frac{\pi^2}{6} \sigma_b$$

Pertanto, se una sfera molto piccola è messa a contatto con una molto grande, la densità media sulla piccola sfera è uguale a quella della sfera grande moltiplicata per $\frac{\pi^2}{6}$ o 1,644936.

Applicazione dell'inversione elettrica al caso di una calotta sferica. 176. Uno degli esempi più significativi della potenza del metodo delle immagini elettriche è lo studio fatto da Sir W. Thomson della distribuzione su una calotta sferica. I risultati di questo studio furono comunicati senza dimostrazione a M. Liouville e pubblicati nel suo giornale nel 1847. Il lavoro completo è dato nella *Reprint of Electrical papers* di Thomson, art. XV. Non conosco alcun altro matematico che abbia risolto il problema della distribuzione su una porzione limitata di superficie curva.

Siccome mi propongo di esporre il metodo piuttosto che di verificare i calcoli, non mi dilungherò sulle considerazioni geometriche né sull'integrazione e rinvio il lettore al lavoro di Thomson.

Distribuzione su un ellissoide. 177. Si dimostra, con un metodo ben noto⁴, che l'attrazione di uno strato limitato dalle superfici di due ellipsoidi simili, similmente posti e concentrici, è tale che non vi è attrazione risultante su un punto interno allo strato. Se supponiamo che lo spessore dello strato decresca indefinitamente, e contemporaneamente la sua densità aumenta, al limite arriviamo a immaginare la densità come variante proporzionalmente alla perpendicolare abbassata dal centro sul piano tangente, e, poiché in questa distribuzione superficiale l'attrazione su un punto interno all'ellissoide è nulla, l'elettricità così distribuita sulla superficie è in equilibrio.

Pertanto, la densità superficiale in un punto di un ellissoide non soggetto a influenze esterne, è proporzionale alla distanza dal centro al piano tangente.

Distribuzione su un disco. Facendo i due assi dell'ellissoide uguali e facendo tendere il terzo a zero, si ha il caso di un disco circolare, e abbiamo l'espressione della densità superficiale in un punto qualunque P di un tale disco carico al potenziale V , senza essere soggetto ad alcuna azione esterna. Se σ è la densità superficiale su una delle facce del disco, e se $-KPL$ è una corda tracciata dal punto P ,

$$\sigma = \frac{V}{2\pi^2 \sqrt{KP \cdot PL}}$$

Applicazione del Principio di Inversione Elettrica. 178. Prendiamo per centro di inversione un punto qualunque Q , e sia R il raggio della sfera di inversione. Il piano del disco diviene una superficie sferica passante per Q e il disco stesso diviene una porzione della sfera limitata da un cerchio. Questa porzione la chiameremo la *calotta*.

Se S' è il disco elettrizzato al potenziale V' e sottratto a ogni azione esterna, la sua immagine S sarà un segmento di sfera elettrizzato dall'azione di una quantità di elettricità $V'R$ posta in Q .

Il metodo di inversione ci dà quindi la soluzione del problema della distribuzione elettrica su una calotta sferica o su un disco piano soggetto all'azione di un punto elettrizzato posto sul prolungamento della superficie della o del piano.

Influenza di un punto elettrizzato posto sulla parte non impiegata della superficie sferica. La soluzione si deduce dai principi geometrici e dal metodo di inversione esposto prima.

Sia C il punto centrale o il polo della calotta S , e sia a la distanza di C da un punto del bordo circolare del segmento. Se una quantità q di elettricità è posta in un punto Q della superficie della sfera prolungata, e se il segmento S è mantenuto al potenziale zero, la densità σ in un punto qualunque P della superficie della calotta è

$$\sigma = \frac{1}{2\pi^2} \frac{q}{QP^2} \sqrt{\frac{CQ^2 - a^2}{a^2 - CP^2}}$$

essendo CQ, CP, QP le rette che uniscono i punti $C; P, Q$.

Si noti che questa espressione non dipende dal raggio della sfera alla quale è legato il segmento. Essa si applica quindi senza cambiamento al caso di un disco piano.

⁴Thomson e Tait, *Natural Philosophy*, § 150 di questa Opera.

Influenza di un numero qualunque di punti elettrizzati. Consideriamo ora la sfera come divisa in due parti: il segmento sferico sul quale abbiamo determinato la distribuzione, e che chiameremo *calotta*, e il resto della superficie la parte non utilizzata, sulla quale è posto il punto agente Q .

Se un numero qualsiasi di punti agenti sono distribuiti sul resto della sfera, la carica indotta da essi su un punto qualunque della calotta si può ottenere aggiungendo le densità indotte da ciascuno di essi separatamente.

179. Supponiamo tutto il resto della superficie della sfera ricoperto da una carica uniforme di densità ρ ; la densità in un punto qualunque della calotta si otterrà da una semplice integrazione estesa alla superficie così elettrizzata.

Otterremo così la soluzione per il caso in cui la calotta è al potenziale zero, e sottoposta all'azione del resto della sfera coperto da uno strato fisso di densità ρ .

Isoliamo ora tutto il sistema, e mettiamolo all'interno di una sfera di diametro f , ricoperta da uno strato fisso di elettricità di densità ρ' .

Non vi sarà forza risultante all'interno di questa sfera; la distribuzione non sarà quindi cambiata sulla calotta, ma il potenziale di tutti i punti interni a questa sfera sarà aumentato di una quantità V , tale che

$$V = 2\pi\rho'f$$

Pertanto il potenziale diverrà V in tutti i punti della calotta.

Supponiamo ora che questa sfera sia concentrica a quella che fa parte della calotta, e che il suo raggio superi quello di quest'ultima sfera di una quantità infinitamente piccola.

Abbiamo allora il caso di una calotta mantenuta al potenziale V , e soggetto all'azione del resto della sfera carica di una carica fissa la cui densità superficiale è $\rho + \rho'$.

180. Ci basta allora supporre che $\rho + \rho'$ è uguale a zero, e abbiamo il caso di una calotta mantenuta al potenziale V e sottratta ad ogni azione esterna.

Sia σ la densità in un punto dato su una o sull'altra delle superfici del segmento, essendo questo a potenziale zero e soggetto all'azione del resto della sfera caricata alla densità ρ . Se il segmento è mantenuto al potenziale V , bisognerà aumentare la densità sull'esterno del segmento della densità ρ' della sfera circondante.

Il risultato di questa analisi è che, se f è il diametro della sfera, a il raggio del segmento, r la distanza di P dal polo del segmento. la densità superficiale sulla superficie interna del segmento è

$$\sigma = \frac{V}{2\pi^2 f} \left\{ \sqrt{\frac{f^2 - a^2}{a^2 - r^2}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{f^2 - a^2}{a^2 - r^2}} \right\}$$

e la densità superficiale nello stesso punto, ma all'esterno del segmento, è

$$\sigma + \frac{V}{2\pi f}$$

Per calcolare questo risultato, non si deve fare una operazione più complicata di un semplice integrale esteso su una frazione della superficie sferica. E per ottenere la teoria della distribuzione su un segmento di sfera, dobbiamo solo introdurre l'altra considerazione geometrica dell'inversione loro sulle facce sferiche.

181. Si debba trovare la densità superficiale in un punto di un segmento sottoposto all'azione di una carica q posta in un punto Q non posto sul prolungamento della superficie sferica.

Trasformiamo il segmento rispetto a Q , essendo il raggio della sfera di inversione uguale a R . Il segmento S si trasforma nella sua immagine S' e il punto P ha per immagine P' . Dobbiamo allora determinare la densità σ' nel punto P , essendo il segmento S mantenuto a un potenziale V' tale che $q = V'R$, e sottratto d'altra parte a ogni influenza esterna.

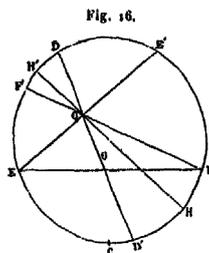
La densità σ nel punto P del segmento iniziale è allora

$$\sigma = -\frac{\sigma' R^2}{QP^2}$$

essendo questo segmento al potenziale zero e sottoposto all'azione di una quantità q di elettricità posta in Q .

Il risultato di questa operazione è il seguente:

Supponiamo che la figura rappresenti una sezione tracciata dal centro O della sfera, il polo C del segmento e il punto agente Q ; D è un punto che, nella figura invertita, corrisponde al polo non occupato, dal lato della base del segmento; può essere ottenuto dalla costruzione seguente:



Tracciamo da Q le corde EQE' e FQF' . Allora, se supponiamo che il raggio della sfera di inversione è un medio proporzionale tra i segmenti che il punto Q determina sulla corda, $E'F'$ sarà l'immagine di EF . Prendiamo il punto medio D' dell'arco $F'CE'$, di modo che $F'D' = F'E'$ e tracciamo $D'QD$ che incontra la sfera in D ; questo è il punto cercato. Analogamente, da O , centro della sfera, e da Q , tracciamo $HOQH'$, che taglia la sfera in H e in H' . Allora, se P è un punto del segmento, la densità superficiale in P , dalla parte del segmento che è separato da Q dal resto della superficie sferica, densità dovuta all'induzione di una carica q posta in Q , sarà

$$\sigma = \frac{q}{2\pi^2} \frac{QH \cdot QH'}{HH' \cdot PQ^3} \left\{ \frac{PQ}{DQ} \left(\frac{CD^2 - a^2}{a^2 - CP^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \tan^{-1} \left[\frac{PQ}{DQ} \left(\frac{CD^2 - a^2}{a^2 - CP^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}$$

dove a indica la corda tracciata dal polo C alla base circolare del segmento.

Dalla parte più vicina di Q , la densità superficiale è

$$\sigma + \frac{q}{2\pi} \frac{QH \cdot QH'}{HH' \cdot PQ^3}$$

Teoria delle funzioni coniugate a due dimensioni

182. Vi è solo un numero molto ristretto di casi veramente indipendenti, per i quali sia stato risolto il problema dell'equilibrio elettrico. Il metodo delle armoniche sferiche è applicato ai conduttori sferici; i metodi delle immagini elettriche e dell'inversione sono ancora più potenti nel caso in cui sono applicabili. Ma, a mia conoscenza, il caso delle superfici di secondo grado è il solo di cui si conoscono contemporaneamente le superfici equipotenziali e le linee di forza, quando queste linee di forza non sono curve piane.

Ma vi è una classe di problemi molto importanti nella teoria dell'equilibrio elettrico e in quello della conduzione delle correnti, dove basta considerare solo uno spazio a due dimensioni.

Per esempio, se in tutte le parti del campo elettrico considerate, e al di là ancora, le superfici di tutti i conduttori sono generati dal moto di linee rette parallele all'asse z , e se la parte del campo dove cessa di essere in tal modo è così lontana dalla parte considerata tanto da poter trascurare l'azione elettrica di questa parte lontana, l'elettricità si distribuisce uniformemente lungo delle generatrici; e se consideriamo una parte del campo limitata da due piani perpendicolari all'asse z e distante di una unità di lunghezza, il potenziale e la distribuzione elettrica saranno funzioni solo di x e y .

Siano $\rho dx dy$ la quantità di elettricità distribuita in un elemento avente $dx dy$ come base e l'unità per altezza, e σds la quantità distribuita su un elemento di superficie la cui base è l'elemento lineare ds , e la cui altezza è uguale all'unità.

L'equazione di Poisson si può scrivere

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + 4\pi\rho = 0$$

che si riduce, in assenza di elettricità libera, all'equazione di Laplace

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0$$

Il problema generale dell'equilibrio elettrico si può enunciare nel modo seguente:

Dato uno spazio continuo a due dimensioni limitato da curve chiuse C_1, C_2, \dots , trovare la forma di una funzione V tale che, su questi limiti, assuma i diversi valori V_1, V_2, \dots costanti per ogni limite; e che nell'estensione di questo spazio V sia finito, continuo, abbia in ogni punto un valore unico e soddisfi all'equazione di Laplace.

Non so se sia stata data una soluzione perfettamente generale, anche del problema così limitato; ma il metodo di trasformazione dato nel § 190, e che si può applicare a questo caso, è ben più potente di ogni metodo conosciuto applicabile allo spazio a tre dimensioni.

Il metodo si basa sulla proprietà delle funzioni coniugate di due variabili.

Definizioni di funzioni coniugate. 183. Si dice che due quantità α e β sono funzioni coniugate di x e y , se $\alpha + i\beta$ è una funzione di $x + iy$. Da questa definizione risulta che

$$(12.0.1) \quad \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\beta}{dy} \quad \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx} = 0$$

$$(12.0.2) \quad \frac{d^2\alpha}{dx^2} = \frac{d^2\alpha}{dy^2} \quad \frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d^2\beta}{dy^2} = 0$$

Pertanto le due funzioni soddisfano all'equazione di Laplace.

Si ha pure

$$(12.0.3) \quad \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy} \frac{d\beta}{dx} = \left(\frac{d\alpha}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy} \right)^2 = \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy} \right)^2 = R^2$$

Se x e y sono coordinate rettangolari, se ds_1 è l'arco intercettato sulla curva $\beta = cost$ dalle curve $\alpha + d\alpha$ e se ds_2 è l'arco di α compreso tra le curve β e $\beta + d\beta$, si ha

$$(12.0.4) \quad \frac{ds_1}{d\alpha} = \frac{ds_2}{d\beta} = \frac{1}{R}$$

e le curva si intersecano ortogonalmente.

Se supponiamo che il potenziale $V = V_0 + k\alpha$, essendo k una certa costante, V soddisfa all'equazione di Laplace, e le curva (α) sono equipotenziali. Le curve (β) sono linee di forza e l'integrale di R preso per una base unitaria su una superficie cilindrica che si proietta sul piano xy lungo la curva AB è uguale a $k(\beta_B - \beta_A)$, dove β_A e β_B sono i valori di β alle estremità della curva.

Se si traccia nel piano una serie di curve corrispondenti a una serie di valori di α in progressione aritmetica, e un'altra serie corrispondente a valori di β presentanti la stessa differenza, queste due serie di curve si tagliano ortogonalmente in tutti i loro punti di incontro; e se la differenza comune è molto piccola, al limite gli elementi nei quali è diviso il piano saranno piccoli quadrati i cui lati avranno, nelle diverse parti del campo, direzioni e grandezze differenti, essendo queste inversamente proporzionali a R .

Se due o più linee equipotenziali α sono curve chiuse comprendenti tra esse uno spazio continuo, le si possono prendere per superfici di conduttori ai potenziali $(V_0 + k\alpha_1), (V_0 + k\alpha_2), \dots$. La quantità di elettricità distribuita sull'elemento di questa curve, che è compresa tra le linee di forza β_1 e β_2 , è $\frac{k}{4\pi}(\beta_2 - \beta_1)$.

Il numero di linee equipotenziali comprese tra due conduttori indica quindi la differenza dei loro potenziali e il numero di linee di forza che partono da un conduttore indica la quantità di elettricità che lo carica.

Stabiliamo ora alcuni dei principali teoremi relativi alle funzioni coniugate, e, per dimostrarli, ci serviremo sia delle equazioni (12-1), che contengono i coefficienti differenziali, sia definizioni primitive, dove si fa uso di simboli immaginari.

TEOREMA. I - 184. *Se x' e y' sono funzioni coniugate rispetto a x e y , e se x'' e y'' sono altre funzioni coniugate rispetto a x e y , le funzioni $x' + x''$ e $y' + y''$ saranno pure coniugate rispetto a x e y .*

Infatti,

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \quad e \quad \frac{dx''}{dx} = \frac{dy''}{dy}$$

da cui

$$\frac{d(x' + x'')}{dx} = \frac{d(y' + y'')}{dy}$$

Analogamente

$$\frac{dx'}{dy} = -\frac{dy'}{dx} \quad e \quad \frac{dx''}{dy} = -\frac{dy''}{dx}$$

da cui

$$\frac{d(x' + x'')}{dy} = -\frac{d(y' + y'')}{dx}$$

cioè $x' + x''$ e $y' + y''$ sono funzioni coniugate rispetto a x e y .

Rappresentazione grafica di una funzione che è la somma di due funzioni date.

Sia una funzione (α) di x e y , rappresentata graficamente da una serie di curve tracciate nel piano xy , ognuna corrispondente a un valore particolare di α preso in una serie di valori crescenti di una quantità costante δ .

Sia un'altra funzione (β) di x e y , rappresentata da una serie di curve corrispondenti a valori di β che differiscono della stessa quantità costante δ .

Per rappresentare allo stesso modo la funzione ($\alpha + \beta$), bisognerà tracciare una serie di curve passante per le intersezioni delle prime due serie: dall'intersezione delle curve α e β a quella delle curve $\alpha + \delta$ e $\beta - \delta$, poi a quella delle curve $\alpha + 2\delta$ e $\beta - 2\delta$, così di seguito. In tutti questi punti, la funzione avrà lo stesso valore $\alpha + \beta$. La curva seguente passerà per le intersezioni di α e $\beta + \delta$, $\alpha + \delta$ e β , $\alpha + 2\delta$ e $\beta - \delta$, e così di seguito, e la funzione che corrisponde a questa curva è $\alpha + \beta + \delta$.

In questo modo, essendo tracciate la serie delle curve α e quella della serie β , si può costruire la serie $\alpha + \beta$.

Queste tre serie di curve possono essere tracciate a parte su tre diversi fogli di carta trasparenti; e, quando la prima e la seconda sono opportunamente sovrapposte, si può tracciare la terza.

Le funzioni coniugate potendo così essere combinate per somma, abbiamo il mezzo per tracciare senza fatica le figure che corrispondono a casi interessanti, dal momento che sappiamo tracciare le figure per i casi semplici dai quali si sono formate. Ma il teorema seguente ci fornisce un metodo ben più potente per trasformare le soluzioni.

TEOREMA. II - 185. *Se x'' e y'' sono funzioni coniugate rispetto alle variabili x' e y' , e se x' e y' sono funzioni coniugate rispetto a x e y , x'' e y'' sono coniugate rispetto a x e y .*

Infatti,

$$\frac{dx''}{dx} = \frac{dx''}{dx'} \frac{dx'}{dx} + \frac{dx''}{dy'} \frac{dy'}{dx} = \frac{dy''}{dy'} \frac{dy'}{dy} + \frac{dy''}{dx'} \frac{dx'}{dy} = \frac{dy''}{dy}$$

e

$$\frac{dx''}{dy} = \frac{dx''}{dx'} \frac{dx'}{dy} + \frac{dx''}{dy'} \frac{dy'}{dy} = -\frac{dy''}{dy'} \frac{dy'}{dx} - \frac{dy''}{dx'} \frac{dx'}{dx} = -\frac{dy''}{dx}$$

e queste sono le condizioni affinché x'' e y'' siano coniugate di x e y .

Si può anche vedere dalla definizione iniziale delle funzioni coniugate. Poiché $x'' + iy''$ è una funzione di $x' + iy'$, e $x' + iy'$ è una funzione di $x + iy$. Quindi, $x'' + iy''$ è una funzione di $x + iy$.

Analogamente, si mostrerà che, se x' e y' sono funzioni coniugate di x e y , x e y sono funzioni coniugate di x' e y' .

Questo teorema può ricevere la seguente interpretazione grafica:

Prendiamo x' e y' per coordinate rettangolari, e tracciamo sulla carta le curve corrispondenti a valori in progressione aritmetica di x'' e y'' . Abbiamo così un doppio sistema di curve che suddivide il foglio in piccoli quadrati. Tracciamo pure sulla carta le linee rette orizzontali e verticali, ugualmente distanziate, e inscriviamo vicino a queste linee i valori corrispondenti di x' e y' .

Prendiamo ora un altro foglio di carta, sul quale x e y sono presi per coordinate rettangolari, e sul quale si traccia un doppio sistema di curve x' e y' , recante ognuna delle curve l'indicazione dei valori corrispondenti di x' e y' . Questo sistema di coordinate curvilinee corrisponderà, punto per punto, al sistema di coordinate rettilinee $x'y'$ del primo foglio di carta.

Se quindi prendiamo un numero qualunque di punti sulla curva x'' del primo foglio, e se annotiamo i valori di x' e y' in questi punti; e se segniamo i punti corrispondenti sul secondo foglio, otterremo altrettanti punti della curva trasformata x'' . Se facciamo così per tutte le curve x'' , y'' del primo foglio, otterremo sul secondo una doppia serie di curve x'' , y'' di forma differente, ma che possiedono la stessa proprietà di suddividere il foglio in piccoli quadrati.

TEOREMA. III. **186.** - Se V è una funzione di x' e di y' , e se x' e y' sono funzioni coniugate di x, y , si ha

$$\iint \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} \right) dx dy = \iint \iint \left(\frac{d^2V}{dx'^2} + \frac{d^2V}{dy'^2} \right) dx' dy'$$

essendo l'integrazione tra gli stessi limiti.

Infatti,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dx'} \frac{dx'}{dx} + \frac{dV}{dy'} \frac{dy'}{dx}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V}{dx'^2} \left(\frac{dx'}{dx} \right)^2 + 2 \frac{d^2V}{dx' dy'} \frac{dx'}{dx} \frac{dy'}{dx} + \frac{d^2V}{dy'^2} \left(\frac{dy'}{dx} \right)^2 + \frac{dV}{dx'} \frac{d^2x'}{dx^2} \frac{d^2y'}{dx^2}$$

e

$$\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{d^2V}{dx'^2} \left(\frac{dx'}{dy} \right)^2 + 2 \frac{d^2V}{dx' dy'} \frac{dx'}{dy} \frac{dy'}{dy} + \frac{d^2V}{dy'^2} \left(\frac{dy'}{dy} \right)^2 + \frac{dV}{dx'} \frac{d^2x'}{dy^2} \frac{d^2y'}{dy^2}$$

Sommando queste ultime due equazioni, e ricordando le condizioni (12-1) relative alle funzioni coniugate, troviamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} &= \frac{d^2V}{dx'^2} \left[\left(\frac{dx'}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dx'}{dy} \right)^2 \right] + \frac{d^2V}{dy'^2} \left[\left(\frac{dy'}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dy} \right)^2 \right] = \\ &= \left(\frac{d^2V}{dx'^2} + \frac{d^2V}{dy'^2} \right) \left(\frac{dx'}{dx} \frac{dy'}{dy} - \frac{dx'}{dy} \frac{dy'}{dx} \right) \end{aligned}$$

Pertanto

$$\iint \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} \right) dx dy = \iint \left(\frac{d^2V}{dx'^2} + \frac{d^2V}{dy'^2} \right) \left(\frac{dx'}{dx} \frac{dy'}{dy} - \frac{dx'}{dy} \frac{dy'}{dx} \right) dx dy = \iint \left(\frac{d^2V}{dx'^2} + \frac{d^2V}{dy'^2} \right) dx' dy'$$

Se V è un potenziale, allora, dall'equazione di Poisson

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + 4\pi\rho = 0$$

e possiamo scrivere il risultato

$$\iint \rho dx dy = \iint \rho' dx' dy'$$

cioè che vi è una stessa quantità di elettricità nelle parti corrispondenti dei due sistemi, se le coordinate di un sistema sono funzioni coniugate delle coordinate dell'altro sistema.

Teoremi addizionali relativi alle funzioni coniugate.

TEOREMA. IV. **187.** - Se x_1 e y_1 , x_2 e y_2 sono funzioni coniugate rispetto a x e y , e se

$$X = x_1 x_2 - y_1 y_2 \quad Y = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

X e Y sono funzioni coniugate di x e y .

Infatti,

$$X + iY = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

TEOREMA. V. - Se Φ è una soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} = 0$$

e se si pone $2R = \log \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\phi}{dy} \right)^2 \right]$ e $\Theta = -\tan^{-1} \frac{\frac{d\phi}{dx}}{\frac{d\phi}{dy}}$, R e Θ saranno funzioni coniugate di x e y .

Infatti, R e Θ sono funzioni coniugate di $\frac{d\Phi}{dx}$ e di $\frac{d\Phi}{dy}$, le quali sono funzioni coniugate di x e y .

ESEMPIO. I. - Inversione

188. Come esempio del metodo generale di trasformazione, prendiamo un caso di inversione a due dimensioni. Siano O un punto fisso in un piano; OA una direzione fissa; e siano $r = OP = ae^\rho$, e $\theta = AOP$, e se x, y sono coordinate rettangolari di P rispetto a O

$$(12.0.5) \quad \left. \begin{aligned} \rho &= \log \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2} & \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ x &= ae^\rho \cos \theta & y &= ae^\rho \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

ρ e θ sono funzioni coniugate di x e y .

Se $\rho' = n\rho$ e $\theta' = n\theta$, ρ' e θ' saranno funzioni coniugate di ρ e θ . Nel caso in cui $n = -1$, abbiamo

$$(12.0.6) \quad r' = \frac{a^2}{r} \quad \theta' = -\theta$$

che corrisponde all'inversione ordinaria combinata con una rotazione di 180° della figura attorno a OA .

Inversione delle figure a due dimensioni. In questo caso, se r e r' rappresentano le distanze dei punti corrispondenti al punto O ; e ed e' le cariche totali di un corpo; S e S' gli elementi di superficie; V e V' gli elementi di volume; σ e σ' le densità superficiali; ρ e ρ' le densità di volume; ϕ e ϕ' i potenziali corrispondenti nei due sistemi

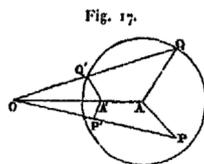
$$(12.0.7) \quad \left. \begin{aligned} \frac{r'}{r} &= \frac{S'}{S} = \frac{a^2}{r^2} = \frac{r'^2}{a^2} & \frac{\sigma'}{\sigma} &= \frac{r^2}{a^2} = \frac{a^2}{r'^2} & \frac{V'}{V} &= \frac{a^4}{r^4} = \frac{r'^4}{a^4} \\ \frac{e'}{e} &= 1 & \frac{\rho'}{\rho} &= \frac{r^4}{a^4} = \frac{a^4}{r'^4} & \frac{\phi'}{\phi} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

ESEMPIO. II - Immagini elettriche nelle figure a due dimensioni

189. Sia A il centro di un cerchio di raggio $AQ = b$; sia E la carica in A ; il potenziale in un punto qualsiasi P è

$$(12.0.8) \quad \Phi = 2E \log \frac{b}{AP}$$

e se il cerchio è la sezione di un cilindro conduttore cavo, la densità superficiale in un punto qualunque Q è $-\frac{E}{2\pi b}$.



Trasformiamo il sistema rispetto a O , ponendo

$$AO = mb \quad a^2 = (m^2 - 1) b^2$$

abbiamo allora in A' una carica uguale a quella di A , con $AA' = \frac{b}{m}$.

La densità in Q' è

$$-\frac{E}{2\pi b} \frac{b^2 - \overline{AA'}^2}{\overline{A'Q'}^2}$$

e il potenziale in un punto P' interno al cerchio è

$$(12.0.9) \quad \phi' = \phi = 2E (\log b - \log AP) = 2E (\log OP' - \log A'P' - \log m)$$

Questa distribuzione equivale alla combinazione di una carica E in A' e di una carica $-E$ in O , immagine di A' rispetto al cerchio. La carica ideale di O è uguale e contraria a quella di A' .

Se il punto P' è definito dalle sue coordinate polari riferite al centro del cerchio, e se poniamo

$$\rho = \log r - \log b \quad \rho_0 = \log AA' - \log b$$

abbiamo

$$(12.0.10) \quad AP' = be^\rho \quad AA' = be^{\rho_0} \quad AO = be^{-\rho_0}$$

e il potenziale nel punto (ρ, θ) è

$$(12.0.11) \quad \phi = E \log \left(e^{-2\rho_0} - 2e^{-\rho_0} e^\rho \cos \theta + e^{2\rho} \right) - E \log \left(e^{2\rho_0} - 2e^{-\rho_0} e^\rho \cos \theta + e^{2\rho} \right) + 2E\rho_0$$

Questo è il potenziale prodotto nel punto (ρ, θ) da una carica E posto in $(\rho, 0)$, sotto la condizione che $\Phi = 0$ quando $\rho = 0$.

In questo caso, ρ e θ sono le funzioni coniugate della 812-5) ; ρ è il logaritmo del rapporto del raggio vettore di un punto con il raggio del cerchio, e θ è un angolo.

Il centro è il solo punto singolare in questo sistema di coordinate, e l'integrale di linea $\int \frac{d\theta}{ds} ds$ preso lungo una curva chiusa è 0 o 2π , a seconda che la curva chiusa contenga oppure no il centro.

ESEMPIO. III. - Trasformazione del caso precedente da parte di Neumann¹

190. Siano α e β due funzioni coniugate qualsiasi di x e y , tali che le curve α siano linee equipotenziali, e le curve β le linee di forza in un sistema formato da un semi unità di elettricità posta nell'origine, e di un sistema elettrizzato disposto in un modo qualunque a una certa distanza dall'origine.

Supponiamo che la curva per la quale il potenziale è α_0 sia chiusa, e tale che nessuna parte del sistema elettrizzato. tranne la semi unità posta nell'origine, sia compresa nella curva.

Allora tutte le curve α comprese tra questa e l'origine saranno chiuse e circondanti l'origine: e tutte le curve β si incontreranno nell'origine e taglieranno ortogonalmente le curve α .

Le coordinate di un punto qualunque interno alla curva α_0 saranno determinate dai valori di α e β in questo punto; e se il punto si sposta nel verso positivo su una delle curve α , il valore di β aumenterà di 2π a ogni rivoluzione completa.

Supponiamo ora che la curva α_0 sia la sezione della superficie interna di un cilindro cavo di forma qualunque, mantenuto al potenziale zero, e soggetto all'azione di una carica distribuita con una densità lineare E su una linea retta proiettantesi all'origine; possiamo allora non considerare il sistema elettrizzato esterno, e abbiamo per il potenziale in un punto qualunque α interno alla curva

$$(12.0.12) \quad \phi = 2E (\alpha - \alpha_0)$$

e per la quantità di elettricità che è distribuita sulla parte della curva α_0 compresa tra i punti corrispondenti a β_1 e β_2

$$(12.0.13) \quad Q = \frac{1}{2\pi} E (\beta_1 - \beta_2)$$

Se, con questo metodo o con qualsiasi altro, abbiamo determinato la distribuzione del potenziale nel caso di una curva di sezione data, e di una carica posta in un punto dato vicino all'origine, possiamo passare al caso di una carica posta in qualsiasi altro punto, con una semplice applicazione del metodo generale di trasformazione.

Siano α_1 e β_1 i valori di α e β nel punto in cui è posta la carica; sostituendo nella (12-11) $\alpha - \alpha_0$ a ρ , $\beta - \beta_1$ a θ , troviamo per il potenziale di un punto qualunque, le cui coordinate sono α, β ,

$$(12.0.14) \quad \phi = E \log \left(1 - 2e^{\alpha+\alpha_1-2\alpha_0} \cos (\beta - \beta_1) + e^{\alpha+\alpha_1-2\alpha_0} \right) + \\ - E \log \left(1 - 2e^{\alpha-\alpha_1} \cos (\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha-\alpha_1)} \right) - 2E (\alpha_1 - \alpha_0)$$

Questa espressione del potenziale si riduce a zero quando $\alpha = \alpha_0$; essa è finita e continua all'interno della curva α , tranne nel punto (α_1, β_1) , per il quale il secondo termine diviene infinito; e, nelle vicinanze immediate, essa ha per valore limite $-2E \log r'$, dove r' è la distanza da questo punto.

¹ *Journal de Crelle*, 1861.

Siamo quindi in grado di ottenere la soluzione del problema di Green relativo alla carica di un punto qualunque interno a una curva chiusa, se conosciamo la soluzione per un altro punto.

La carica indotta sull'elemento della curva α_0 che è compresa tra i punti β e $\beta + d\beta$, da una carica E posta nel punto (α_1, β_1) , è, impiegando la notazione del § 183,

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{d\phi}{ds_1} ds_2$$

dove ds_1 è misurato verso l'interno e dove si pone $\alpha = \alpha_0$ dopo la differenziazione.

Questa diviene, dalla (12-4) del § 183,

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d\phi}{d\alpha} d\beta \quad (\alpha = \alpha_0)$$

cioè

$$(12.0.15) \quad -\frac{E}{2\pi} \frac{1 - e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}}{1 - 2e^{(\alpha_1 - \alpha_0)} \cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}} d\beta$$

Da questa espressione, possiamo trovare il potenziale in un punto qualunque (α_1, β_1) interno alla curva chiusa, quando si assegna in funzione di β il valore del potenziale in ogni punto della curva chiusa, e che in assenza di carica all'interno della curva chiusa.

Infatti, dal § 86, la parte del potenziale di (α_1, β_1) che è dovuto al fatto che una parte $d\beta$ della curva chiusa è mantenuta al potenziale V , è nV , essendo n la carica indotta su $d\beta$ da una unità di elettricità posta in (α_1, β_1) . Quindi, se V è il potenziale in un punto della curva chiusa, potenziale espresso in funzione di β , e se Φ è il potenziale nel punto (α_1, β_1) interno alla curva chiusa, quella non contenente alcuna carica

$$(12.0.16) \quad \Phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}) V d\beta}{1 - 2e^{(\alpha_1 - \alpha_0)} \cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}}$$

ESEMPIO. IV. - Distribuzione vicino al bordo di un conduttore chiuso formato da due facce piane

191. Nel caso di una faccia piana conduttrice indefinita, carica di elettricità con una densità superficiale σ_0 , abbiamo trovato per il potenziale, in un punto posto a una distanza y dal piano

$$V = C - 4\pi\sigma_0 y$$

essendo C il valore del potenziale sul conduttore stesso.

Prendiamo per asse polare una retta del piano, e passiamo alle coordinate polari: troviamo per il potenziale

$$V = C - 4\pi\sigma_0 a e^\rho \sin \theta$$

e per la quantità di elettricità distribuita su un parallelogrammo la cui base è uguale all'unità e la cui altezza, misurata a partire dall'asse, è $a e^\rho$

$$E = \sigma_0 a e^\rho$$

ESEMPIO. Poniamo ora $\rho = n\rho'$, $\theta = n\theta'$; poiché ρ' e θ' sono coniugati rispetto a ρ e θ , le equazioni

$$\begin{aligned} V &= C - 4\pi\sigma_0 a e^{n\rho'} \sin n\theta' \\ E &= \sigma_0 a e^{n\rho'} \end{aligned}$$

rappresentano una distribuzione possibile di cariche e di potenziali.

Se poniamo r per $a e^{\rho'}$, r sarà la distanza dall'asse; possiamo così mettere θ al posto di θ' per l'angolo. Avremo

$$\begin{aligned} V &= C - 4\pi\sigma_0 \frac{r^n}{a^{n-1}} \sin n\theta \\ E &= \sigma_0 \frac{r^n}{a^{n-1}} \end{aligned}$$

V è uguale a C tutte le volte che $n\theta = \pi$ o un multiplo di π .

Supponiamo che il bordo sia un angolo tra 0 e π del conduttore, dove l'inclinazione delle facce è α . Allora l'angolo del dielettrico è $2\pi - \alpha$, e, per $\theta = 2\pi - \alpha$, il punto è sull'altro faccia del conduttore. Dobbiamo quindi fare

$$n(2\pi - \alpha) = \pi \quad n = \frac{\pi}{2\pi - \alpha}$$

Allora

$$V = C - 4\pi\sigma_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{2\pi - \alpha}} \sin \frac{\pi\theta}{2\pi - \alpha}$$

$$E = \sigma_0 a \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{2\pi - \alpha}}$$

La densità superficiale σ , a una distanza qualunque r dal bordo, è

$$\sigma = \frac{dE}{dr} = \frac{\pi}{2\pi - \alpha} \sigma_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\alpha - \pi}{2\pi - \alpha}}$$

Se l'angolo è tra 0 e π , α è più piccolo di π , e la densità superficiale varia in ragione inversa di una certa potenza della distanza dal bordo; di modo che, sul bordo stesso, la densità diviene infinita e ciò benché la carica totale valutata dal bordo fino a una distanza finita qualunque sia sempre finita.

Così, quando $\alpha = 0$, il bordo è infinitamente acuto, simile alla sezione di un piano matematico. In questo caso la densità varia in ragione inversa della radice quadrata della distanza dal bordo.

Se $\alpha = \frac{\pi}{3}$, il bordo è simile a quello di un prisma equilatero, e la densità varia in ragione inversa della potenza $\frac{2}{3}$ della distanza.

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, il bordo forma un angolo retto, e la densità è in ragione inversa della radice cubica della distanza.

Se $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, il bordo è simile a quello di un prisma esagonale, e la densità è in ragione inversa della radice quarta della distanza.

Se $\alpha = \pi$, il bordo scompare, la densità è costante.

Se $\alpha = \frac{4}{3}\pi$, il bordo è simile all'interno di un prisma esagonale, e la densità è direttamente proporzionale alla radice quadrata della distanza.

Se $\alpha = \frac{3}{2}\pi$, il bordo è un angolo retto concavo, e la densità è proporzionale alla distanza dal bordo.

Se $\alpha = \frac{5}{3}\pi$, il bordo è un angolo concavo di 60° , e la densità è proporzionale al quadrato della distanza dal bordo.

In realtà, in tutti i casi dove la densità diviene infinita in un punto qualunque, vi è una scarica elettrica nel dielettrico in questo punto, così come è stato spiegato al § 55.

ESEMPIO. V. - Ellissi e iperbole

192. Abbiamo visto che se

$$(12.0.17) \quad x_1 = e^\phi \cos \psi \quad y_1 = e^\phi \sin \psi$$

x e y saranno funzioni coniugate di ϕ e ψ .

Allora se,

$$(12.0.18) \quad x_2 = e^{-\phi} \cos \psi \quad y_2 = e^{-\phi} \sin \psi$$

x_2 e y_2 saranno funzioni coniugate. Pertanto se,

$$(12.0.19) \quad 2x = x_1 + x_2 = (e^\phi + e^{-\phi}) \cos \psi \quad 2y = y_1 + y_2 = (e^\phi + e^{-\phi}) \sin \psi$$

x e y saranno pure funzioni coniugate di ϕ e ψ .

In questo caso i punti per i quali ϕ è costante giacciono nell'ellisse i cui assi sono $e^\phi + e^{-\phi}$ e $e^\phi - e^{-\phi}$.

I punti per i quali ψ è costante sono sull'iperbole i cui assi sono $2 \cos \psi$ e $2 \sin \psi$.

Sull'asse delle x , da una parte all'altra di questi limiti, abbiamo da ogni lato

$$(12.0.20) \quad \begin{array}{ll} x > 1 & \psi = 0 \quad \phi = \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\ x < -1 & \psi = \pi \quad \phi = \log \left(\sqrt{x^2 - 1} - x \right) \end{array}$$

Se quindi ϕ è una funzione potenziale, e ψ la funzione di scorrimento, abbiamo il caso di un flusso di elettricità che avviene dal lato positivo verso quello negativo dell'asse delle x , attraverso lo spazio compreso tra i punti $+1$ e -1 , essendo le parti dell'asse poste al di là di questi punti impermeabili all'elettricità.

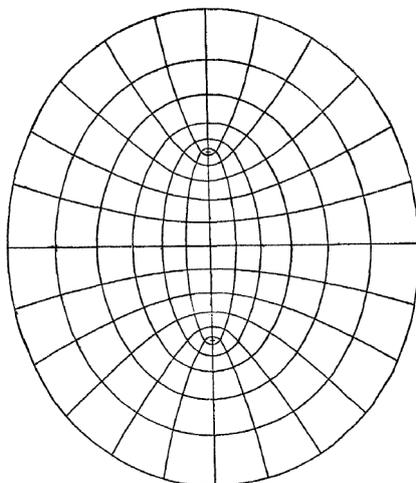
Poiché, in questo caso, l'asse delle y è una linea del flusso, lo possiamo considerare come fosse impermeabile all'elettricità.

Possiamo quindi considerare le ellissi come fossero le sezioni delle superfici equipotenziali dovute a un conduttore piatto, di lunghezza infinita, di larghezza 2, e carica di una semi unità di elettricità per unità di lunghezza.

Se prendiamo ψ come funzione potenziale, e y come funzione di flusso, il caso diviene quello di un piano infinito, nel quale si toglierebbe una banda larga 2. Da un lato, il piano è al potenziale π ; dall'altro, al potenziale zero.

Questi casi possono essere considerati come casi particolari delle superfici di secondo grado, studiati al Cap. X. La forma delle curve è data dalla tavola X.

Pl. X.



Ellissi e Iperbole cofocali

ESEMPIO. VI. - Tavola XI.

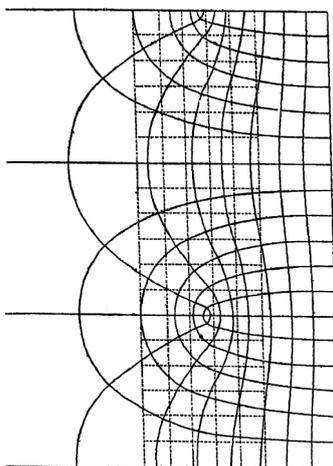
193. Consideriamo ora x', y' come funzioni di x e y definite dalle equazioni

$$x' = b \log \sqrt{x^2 + y^2} \quad x' = b \arctan \frac{y}{x}$$

x', y' saranno ancora funzioni coniugate di ϕ e ψ .

Nella tavola XI sono date le curve che risultano dalla trasformazione della tavola X per mezzo di queste nuove coordinate.

Pl. XI.



Linee di forza vicino al bordo di una piastra.

Se x', y' sono coordinate rettangolari, le proprietà dell'asse x nella prima figura apparterranno, nella seconda figura a una serie di linee parallele a x' , per le quali $y' = bn'\pi$, dove n' è un numero intero qualunque.

Su queste linee, i valori positivi di x' corrispondono ai valori di x più grandi dell'unità, e abbiamo visto che si ha per questi valori

$$(12.0.21) \quad \psi = n\pi \quad \phi = \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) = \log \left(e^{\frac{x'}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} - 1} \right)$$

I valori negativi di x' su queste stesse linee corrispondono ai valori di x più piccoli dell'unità, per i quali abbiamo visto che si ha

$$(12.0.22) \quad \phi = 0 \quad \psi = \arccos x = \arccos e^{\frac{x'}{b}}$$

Le proprietà dell'asse y della prima figura appartengono, nella seconda, a una serie di linee parallele a x' , per le quali si ha

$$(12.0.23) \quad y' = b\pi \left(n' + \frac{1}{2} \right)$$

I valori di ψ lungo queste linee è $\psi = \pi \left(x + \frac{1}{2} \right)$ per tutti i punti, positivi o negativi, e

$$(12.0.24) \quad \phi = \log \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right) = \log \left(e^{\frac{y'}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2y'}{b}} + 1} \right)$$

Le curve per le quali ϕ e ψ sono costanti possono essere tracciate direttamente, dalle loro equazioni

$$x' = \frac{1}{2}b \log \frac{1}{4} \left(e^{2\phi} + e^{-2\phi} + 2 \cos 2\psi \right)$$

$$y' = b \tan^{-1} \left(\frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{e^{\phi} + e^{-\phi}} \tan \psi \right)$$

Siccome la figura si riproduce per valori di y' differenti tra loro di πb , basta tracciarle in uno di questi intervalli.

Vi sono due casi, a seconda che ϕ o ψ cambia di segno con y' . Supponiamo che sia ϕ a cambiare di segno. Allora ogni curva per la quale ψ è costante è simmetrica rispetto all'asse x' , e lo taglia ortogonalmente in un punto posto dal lato negativo. Se partiamo da questo punto, per il quale $\phi = 0$, e se facciamo crescere ϕ , la curva, dapprima ortogonale all'asse, si flette a poco a poco, e finisce per diventare, per grandi valori di ϕ , parallela all'asse x' . Il lato positivo dell'asse x' appartiene al sistema e corrisponde a $\psi = 0$; e quando $y' = \pm \frac{1}{2}\pi b$, $\psi = \frac{1}{2}\pi$. Le figure per le quali ψ ha valori costanti, compresi tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, formano pertanto un sistema di curve che comprendono il lato positivo dell'asse x' .

Le curve per le quali ϕ ha valori costanti tagliano ortogonalmente il sistema ψ , e i valori di ϕ variano da $-\infty$ a $+\infty$. Per tutte quelle curve ϕ che sono tracciate al di sopra dell'asse x , il valore di ϕ è positivo; lunga la parte negativa dell'asse x' , il suo valore è zero; infine, per ogni curva posto al di sotto dell'asse x' , il suo valore è negativo.

Abbiamo visto che il sistema ψ è simmetrico rispetto all'asse x . Sia PQR una curva qualunque che taglia questo sistema ortogonalmente e si chiude in P e in R , sulle curve $y' = \pm \frac{1}{2}\pi b$, essendo il punto Q posto sull'asse x' ; ma, se il valore di ϕ lungo PQ è c , esso sarà $-c$ lungo QR . Ci si rende conto di questa discontinuità di ϕ con una distribuzione elettrica del genere di quella che sarà discussa al § 195.

Se ora supponiamo che questa sia ψ , e non ϕ , che cambia segno con y' , i valori di ϕ variano da 0 a ∞ . Per $\phi = 0$, abbiamo la parte negativa dell'asse x ; per $\phi = \infty$, abbiamo una perpendicolare all'asse x' posta a una distanza infinita. Lungo una linea PQR qualunque compresa tra le due precedenti, il valore di ϕ è costante e positivo.

Ogni valore ψ subisce un brusco cambiamento nel punto in cui la curva per la quale ψ è costante taglia la parte negativa dell'asse x' : il segno di ψ cambia. Si vedrà al § 197 il significato di questa discontinuità.

Le linee, che abbiamo imparato a tracciare, sono rappresentate sulla tavola XI, ridotta ai due terzi del diagramma: il terzo superiore è da sopprimere.

194. Se consideriamo ϕ come la funzione potenziale e ψ come la funzione di flusso, il caso attuale è quello di una striscia di metallo infinitamente lunga, di larghezza πb , che presenta a partire dall'origine e su una lunghezza indefinita nel verso positivo una parete non conduttrice, che divide la parte positiva della striscia in due canali distinti. Possiamo supporre che questa separazione sia prodotta da un taglio molto stretto praticato nella striscia metallica.

Se si fa circolare una corrente elettrica, entrante da una di queste parti e uscente dall'altra, l'entrata e l'uscita saranno a una distanza infinita dalla parte positiva dell'origine, e le funzioni ϕ e ψ daranno la distribuzione del potenziale e della corrente.

Se, al contrario, prendiamo ψ per il potenziale e ϕ per la funzione di flusso, ci troveremo nel caso di una corrente avente per direzione generale quella dell'asse y' , e circolante attraverso un foglio metallico nel quale sarà stato praticato un certo numero di pareti non conduttrici, parallele all'asse x' e che si estendono dall'asse y' all'infinito, nel verso negativo.

195. Possiamo applicare questi risultati a due casi importanti dell'elettrostatica.

1° Sia un conduttore a forma di un foglio piano, che presenta uno spigolo rettilineo, e illimitato dappertutto. Lo si mette nel piano xz , dalla parte positiva dell'origine e lo si dispone parallelamente a una distanza $\frac{1}{2}\pi b$ da ogni lato da questo piano, due piani paralleli indefiniti. Allora, se ψ è la funzione potenziale, il suo valore è zero per il conduttore di mezzo, e $\frac{1}{2}\pi$ per gli altri due piani.

Consideriamo la quantità di elettricità che si trova sulla parte del conduttore centrale, che si estende su un'altezza 1 nel verso di z , e su una lunghezza di $x' = a$ a partire dall'origine.

La quantità di elettricità che esiste sulla parte di questa banda che è compresa tra x'_1 e x'_2 è $\frac{1}{4\pi}(\phi_2 - \phi_1)$.

Pertanto, dall'origine fino a $x' = a$, la quantità di elettricità è

$$(12.0.25) \quad E = \frac{1}{4\pi} \log \left(e^{\frac{a}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2a}{b}} - 1} \right)$$

Se a è grande rispetto a b , questa diviene

$$(12.0.26) \quad E = \frac{1}{4\pi} \log 2e^{\frac{a}{b}} = \frac{a + b \ln 2}{4\pi b}$$

Pertanto la quantità di elettricità, distribuita su un piano limitato da uno spigolo rettilineo, è più grande che se fosse distribuita con una densità uniforme uguale a quella che esiste a una certa distanza dallo spigolo; la quantità esistente è uguale a quella che, per la stessa densità uniforme, sarebbe distribuita su un piano che si estende per una larghezza $b \ln 2$, al di là del limite effettivo del piano.

Questa distribuzione uniforme immaginaria è raffigurata dalle linee puntinate della tavola XI. Le verticali rappresentano le linee di forza; le orizzontali, le superfici equipotenziali, supponendo la densità uniforme sui due piani prolungati all'infinito in tutte le direzioni.

196. I conduttori elettrici sono talvolta formati da un piatto piano a uguale distanza da due altri piatti paralleli che si estendono da tutti i lati molto più lontano del piatto di mezzo. Se il raggio di curvatura della linea che limita il piatto di mezzo è grande, rispetto alla distanza degli altri, possiamo considerare questa curva come una retta, e approssimativamente calcolare la capacità del condensatore, supponendo che la superficie del piatto di mezzo sia aumentata da una corona di larghezza uniforme attorno alla curva limite, e supponendo ugualmente che, sul piatto così accresciuto, la densità superficiale sia uniforme e uguale a quella che è sulle parti lontane della curva limite.

Così, se S è l'aria effettiva del piatto, L la sua circonferenza, B la distanza dai grandi piatti, abbiamo

$$(12.0.27) \quad b = \frac{1}{\pi} B$$

e la larghezza della corona aggiuntiva è

$$(12.0.28) \quad a = \frac{\log 2}{\pi} B$$

di modo che l'area aumentata è

$$(12.0.29) \quad S' = S + \frac{\log 2}{\pi} BL$$

La capacità del piatto centrale è quindi

$$\frac{1}{2\pi} \frac{S'}{B} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{S}{B} + L \frac{1}{\pi} \ln 2 \right)$$

Correzione per lo spessore del piatto. Siccome il piatto di mezzo ha generalmente uno spessore che si può trascurare rispetto alla distanza dai piatti, si ottiene una rappresentazione più esatta dei fatti nel caso attuale, supponendo che la sezione del piatto intermedio corrisponde alla curva $\psi = \psi'$.

Il piatto avrà, a una certa distanza dal bordo, uno spessore circa uniforme $\beta = 2b\psi$, ma sarà arrotondato verso il bordo.

La posizione effettiva del bordo del piatto si ottiene facendo $y' = 0$, da cui

$$(12.0.30) \quad x' = b \ln (\cos \psi')$$

Il valore di ψ' su questo bordo è zero, e, nel punto per il quale $x' = 0$, essa è

$$\frac{a + b \ln 2}{b}$$

Pertanto, la quantità di elettricità distribuita sul piatto è la stessa che aggiungendo a questa piatti una corona di larghezza

$$\frac{B}{\pi} \left[\ln 2 + \ln \left(\cos \frac{\pi\beta}{2B} \right) \right]$$

da cui

$$\frac{B}{\pi} \ln \left(\cos \frac{\pi\beta}{2B} \right)$$

essendo la densità supposta avere in tutti i punti il valore che essa ha a una certa distanza dal bordo.

Densità vicino bordi. La densità superficiale in un punto qualsiasi del piatto è

$$(12.0.31) \quad \frac{1}{4\pi} \frac{d\phi}{dx'} = \frac{1}{4\pi b} \frac{e^{\frac{x'}{b}}}{\sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} - 1}} = \frac{1}{4\pi b} \left(1 + \frac{1}{2} e^{-\frac{2x'}{b}} + \frac{3}{8} e^{-\frac{4x'}{b}} - \dots \right)$$

La quantità le parentesi si avvicina rapidamente al crescere di x' , così che a una distanza dal bordo uguale a n volte la larghezza della corona α , la densità effettiva supera la densità normale di circa $\frac{1}{2^{2n+1}}$ della densità normale.

Allo stesso modo, possiamo calcolare la densità sui piani indefiniti

$$(12.0.32) \quad = \frac{1}{4\pi b} \frac{e^{\frac{x'}{b}}}{\sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} + 1}}$$

Quando $x' = 0$, la densità effettiva sta alla densità normale nel rapporto di $2^{-\frac{1}{2}}$ a 1.

Dal lato positivo, a una distanza uguale a n volte la larghezza della corona, la densità è inferiore alla densità normale di circa $\frac{1}{2^{2n+1}}$.

Dal lato negativo, a una distanza uguale a n volte la larghezza della corona, la densità è circa $\frac{1}{2^n}$ della densità normale.

Questi risultati mostrano quale grado di esattezza si può raggiungere, se si applica questo metodo a piatti di estensione limitata, presentanti irregolarità vicino ai bordi. La stessa distribuzione di stabilirà nel caso di una serie illimitata di questi piatti, equidistanti, i cui potenziali sarebbero alternativamente $+V$ e $-V$. In questo caso, dobbiamo prendere la distanza dei piatti uguale a B .

197. 2° Il secondo caso che studieremo è quello di una serie infinita di piani paralleli al piano xz , distanti tra loro di $B = \pi b$, e tutti tagliati dal piano yz , in modo da estendersi solo dal lato negativo di tale piano. Se prendiamo ϕ per funzione potenziale, possiamo considerare questi piano come conduttori a potenziale zero.

Consideriamo le curve lungo le quali ϕ è costante. Per $y' = n\pi b$, cioè sul prolungamento di ognuno dei piani, abbiamo

$$(12.0.33) \quad x' = b \log \frac{1}{2} (e^\phi + e^{-\phi})$$

Per $y' = (n + \frac{1}{2}) \pi b$, cioè nelle posizioni intermedie,

$$x' = b \log \frac{1}{2} (e^\phi - e^{-\phi})$$

Pertanto, quando ϕ è grande, la curva per la quale ϕ è costante è una linea ondulata la cui distanza media dall'asse y' è approssimativamente

$$(12.0.34) \quad a = b(\phi - \ln 2)$$

L'ampiezza delle ondulazioni di ogni lato di questa linea è

$$(12.0.35) \quad \frac{1}{2} b \log \frac{e^\phi + e^{-\phi}}{e^\phi - e^{-\phi}}$$

Quando ϕ è grande, questa espressione diviene $be^{-2\phi}$, di modo che la curva si avvicina a una retta parallela all'asse y' , a una distanza a dall'asse, dal lato positivo.

Se supponiamo un piano $x' = a$ mantenuto a un potenziale costante, mentre il sistema dei piano paralleli è mantenuto a un potenziale diverso, $b\phi = a + b \ln 2$, e, di conseguenza, la densità superficiale della carica indotta su questo piano è uguale alla densità della carica che vi sarebbe stata indotta da un piano parallelo, portato allo stesso potenziale della serie di piani, e posto a una distanza $b \ln 2$ più lontano dal bordo di questi piani paralleli.

Se B è la distanza di due piani della serie, $B = \pi b$, e la distanza addizionale è

$$(12.0.36) \quad \alpha = B \frac{b \ln 2}{\pi}$$

198. Consideriamo ora lo spazio compreso tra due superfici equipotenziali, di cui una è formata da una serie di ondulazioni parallele, mentre l'altra, corrispondente a un grande valore di ϕ , si può considerare come considerevolmente piana.

Se D è l'altezza di una ondulazione, contata dal suo punto più alto a quello più basso, troviamo per valore corrispondente di ϕ ,

$$(12.0.37) \quad \phi = \frac{1}{2} \log \frac{e^{\frac{D}{b}} + 1}{e^{\frac{D}{b}} - 1}$$

Il valore di x' alla sommità dell'onda è

$$b \log \frac{1}{2} (e^\phi + e^{-\phi})$$

Pertanto², se A è la distanza dalla sommità delle onde al piano opposto, la capacità del sistema formato dalla superficie piana e da quella ondulata è uguale a quella di un sistema di due piani alla distanza $A + \alpha'$, dove

$$(12.0.38) \quad \alpha' = \frac{B}{\pi} \ln \frac{2}{1 + e^{-\pi \frac{D}{B}}}$$

199. Se nel conduttore, la cui restante superficie è piana, si pratica un solo solco di questa forma, e se l'altro conduttore è un piano alla distanza A , la capacità di ogni conduttore diminuisce rispetto all'altro. Ma la diminuzione così prodotta è inferiore alla $n -esima$ parte della diminuzione prodotta da n scanalature simili fatte fianco a fianco; infatti, in questo ultimo caso, la forza elettrica che agisce tra i conduttori è minore che nel primo caso, di modo che l'induzione alla superficie di ogni solco è ridotta dall'azione di quelli vicini.

Siano L la lunghezza, B la larghezza, D la profondità del solco; la capacità di un'area S presa nel piano opposto al solco sarà

$$(12.0.39) \quad \frac{S - LB}{4\pi A} + \frac{LB}{4\pi(A + \alpha')} = \frac{S}{4\pi A} - \frac{LB}{4\pi A} \frac{\alpha'}{A + \alpha'}$$

Se A è grande rispetto a B o ad α' , la correzione diviene dalla (12-38)

$$(12.0.40) \quad \frac{L}{4\pi^2} \frac{B^2}{A^2} \ln \frac{2}{1 + e^{-\pi \frac{D}{B}}}$$

Per una fenditura di profondità infinita, la correzione diviene, ponendo D infinito,

$$(12.0.41) \quad \frac{L}{4\pi^2} \frac{B^2}{A^2} \ln 2$$

Per trovare la densità superficiale sulla serie di piani paralleli, dobbiamo trovare $\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{d\psi}{dx'}$, quando $\phi = 0$. Troviamo

$$(12.0.42) \quad \sigma = \frac{1}{4\pi b} \frac{1}{\sqrt{e^{-2\frac{x}{b}} - 1}}$$

La densità media sul piatto piano situato a una distanza A dai bordi della serie di piani paralleli è $\bar{\sigma} = \frac{1}{4\pi b}$. Pertanto, a una distanza $n\alpha$ dal bordo di uno di questi piani, la densità superficiale è $\frac{1}{\sqrt{2^{2n} - 1}}$ di questa densità media.

200. Cerchiamo ora di dedurre da questi risultati la distribuzione elettrica nel sistema ottenuto facendo ruotare il piano della figura attorno all'asse $y' = -R$. L'equazione di Poisson assume la forma

$$(12.0.43) \quad \frac{d^2V}{dx'^2} + \frac{d^2V}{dy'^2} + \frac{1}{R + y'} \frac{dV}{dy'} + 4\pi\rho = 0$$

²Siano Φ il potenziale del piano e ϕ quello della superficie ondulata. La quantità di elettricità distribuita sull'unità di superficie del piano è $\frac{1}{4\pi b}$. Pertanto la capacità è uguale a

$$\frac{1}{4\pi b(\Phi - \phi)} = \frac{1}{4\pi(A + \alpha')}$$

da cui

$$A + \alpha' = b(\Phi - \phi)$$

ma

$$A + b \log \frac{1}{2} (e^\phi + e^{-\phi}) = b(\Phi - \ln 2)$$

da cui

$$\alpha' = -b\phi + b \left[\ln 2 + \log \frac{1}{2} (e^\phi + e^{-\phi}) \right] = b \log (1 + e^{-2\phi}) = b \log \frac{2}{1 + e^{\frac{D}{b}}}$$

dalla (12-37).

Supponiamo che V sia qui la funzione ϕ data al § 193, e determiniamo il valore di ρ da questa equazione. Sappiamo che i primi due termini svaniscono e, di conseguenza,

$$(12.0.44) \quad \rho = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{R+y'} \frac{d\phi}{dy'}$$

Se supponiamo che oltre alla densità superficiale già studiata l'elettricità sia distribuita nello spazio secondo la legge che è stata stabilita, la distribuzione del potenziale sarà rappresentata dalle curve della tavola XI.

Si vede facilmente su questa figura che, in generale $\frac{d\phi}{dy'}$ è molto piccolo, tranne sui bordi dei piatti; la nuova distribuzione può quindi essere rappresentata approssimativamente da ciò che effettivamente esiste, cioè una certa distribuzione superficiale sui bordi dei piatti.

Se quindi prendiamo l'integrale $\iint \rho dx' dy'$ tra i limiti $y' = 0$ e $y' = \frac{\pi}{2}b$, da $x' = -\infty$ a $x' = +\infty$, avremo la carica aggiuntiva totale che risulta per una delle facce del piatto dalla sua curvatura.

Poiché $\frac{d\phi}{dy'} = -\frac{d\psi}{dx'}$, abbiamo

$$(12.0.45) \quad \int_{+\infty}^{-\infty} \rho dx' = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R+y'} \frac{d\psi}{dx'} dx' = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R+y'} (\psi_{\infty} - \psi_{-\infty}) = \frac{1}{8} \frac{1}{R+y'} \left(2 \frac{y'}{B} - 1 \right)$$

Integrando rispetto a y' , troviamo

$$(12.0.46) \quad \int_0^{\frac{B}{2}} \int_{+\infty}^{-\infty} \rho dx' dy' = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \frac{2R+B}{B} \log \frac{2R+B}{2R}$$

$$(12.0.47) \quad = -\frac{1}{32} \frac{B}{R} + \frac{1}{192} \frac{B^2}{R^2} + \dots$$

Questa è la metà della quantità totale di elettricità che dobbiamo supporre distribuita nello spazio vicino ai bordi dei piatti cilindrici, per ogni unità di circonferenza. E poiché è solo vicino ai bordi dei piatti che questa densità è apprezzabile, possiamo, senza modificare sensibilmente la sua azione sulla superficie piana opposta, supporre tutta la carica condensata alla superficie del piatto; e, calcolando l'attrazione che agisce tra questa superficie e la superficie cilindrica, possiamo supporre che questa elettricità appartiene alla superficie cilindrica.

Se non vi fosse curvatura, la carica superficiale della superficie positiva del piatto sarebbe stata, per unità di lunghezza,

$$-\int_{-\infty}^0 \frac{1}{4\pi} \frac{d\phi}{dy'} = \frac{1}{4\pi} (\psi_0 - \psi_{-\infty}) = -\frac{1}{8}$$

Pertanto, se vi aggiungiamo tutta la distribuzione precedente, bisogna moltiplicare questa carica per il fattore $\left(1 + \frac{1}{2} \frac{B}{R}\right)$ per avere la carica totale della faccia positiva.

³Nel caso di un disco di raggio R posto a uguali distanze da due piani paralleli indefiniti

³Quando abbiamo valutato, al § 200, la distribuzione totale nello spazio, sarebbe forse stato più esatto prendere, per rappresentarla, l'integrale

$$\iint \rho 2\pi (R+y') dx' dy'$$

che $-\frac{1}{32} \frac{B}{R}$ per ogni unità di circonferenza contata dall'estremità del raggio. Si arriva così alla stessa correzione del testo.

Si può anche trattare come segue il caso del disco.

Facciamo ruotare la figura del §195 attorno a una perpendicolare ai piatti, a una distanza $+R$ dal bordo del piatto centrale. Questo bordo descriverà un cerchio che sarà il bordo del disco. Come al § 200, partiamo

distanti tra loro B , si trova per la capacità del disco

$$(12.0.48) \quad \frac{R^2}{B} + 2\frac{\ln 2}{\pi}R + \frac{1}{2}B$$

Teoria dell'anello di guardia di Thomson

201. In certi elettrometri di Sir W. Thomson, una grande superficie piana è mantenuta a un certo potenziale; a una distanza a di questa superficie vi è un disco piano di raggio R , circondato da un grande anello piano con un'apertura circolare di raggio R' , concentrica al disco. Questo anello porta il nome di *anello di guardia*; così come il disco, è mantenuto al potenziale zero.

Si può considerare l'intervallo compreso tra il disco e l'anello come un solco circolare di profondità infinita e di larghezza $R' - R$. Porremo $R' - R = B$.

Allora la carica che prenderà il disco sotto l'azione del piatto carico al potenziale unitario sarà, supponendo una densità uniforme, $\frac{R^2}{4A}$.

La carica che esiste su una delle facce di un solco rettilineo di larghezza B , lunghezza $2\pi R$ e di profondità infinita, può essere valutata in base al numero di linee di forza che partono dal grande piatto e vengono ad incontrare questa faccia del solco. Riferendosi al § 197 e alla nota, si vede che questa carica è

$$\frac{1}{2}LB \times \frac{1}{4\pi b}$$

cioè

$$\frac{1}{4} \frac{RB}{A + a'}$$

poiché in questo caso $\Phi = 1$, $\phi = 0$ e pertanto $b = A + a'$.

dall'equazione di Poisson, che in questo caso sarà

$$\frac{d^2V}{dy'^2} + \frac{d^2V}{dx'^2} - \frac{1}{R - x'} \frac{dV}{dx'} + 4\pi\rho = 0$$

Supponiamo ora che V sia uguale alla funzione potenziale ψ del § 195. Ciò presuppone tra i piatti una distribuzione elettrica la cui densità di volume ρ è

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{R - x'} \frac{d\psi}{dx'}$$

La quantità totale è

$$2 \int_0^{\frac{B}{2}} \int_{-\infty}^R \rho \cdot 2\pi (R - x') dx' dy'$$

Se R è grande rispetto alla distanza dei piatti, si vedrà, esaminando le linee del potenziale della tavola XI, che questo risultato è sensibilmente uguale a

$$\int_0^{\frac{B}{2} + \infty} \int_{-\infty}^R \frac{d\psi}{dx'} dx' dy'$$

cioè $-\frac{1}{8}\pi B$.

E la distribuzione superficiale totale è, comprendendo le due facce del disco

$$\begin{aligned} 2 \int_0^R \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{d\psi}{dy'} \right)_{y'=0} 2\pi (R - x') dx' &= - \int_0^R (R - x') \left(\frac{d\phi}{dx'} \right) dx'_{y'=0} = - \int_0^R \phi_{y'=0} dx' = \\ &= -\frac{R^2\pi}{2B} - R \ln 2 + \frac{B}{\pi} \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\pi \right) + 1 \end{aligned}$$

Se quindi la distribuzione che esiste nel volume compreso tra i piatti è supposta condensata sul disco, e se la differenza dei potenziali dei piatti e del disco è $\frac{\pi}{2}$, l'espressione della capacità diviene

$$\frac{R^2}{B} + 2\frac{\ln 2}{\pi}R + \frac{1}{4}B - \frac{2}{\pi^2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\pi + 1 \right) B$$

risultato che differisce da quello che è dato nel testo di circa $\frac{B}{4}$.

Ma, poiché il solco non è rettilineo e il suo raggio di curvatura è R , bisogna moltiplicare per il fattore $\left(1 + \frac{b}{2R}\right)$.

La carica totale del disco è quindi

$$(12.0.49) \quad \frac{R^2}{4A} + \frac{1}{4} \frac{RB}{A + \alpha'} \left(1 + \frac{b}{2R}\right)$$

$$(12.0.50) \quad = \frac{R^2 + R'^2}{8A} - \frac{R'^2 - R^2}{8A} \cdot \frac{\alpha'}{A + \alpha'}$$

Il valore di α' non può essere maggiore di circa

$$\frac{B \ln 2}{\pi}$$

Se B è piccolo rispetto ad A o R , questa espressione darà una approssimazione sufficiente della carica del disco per una differenza di potenziale unitaria. Il rapporto tra A e R può essere qualunque, ma serve che i raggi del grande piatto e dell'anello di guardia superino R di numerose volte la grandezza di A .

ESEMPIO. VII. - Tavola XII.

202. Helmholtz, nella sua Memoria sul *Moto discontinuo dei fluidi*⁴, ha mostrato l'applicazione di numerose formule, dove le coordinate sono espresse in funzione del potenziale e della sua funzione coniugata.

Una di queste formule può essere applicata al caso della carica di un piatto di grandezza finita, posto parallelamente a una superficie piana infinita, collegata a terra.

Poiché

$$x_1 = A\phi \quad y_1 = A\psi$$

e anche

$$x_2 = Ae^\phi \cos \psi \quad y_2 = Ae^\phi \sin \psi$$

sono funzioni coniugate di ϕ e di ψ , le funzioni formate aggiungendo x_1 e x_2 saranno pure coniugate. Pertanto

$$\begin{aligned} x &= A\phi + Ae^\phi \cos \psi \\ y &= A\psi + Ae^\phi \sin \psi \end{aligned}$$

e ϕ e ψ sono funzioni coniugate di x e y .

Supponiamo che x e y siano coordinate rettangolari, e sia $k\psi$ il potenziale: allora $k\phi$ è coniugato di $k\psi$, essendo k una costante qualunque.

Poniamo $\psi = \pi$, allora $y = A\pi$, $x = A(\phi - e^\phi)$.

Se ϕ varia da $-\infty$ a 0 , poi da 0 a $+\infty$, x varia da $-\infty$ a $-A$ e da $-A$ a $-\infty$. Pertanto la superficie equipotenziale, per la quale $\psi = \pi$, è un piano parallelo a x , posto a una distanza $b = \pi A$ dall'origine, e che si estende da $-\infty$ a $x = -A$.

Consideriamo la parte di questo piano che si estende da $x = -(A + a)$ a $x = -A$ e da $z = 0$ a $z = c$ e supponiamo che la sua distanza dal piano xz sia $y = b = 4\pi e$ che il suo potenziale sia $V = k\psi = k\pi$.

La carica elettrica della parte di piano considerata si ottiene determinando i valori di ϕ alle sue estremità. Possiamo quindi ricavare ϕ dall'equazione

$$x = -(A + a) = A(\phi - e^\phi)$$

ϕ avrà un valore negativo ϕ_1 e uno positivo ϕ_2 , e sul bordo del piano, dove $x = -A$, $\phi = 0$.

Pertanto la carica su uno dei lati è

$$-\frac{ck\phi_1}{4\pi}$$

⁴Königl. Akad. der Wissenschaften, Berlino, 23 aprile 1868.

e sull'altro

$$\frac{ck\phi_2}{4\pi}$$

Queste due cariche sono positive, e la loro somma è

$$\frac{ck(\phi_2 - \phi_1)}{4\pi}$$

Se supponiamo che a sia grande rispetto ad A

$$\phi_1 = -\frac{a}{A} - 1 + e^{-\frac{a}{A}-1} + e^{-\frac{a}{A}-1+\dots}$$

$$\phi_2 = \log \left\{ \frac{a}{A} + 1 + \log \left(\frac{a}{A} + 1 + \dots \right) \right\}$$

Se trascuriamo i termini esponenziali di ϕ_1 , troviamo che se, sulla superficie negativa, la densità fosse uniformemente uguale a quella che sta a una certa distanza dai bordi del piano, la carica di questa superficie sarebbe inferiore a ciò che in effetti è, per una quantità uguale alla carica di una banda di larghezza $\frac{b}{\pi}$ caricata a questa densità uniforme.

La capacità totale della parte del piano considerato è

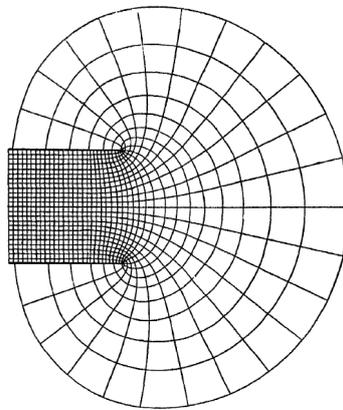
$$C = \frac{c}{4\pi^2} (\phi_2 - \phi_1)$$

La carica totale è CV , e l'attrazione verso il piano indefinito, che ha per equazione $y = 0$ e per potenziale $\psi = 0$, è

$$-\frac{1}{2}V^2 \frac{dC}{db} = V^2 \frac{ac}{8\pi b^2} \left(1 + \frac{\frac{A}{a}}{1 + \frac{a}{A} \log \frac{a}{A}} + e^{-\frac{a}{A}} + \dots \right) = \frac{V^2 c}{8\pi b^2} \left\{ a + \frac{b}{\pi} - \frac{b^2}{\pi^2 a} \log \frac{a}{A} + \dots \right\}$$

Le linee equipotenziali e le linee di forza sono raffigurate nella tavola XII.

PI. XII.



Linee di forza tra due placche

ESEMPIO. VIII. - Teoria di un reticolo di fili paralleli (tavola XIII)

203. In numerosi strumenti elettrici, si impiega un reticolo di fili metallici paralleli, per impedire a certe parti dello strumento di essere elettrizzate per induzione. Sappiamo che, quando un conduttore è interamente circondato da un contenitore metallico al suo stesso potenziale, non può essere soggetto all'induzione di alcun corpo elettrizzato esterno al contenitore; ma non si può vedere il conduttore, se è interamente circondato dal metallo, questo perché si lascia, in certi casi, un'apertura che si ricopre con un reticolo di fili metallici sottili. Esaminiamo quale effetto produce questo reticolo per diminuire l'induzione elettrica. Supporremo il reticolo formato da una serie di fili paralleli, posti in uno stesso piano, a intervalli uguali, essendo il diametro dei fili piccolo rispetto alla loro distanza, e, al contrario, essendo la distanza dalla griglia dei corpi elettrizzati da una parte, del conduttore protetto dall'altra, considerevole rispetto alla separazione dei fili.

204. Alla distanza r' dall'asse di un filo rettilineo di lunghezza indefinita, caricato con una quantità di elettricità λ per unità di lunghezza, il potenziale è

$$(12.0.51) \quad V = -2\lambda \log r' + C$$

Possiamo esprimere questo potenziale per mezzo di coordinate polari, il cui asse è a una distanza dal filo uguale all'unità. Dobbiamo prendere, in questo caso,

$$(12.0.52) \quad r'^2 = 1 - 2r \cos \theta + r^2$$

e, se supponiamo che l'asse stesso sia carico di elettricità alla densità lineare λ' , troviamo

$$(12.0.53) \quad V = -\lambda \log (r' - 2r \cos \theta - r^2) - 2\lambda' \log r + C$$

Se ora poniamo

$$(12.0.54) \quad r = e^{2\pi \frac{y}{a}} \quad \theta = \frac{2\pi x}{a}$$

allora, per la teoria delle funzioni coniugate,

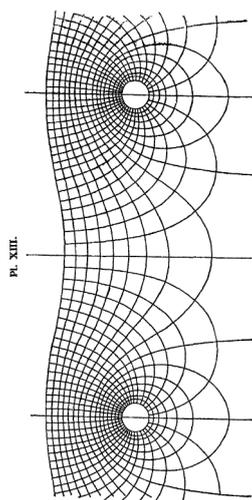
$$(12.0.55) \quad V = -\lambda \log \left(1 - 2e^{2\pi \frac{y}{a}} \cos \frac{2\pi x}{a} + e^{4\pi \frac{y}{a}} \right) - 2\lambda' \log e^{2\pi \frac{y}{a}} + C$$

dove x e y sono coordinate rettangolari. E tale sarà il valore del potenziale dovuto a una serie infinita di fili metallici sottili, paralleli all'asse z posti nel piano xz , e passante per punti dell'asse x , per i quali x è un multiplo di a .

Ognuno di questi fili è caricato alla densità lineare λ' .

Il termine dove compare λ' rappresenta una carica che produce, nella direzione y , una forza costante $\frac{4\pi\lambda'}{a}$.

La forma delle superfici equipotenziali e delle linee di forza è mostrata nella tavola XIII, per $\lambda' = 0$. Vicino ai fili, le superfici equipotenziali sono quasi cilindriche: possiamo quindi considerare la soluzione come approssimativamente vera, quando i fili sono cilindri aventi un diametro finito, ma piccolo rispetto al loro intervallo.



Linee di forza vicino a un reticolo

A una certa distanza dai fili, le superfici equipotenziali presentano forme sempre più vicine a piane paralleli al piano del reticolo.

Se nell'equazione poniamo $y = b_1$, quantità considerevole rispetto ad a , troviamo approssimativamente

$$(12.0.56) \quad V_1 = -\frac{4\pi b_1}{a} (\lambda + \lambda') + C$$

Se nell'equazione poniamo $y = -b_2$, dove b_2 è una quantità positiva molto grande rispetto ad a , troviamo approssimativamente

$$(12.0.57) \quad V_2 = -\frac{4\pi b_2}{a} \lambda' + C$$

Se c è il raggio dei fili del reticolo, essendo c piccolo rispetto ad a , possiamo trovare il potenziale del reticolo stesso, supponendo che la superficie del filo coincida con la superficie equipotenziale che taglia il piano xz a una distanza c dall'asse z . Per trovare il potenziale del reticolo, poniamo quindi $x = c$ e $y = 0$, da cui

$$(12.0.58) \quad V = -2\lambda \ln 2 \sin \frac{\pi c}{a} + C$$

205. Abbiamo ora ottenuto delle espressioni che rappresentano lo stato elettrico di un sistema formato da un reticolo di fili il cui diametro è piccolo rispetto alla loro distanza, e di due superfici piane conduttrici poste da entrambi i lati del reticolo, a distanze considerevoli rispetto alla separazione dei fili.

La densità superficiale σ_1 sul primo piano, si ricava dalla (12-56)

$$(12.0.59) \quad 4\pi\sigma_1 = \frac{dV_1}{db_1} = -\frac{4\pi}{a} (\lambda + \lambda')$$

la densità sul secondo piano, dall'equazione

$$(12.0.60) \quad 4\pi\sigma_2 = \frac{dV_2}{db_2} = \frac{4\pi}{a} \lambda'$$

Se ora poniamo

$$(12.0.61) \quad \alpha = -\frac{a}{2\pi} \ln \left(2 \sin \frac{\pi c}{a} \right)$$

e se eliminiamo λ e λ' tra le (12-56,57,58,59,60) troviamo

$$(12.0.62) \quad 4\pi\sigma_1 = \left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha} \right) = V_1 \left(1 + \frac{b_2}{\alpha} \right) - V_2 - V \frac{b_2}{\alpha}$$

$$(12.0.63) \quad 4\pi\sigma_2 = \left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha} \right) = -V_1 + V_2 \left(1 + \frac{b_1}{\alpha} \right) - V \frac{b_1}{\alpha}$$

Se i fili sono infinitamente sottili, α diviene infinito, e i termini in cui compare al denominatore tendono a zero, di modo che il caso si riconduce a quello di due piani in presenza, senza reticolo frapposto.

Se il reticolo è in contatto metallico con uno dei piani, sia con il primo, $V = V_1$, e il secondo membro dell'equazione in σ si riduce a $V_1 - V_2$. Pertanto la densità σ_1 , che è indotta sul primo piano quando il reticolo è interposto, sta alla densità che sarebbe stata indotta in assenza del reticolo, essendo il secondo piano nei due casi mantenuto allo stesso potenziale, come 1 sta a $1 + \frac{b_1 b_2}{\alpha(b_1 + b_2)}$.

Saremmo giunti allo stesso valore dall'effetto prodotto dal reticolo per diminuire l'azione elettrica della prima superficie sulla seconda, se avessimo collegato il reticolo a questa seconda superficie. Ciò è evidente, poiché b_1 e b_2 figurano allo stesso modo nell'espressione. Questa è anche una conseguenza diretta del teorema dimostrato al § 88.

L'induzione di uno dei piani elettrizzati sull'altro attraverso il reticolo è la stessa che se, levando il reticolo, la distanza tra i piani fosse portata da $b_1 + b_2$ a $b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}$.

Se i due piani sono mantenuti al potenziale zero e il reticolo portato a un potenziale dato, la carica del reticolo sta alla carica che assumerebbe una superficie piana della stessa area come $b_1 b_2$ sta a $b_1 b_2 + \alpha (b_1 + b_2)$.

Questi risultati non sono approssimati se b_1 e b_2 sono grandi rispetto ad α , e se α è grande rispetto a c . La quantità α è una lunghezza che può avere una grandezza qualunque. Essa diviene infinita al decrescere indefinito di c .

Se supponiamo $c = \frac{1}{2}a$, non vi saranno più aperture tra i fili del reticolo, e, di conseguenza, l'induzione attraverso. Dobbiamo quindi avere, in questo caso $\alpha = 0$. Ora la (12-61) dà

$$\alpha = -\frac{a}{2\pi} \ln 2 = -0,11a$$

ciò che è evidentemente falso, poiché, in nessun caso, un reticolo potrebbe cambiare il segno dell'induzione. Ma è facile raggiungere un grado di approssimazione molto migliore, nel caso di un reticolo a fili cilindrici. Indicherò solo il percorso da seguire per giungere a tale risultato.

Metodo di approssimazione. 206. Poiché i fili sono cilindrici e su ognuno di essi la distribuzione è simmetrica rispetto a un diametro parallelo alle y , il reale sviluppo del potenziale è della forma

$$(12.0.64) \quad V = C_0 \log r + \sum C_9 r^i \cos i\theta$$

dove r è la distanza di uno dei fili dall'asse, e θ l'angolo di r con y . Poiché il filo è un conduttore, V deve essere costante quando si pone r uguale al raggio. Pertanto i coefficienti di tutti i coseni moltiplicati per θ si devono annullare.

Per abbreviare, prendiamo nuove coordinate ξ, η, \dots tali che

$$(12.0.65) \quad a\xi = 2\pi x \quad a\eta = 2\pi y \quad a\rho = 2\pi r \quad a\beta = 2\pi b \dots$$

e sia

$$(12.0.66) \quad F_\beta = \log \left(e^{\eta+\beta} + e^{-(\eta+\beta)} - 2 \cos \xi \right)$$

Se facciamo

$$(12.0.67) \quad V = A_0 F + A_1 \frac{dF}{d\eta} + A_2 \frac{d^2 F}{d\eta^2} + \dots$$

potremo, assegnando valori opportuni ai coefficienti A , esprimere tutto il potenziale che è funzione di η e di $\cos \xi$, e che diviene infinito solo per $\eta + \beta = 0$ e $\cos \xi = 1$.

Quando $\beta = 0$, lo sviluppo di F in funzione di ρ e di θ è

$$(12.0.68) \quad F_0 = 2 \log \rho + \frac{1}{12} \rho^2 \cos 2\theta - \frac{1}{1440} \rho^4 \cos 4\theta + \dots$$

Per valori finiti di β l'espansione di F è

$$(12.0.69) \quad F_\beta = \beta + 2 \log \left(1 - e^{-\beta} \right) + \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \rho \cos \theta - \frac{e^{-\beta}}{(1 - e^{-\beta})^2} \rho^2 \cos 2\theta + \dots$$

Nel caso di un reticolo e due piani conduttori le cui equazioni sono $\eta = \beta_1$ e $\eta = -\beta_2$, essendo l'equazione del piano del reticolo $\eta = 0$, vi sono due serie infinite di immagini del reticolo. La prima serie lo comprende con una serie infinita di immagini poste da entrambi suoi lati, tutte uguali e ugualmente elettrizzate.

Gli assi dei cilindri immaginari sono nel piano le cui equazioni hanno la forma

$$(12.0.70) \quad \eta = \pm 2n (\beta_1 + \beta_2)$$

con n intero.

La seconda serie consiste in una serie infinita di immagini per le quali i coefficienti A_0, A_1, A_2, \dots sono uguali e di segno contrario alle stesse quantità per il reticolo stesso, mentre A_1, A_2, \dots sono uguali e dello stesso segno. Gli assi di queste immagini sono in piani le cui equazioni sono della forma

$$(12.0.71) \quad \eta = 2\beta_2 \pm 2m (\beta_1 + \beta_2)$$

con m intero.

Il potenziale dovuto a una serie finita di immagini di questo tipo varia a seconda che il numero delle immagini è pari o dispari. Pertanto il potenziale dovuto a una serie infinita è indeterminato; ma, se vi aggiungiamo la funzione $B\eta + C$, le condizioni del problema bastano a determinare la distribuzione elettrica.

Possiamo, in primo luogo, determinare i potenziali V_1 e V_2 di due piani conduttori, in funzione dei coefficienti A_1, A_2, \dots e di B e C , poi le densità σ_1 e σ_2 in un punto qualunque di questi piani. I valori medi di σ_1 e σ_2 sono dati dalle equazioni

$$(12.0.72) \quad 4\pi\sigma_1 = \frac{2\pi}{a}(A_0 - B) \quad 4\pi\sigma_2 = \frac{2\pi}{a}(A_0 + B)$$

Poi, dobbiamo sviluppare i potenziali dovuti al reticolo stesso e a tutte le immagini in funzione di ρ e dei coseni di archi moltiplicati per θ e aggiungere al risultato $B\rho\cos\theta + C$.

Allora i termini indipendenti di θ danno il potenziale V del reticolo e il coefficiente di ogni coseno d'arco multiplo di θ , essendo uguale a zero, fornisce un'equazione tra i coefficienti indeterminati.

Di modo che, si possono trovare molte equazioni per eliminare tutti i coefficienti e lasciare ancora due equazioni per determinare σ_1 e σ_2 in funzione di V_1, V_2 e V .

Queste equazioni saranno della forma

$$(12.0.73) \quad \begin{aligned} V_1 - V &= 4\pi\sigma_1(b_2 + \alpha - \gamma) + 4\pi\sigma_2(\alpha + \gamma) \\ V_2 - V &= 4\pi\sigma_1(\alpha + \gamma) + 4\pi\sigma_2(b_2 + \alpha - \gamma) \end{aligned}$$

La quantità di elettricità indotta sul piano protetto dal reticolo, mentre esiste con l'altro piano una differenza di potenziale data, è la stessa come se i piatti fossero alla distanza

$$\frac{(\alpha - \gamma)(b_1 + b_2) + b_1b_2 - 4\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}$$

invece di $b_1 + b_2$.

I valori di α e di γ sono approssimativamente i seguenti

$$(12.0.74) \quad \alpha = \frac{a}{2\pi} \left\{ \log \frac{a}{2\pi c} - \frac{5}{3} \cdot \frac{\pi^4 c^4}{15a^4 + \pi^4 c^4} + 2e^{-4\pi \frac{b_1+b_2}{a}} \left(1 + e^{-4\pi \frac{b_1}{a}} + e^{-4\pi \frac{b_2}{a}} + \dots \right) + \dots \right\}$$

$$(12.0.75) \quad \gamma = \frac{3\pi ac^2}{3a^2 + \pi^2 c^2} \left(\frac{e^{-4\pi \frac{b_1}{a}}}{1 - e^{-4\pi \frac{b_1}{a}}} - \frac{e^{-4\pi \frac{b_2}{a}}}{1 - e^{-4\pi \frac{b_2}{a}}} \right) + \dots$$

Strumenti elettrostatici

Strumenti elettrostatici

Gli strumenti che dobbiamo considerare per il momento possono essere classificati nel modo seguente:

- (1) Macchine elettriche per produrre o aumentare l'elettrizzazione;
- (2) Moltiplicatori che servono ad accrescere l'elettrizzazione in un rapporto dato;
- (3) Elettrometri, che servono a misurare i potenziali e le cariche elettriche;
- (4) 4° Accumulatori che servono a fissare cariche elettriche considerevoli.

Macchine elettriche. 207. Nella macchina ordinaria, un piatto o un cilindro di vetro ruota sfregando contro una superficie di cuoio, sulla quale si è steso un amalgama di zinco e di mercurio. La superficie del vetro si elettrizza positivamente, quella del contatto scorrevole negativamente. Allontanando l'elettricità negativa, la superficie elettrizzata del vetro prende un potenziale positivo elevato. La faccia positiva ha di fronte una serie di punte metalliche aguzze collegati al conduttore della macchina. L'elettricità positiva del vetro induce sulle punte una elettrizzazione negativa tanto più intensa quanto le punte sono più aguzze e più vicine al vetro.

Quando la macchina funziona correttamente, vi è una scarica attraverso l'aria tra il vetro e le punte e il vetro perde parte della sua carica positiva che passa alle punte, e così al conduttore principale della macchina, la quale è isolata e poi a ogni altro corpo messo a contatto elettrico con il conduttore.

La parte del vetro che avanza verso il contatto scorrevole ha così una carica positiva minore di quella che si allontana in quello stesso momento; e, di conseguenza, i contatti scorrevoli e i conduttori che gli sono collegati si elettrizzano negativamente.

La superficie di vetro fortemente positiva che si allontana dal contatto è attratta dalla carica negativa del contatto con più energia della superficie in parte scaricata che si avvicina. Le forze elettriche agiscono quindi come resistenze alle forze impiegate a far ruotare la macchina. Il lavoro speso per la rotazione della macchina è quindi maggiore di quello speso per vincere l'attrito e le altre resistenze; l'eccesso di questo lavoro serve a produrre uno stato di elettrizzazione la cui energia è equivalente a questo eccesso.

Il lavoro speso per vincere l'attrito si trasforma immediatamente in calore nel corpo sfregato. L'energia elettrica può pure trasformarsi in energie meccanica o in calore.

Se la macchina non produce energia meccanica, tutta l'energia si trasforma in calore e la sola differenza tra il calore dovuto all'attrito e quello che è dovuto all'azione elettrica è che il primo si produce sulle superfici che si sfregano e il secondo può essere prodotto nei conduttori posti a distanza¹.

Abbiamo visto che la carica elettrica della superficie di vetro è attratta dal contatto scorrevole. Se questa attrazione divenisse sufficientemente intensa, vi sarebbe scarica tra il vetro e il contatto e non tra il vetro e le punte del collettore. Per impedire ciò, si attaccano al contatto dei settori di seta che si elettrizzano negativamente e si incollano al vetro, diminuendo così il suo potenziale vicino al contatto.

¹È probabile che nei casi in cui l'energia dinamica si trasforma in calore per attrito, una parte dell'energia si trasformi dapprima in energia elettrica, e poi in calore, spendendosi l'energia elettrica nel mantenere correnti in corto circuito, vicino alle superfici sfreganti. (Si veda, Sir W. Thomson, *Sulle proprietà elettrodinamiche dei metalli*, *Phi. Trans.*, p. 650; 1856)

Il potenziale aumenta quindi in modo più graduale, quando il vetro si allontana dal contatto, e, di conseguenza, vi è in ogni punto un'attrazione minore tra la carica del vetro e il contatto scorrevole; quindi minor pericolo di una scarica diretta sul contatto.

In alcune macchine la parte mobile è in ebanite invece che di vetro, e i contatti in legno o in pelo. Allora è il contatto che è elettrizzato positivamente e il conduttore principale lo è negativamente.

L'elettroforo di Volta. 208. L'elettroforo consiste in un piatto di resina o di ebanite avvolto da un rivestimento di metallo e da una placca di metallo della stessa grandezza. Un manico isolante può essere avvitato sul dorso di uno o l'altro di questi piatti. Il piatto di ebanite è attraversato da un perno di metallo che mette a contatto il suo rivestimento metallico con il piatto pure di metallo, quando i due piatti sono a contatto.

Si elettrizza negativamente il piatto di ebanite sfregandolo con della lana o con pelle di gatto; poi si avvicina il piatto metallico all'ebanite, tenendolo per il suo manico isolante. Non passa alcuna scarica diretta dall'ebanite al metallo; ma il potenziale di questo è reso negativo per induzione, e, quando si è giunti a una certa distanza dal perno metallico, si produce una scintilla: se allora si allontana il piatto metallico, lo si trova carico positivamente e tale carica può essere trasmessa a un altro conduttore. Il rivestimento metallico del piatto di ebanite ha una carica negativa uguale e contraria a quella del piatto metallico.

Se si impiega questo strumento per caricare un condensatore o un accumulatore, uno dei piatti è posto su un conduttore a terra; l'altro piatto è allora applicato sul primo, poi sull'elettrodo del condensatore, di nuovo su primo piatto e così di seguito. Se il piatto di ebanite è quello fisso, il condensatore è carico positivamente; se è il piatto metallico, il condensatore è carico negativamente.

Il lavoro effettuato dalla mano, che separa i piatti, è sempre maggiore del lavoro dell'attrazione elettrica mentre i piatti si avvicinano: l'operazione che consiste nel caricare il condensatore comporta quindi una spesa di lavoro. Una parte di questo lavoro si ritrova nell'energia del condensatore carico; un'altra, nel calore e nel rumore della scintilla; il resto è impiegato a vincere le altre resistenze che si oppongono al movimento.

Macchine che producono elettricità per mezzo di lavoro meccanico. 209. Nelle macchine elettriche ad attrito comuni, si spende più lavoro per vincere l'attrito che per aumentare la carica. Così ogni dispositivo nel quale l'elettrizzazione è prodotta unicamente spendendo lavoro meccanico contro le forze elettriche avrà, se non un valore pratico, almeno una grande importanza scientifica. La prima macchina di questo genere sembra essere stata il duplicatore ruotante di Nicholson, che è descritto nelle *Philosophical Transactions* del 1788, "come uno strumento in cui, agendo su una manovella, si producono i due tipi di elettricità senza attrito né contatto a terra".

210. Fu grazie al duplicatore ruotante che Volta, partendo dall'elettrizzazione della pila, riuscì a ottenere una carica in grado di influenzare il suo elettrometro. Strumenti di uguale principio sono stati inventati indipendentemente da M. C.-F. Varley² e da Sir W. Thomson.

Questi strumenti sono essenzialmente formati da conduttori di forme diverse, alcuni dei quali sono fissi e altri mobili. I conduttori mobili sono detti veicoli, e quelli fissi *induttori*, *recettori* e *rigeneratori*. La forma degli induttori e dei recettori è tale che in un certo momento della loro rivoluzione i veicoli sono quasi completamente circondati da un corpo conduttore. Siccome gli induttori e i recettori non potrebbero circondare completamente i veicoli, e permettere nello stesso tempo il loro libero movimento, senza una disposizione complicata di pezzi mobili, lo strumento non è teoricamente perfetto senza una coppia di rigeneratori che raccolgono la piccola quantità di elettricità conservata dai veicoli all'uscita dai recettori.

Ma, per ora, supporremo che gli induttori e i recettori circondino completamente il veicolo, quando questo sta al loro interno: la teoria si trova allora alquanto semplificata.

²Brevetto del 27 gennaio 1860, n° 206.

Supporremo la macchina formata da due induttori A e C , da due recettori B e D , da due veicoli F e G .

Supponiamo l'induttore A carico positivamente, di modo che il suo potenziale sia A e che circondi il veicolo F che è al potenziale F . Allora, se Q è il coefficiente di induzione (contato positivamente) di A su F , la quantità di elettricità che si trova sul veicolo è

$$Q(F - A)$$

Se, mentre è circondata dall'induttore, il veicolo è messa a terra, $F = 0$, e la carica del veicolo è $-QA$, quantità negativa. Supponiamo che il veicolo F ruoti, tra il recettore B e tocchi una molla che lo mette in contatto elettrico con B . Allora, come visto al § 32, si scarica interamente, e cede tutta la sua carica negativa al recettore B .

In seguito il veicolo entra nell'induttore C che supporremo carico negativamente. Mentre vi si trova, C è messo a terra e prende, di conseguenza, una carica positiva che porta e cede al recettore D , e così di seguito.

In questo modo, se il potenziale degli induttori rimane sempre costante, i recettori B e D ricevono a ogni rivoluzione del veicolo carica successive uguali: ogni rivoluzione aumenta quindi di una quantità uguale la carica dei recettori.

Ma, se si mette a contatto l'induttore A e il recettore D , l'induttore C e il recettore B , i potenziali degli induttori crescono costantemente, e la quantità di elettricità ceduta ai recettori a ogni rivoluzione cresce costantemente.

Siano, per esempio, U il potenziale di A e D , V quello di B e C ; il potenziale del veicolo è zero quando è all'interno di A , poiché esso è a terra; la sua carica è quindi $z = -QU$. Il veicolo entra in B con questa carica, e gliela cede. Se B è la capacità di B e C , il loro potenziale passerà da V a $V - \frac{Q}{B}U$.

Se, nello stesso tempo, l'altro veicolo porta una carica $-Q'V$ da C in D , il potenziale di A e D passerà da U a $U - \frac{Q'}{A}V$, essendo Q' il coefficiente di induzione tra il veicolo e C , e A la capacità di A e D . Se quindi U_n e V_n sono i potenziali di due induttori dopo n semi rivoluzioni, U_{n+1} e V_{n+1} i loro potenziali dopo $n + 1$ semi rivoluzioni,

$$U_{n+1} = U_n - \frac{Q'}{A}V_n$$

$$V_{n+1} = V_n - \frac{Q}{B}U_n$$

Se poniamo $\frac{Q}{B} = p^2$ e $\frac{Q'}{A} = q^2$, troviamo

$$pU_{n+1} + qV_{n+1} = (pU_n + qV_n)(1 - pq) = (pU_0 + qV_0)(1 - pq)^{n+1}$$

$$pU_{n+1} - qV_{n+1} = (pU_n - qV_n)(1 + pq) = (pU_0 - qV_0)(1 + pq)^{n+1}$$

Pertanto

$$U_n = U_0 [(1 - pq)^n + (1 + pq)^n] + \frac{q}{p}V_0 [(1 - pq)^n - (1 + pq)^n]$$

$$V_n = \frac{p}{q}U_0 [(1 - pq)^n - (1 + pq)^n] + V_0 [(1 - pq)^n + (1 + pq)^n]$$

Si vede da queste equazioni che la quantità $pU + qV$ decresce costantemente, e, di conseguenza, qualunque sia lo stato dell'elettrizzazione iniziale, i recettori finiscono per avere cariche opposte tali che i potenziali di A e B stiano nel rapporto di p a $-q$.

D'altra parte, la quantità $pU - qV$ cresce costantemente; di conseguenza, per quanto piccola sia all'origine la quantità di pU è superiore o inferiore a qV , questa differenza cresce in progressione geometrica a ogni rivoluzione finché la forza elettromotrice diviene assai grande per trionfare sull'isolamento dello strumento.

Si possono impiegare per diversi usi strumenti questo tipo:

per fornire in abbondanza elettricità ad alto potenziale; ciò che faceva la grande macchina di M. Valery;

per regolare la carica di un condensatore; è il caso nell'elettrometro di Thomson, la cui carica può essere aumentata o diminuita in qualche giro di una macchina molto piccola di questo tipo, che si chiama per questa ragione il *Replenisher*;

per moltiplicare piccole differenze di potenziale. Gli induttori possono essere caricati dapprima a un potenziale estremamente basso, quello, per esempio, di una coppia termoelettrica; poi, girando la macchina, si moltiplica questa differenza di potenziale in modo continuo, fino a poterlo misurare con un comune elettrometro. Se si è determinato sperimentalmente in quale rapporto cresce questa differenza a ogni giro della macchina, la forza elettromotrice iniziale che ha caricato gli induttori si può dedurre dal numero di giri fatti e dall'elettrizzazione finale.

Nella maggior parte di questi strumenti, i veicoli ruotano attorno ad un asse, e vengono così a porse nella posizione opportuna. I contatti si stabiliscono per mezzo di molle poste in modo da toccare i veicoli nel momento voluto.

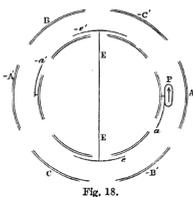
211. ma sir W. Thomson³ ha costruito una macchina destinata a moltiplicare le cariche elettriche, nella quale i veicoli sono gocce cadenti dall'interno dell'induttore in un recettore isolato. Il recettore riceve così un afflusso continuo di elettricità di segno contrario a quello dell'induttore. Se l'induttore è elettrizzato positivamente, il recettore riceve una carica costantemente crescente di elettricità negativa.

L'acqua sfugge dal recettore mediante un imbuto il cui becco è quasi interamente circondata dal metallo del recettore. Le gocce cadono quindi da questo becco, quasi interamente scaricato di elettricità. Un altro induttore e un altro recettore di costruzione simile sono disposti in modo che l'induttore di un sistema sia collegato al recettore dell'altro. La carica dei recettori cessa allora di aumentare in modo costante, ma cresce in progressione geometrica con il tempo; le cariche di due recettori sono di segno contrario. Le cariche continuano così a crescere, finché, durante la loro caduta, le gocce sono assai distanti dalla loro direzione per l'azione elettrica, per cadere al di fuori del recettore, o anche andare a colpirlo.

In questo strumento, l'energia della carica è presa dall'energia delle gocce che cadono.

212. Diverse altre macchine sono state costruite, nelle quali si usa il principio dell'induzione elettrica. La più significativa tra di loro è la macchina di Holtz, dove il veicolo è un piatto di vetro verniciato alla gomma lacca, e dove gli induttori sono pezzi di cartone. Si impedisce alle scintille di passare tra le parti dello strumento, ponendo due piatti di vetro da una parte e dall'altro del piatto rotante che rappresenta il veicolo. Questa macchina è molto potente, e molto poco sensibile alla condizione atmosferica. Il principio è lo stesso di quello del duplicatore rotante e di altri strumenti dedotti da questa stessa idea; ma, siccome il veicolo è un piatto isolante, e gli induttori conduttori imperfetti, la spiegazione completa del funzionamento della macchina è più difficile che nel caso in cui i veicoli sono corpi conduttori che si caricano e scaricano in punti stabiliti.

213. Nelle macchine elettriche, precedentemente descritte, si producono scintille tutte le volte che il veicolo viene a contatto con un conduttore che è un potenziale diverso dal suo (fig. 18).



Abbiamo mostrato che, tutte le volte che è così, vi è perdita di energia; di conseguenza tutto il lavoro impiegato a ruotare la macchina non è trasformato in elettricità sotto forma utile, ma una parte si perde nella produzione di calore e di rumore delle scintille elettriche.

³Proc. R. S., 20 giugno 1867.

Mi è parso così desiderabile far vedere come si potrebbe costruire una macchina elettrica esente da questa perdita di rendimento. Non la presento come forma pratica di macchina; voglio soltanto mostrare come, per evitare le perdite di lavoro, si potrebbe applicare alle macchine elettriche ciò che si chiama un *rigeneratore* nelle macchine termiche.

Nella figura A, B, C, A', B', C' rappresentano conduttori cavi, fissi, disposti in modo che il veicolo P passi successivamente all'interno di ognuno di essi. Di questi conduttori A, A' e B, B' circondano quasi completamente il veicolo, quando è nel mezzo del suo passaggio; C, C' non lo ricoprono altrettanto.

Supporremo che A, B, C siano collegati a una bottiglia di Leyda di grande capacità a potenziale V , e che A', B', C' siano collegati a un'altra bottiglia $-V'$.

P è uno dei veicoli, che ruota da A verso C' , ecc., e nella sua corsa, tocca molle collegate, a e a' rispettivamente in A e A' ed e, e' a terra.

Supponiamo che, quando il veicolo P è nel mezzo di A , il coefficiente di induzione tra P e a sia $-A$.

In questa posizione, la capacità di P è maggiore di A , poiché non è completamente circondata dal recettore A . Sia $A + a$ questa capacità.

Allora, se U è il potenziale di P e V quello di A , la carica di P è $(A + a)U - AV$.

Mettiamo P a contatto con la molla a , mentre si trova nel mezzo di A ; il potenziale di P sarà V come quello di A , la sua carica sarà quindi aV .

Se ora P abbandona la molla a , trasporta la carica aV . Quando P lascia A , il suo potenziale diminuisce e diminuisce ancora di più quando il veicolo è sottoposto all'azione dell'induttore C' e la sua capacità $C' + c'$ e se U è il potenziale di P , la carica di P è

$$(C' + c')U + C'V' = aV$$

se

$$c'V' = aV$$

in questo punto il potenziale di U si riduce a zero.

Supponiamo che in questo punto P entri in contatto con la molla c' che è a terra. Poiché il potenziale di P è uguale a quello della molla, non vi sarà scintilla nel momento del contatto.

Questo conduttore C' che permette di mettere il veicolo a terra, senza che vi sia scintilla, corrisponde alla disposizione detta *rigeneratore* nelle macchine termiche. Lo chiameremo pertanto un *rigeneratore*.

Supponiamo che P continui a muoversi e rimanga a contatto con la molla e' , fino ad arrivare nel mezzo dell'induttore B , il cui potenziale è V . Se $-B$ è il coefficiente di induzione tra P e B in questo punto, siccome d'altra parte $U = 0$, la carica di P è $-BV$.

Quando P lascia la molla a terra, porta questa carica con sé, Mentre si sposta dall'induttore positivo B verso il recettore negativo A' , il suo potenziale è negativo e va crescendo, e, se conserva la carica, il suo potenziale sarà nel mezzo di A'

$$-\frac{A'V' + BV}{A' + a'}$$

e se BV è maggiore di $a'V'$, il suo valore numerico sarà più grande di quello di V' . Pertanto esiste, prima della metà di A' , un punto dove P ha il potenziale $-V'$. In questo punto, mettiamolo a contatto con la molla a' del recettore negativo. Non vi sarà scintilla, poiché i due corpi sono allo stesso potenziale. Facciamo muovere P fino alla metà di A' , sempre a contatto con la molla a' , e, di conseguenza, sempre allo stesso potenziale di A' : durante questo movimento, P dà ad A' una carica negativa. Nel mezzo di A' , lascia la molla e trasporta una carica $-a'V'$ verso il rigeneratore positivo C , dove tocca il contatto a terra c , e dove il suo potenziale si riduce a zero. Poi scorre lungo questa molla fino all'induttore negativo B' , prende durante questo movimento una carica negativa $B'V'$, che finisce per cedere al recettore positivo A ; e il ciclo delle operazioni ricomincia.

Durante questo ciclo, il recettore positivo perde una carica aV e guadagna una carica $B'V'$. Pertanto l'aumento totale di elettricità positiva è

$$B'V' - aV$$

L'analogo aumento totale per l'elettricità negativa è

$$BV - a'V'$$

Se si dà agli induttori una forma tale che siano quasi come la superficie del veicolo che gli permette la condizione di mantenere le parti isolate, si rende B e B' grandi; e si fa il recettore in modo che circondi quasi interamente il veicolo quando si trova in queste parti, a e a' divengono molto piccoli, e la carica delle due bottiglie di Leyda aumenta a ogni rotazione.

Le condizioni che devono soddisfare i recettori sono

$$C'V' = aV \quad CV = a'V'$$

e, poiché a e a' sono molto piccoli, i rigeneratori non hanno bisogno di essere molto grandi e molto vicini al veicolo.

Elettrometri ed elettroscopi. 214. Un elettrometro è uno strumento per mezzo del quale si può misurare la carica e il potenziale elettrico. Si chiamano elettroscopi gli strumenti che possono rivelare l'esistenza di cariche elettriche o differenze di potenziale, ma che non sono in grado di fornire misure numeriche.

Un elettroscopio sufficientemente sensibile può servire nelle misure elettriche, purché si possa ridurre la misura alla constatazione dell'assenza di una carica. Per esempio, se abbiamo due corpi elettrizzati A e B , possiamo impiegare il metodo descritto nel Cap. I; per determinare quale è quello dei due corpi che ha la carica maggiore, mettiamo il corpo A su un supporto isolante, e mettiamolo poi in un contenitore chiuso e isolato C . Mettiamo C a terra, poi isoliamolo di nuovo: non vi sarà più carica esterna su C . Togliamo ora A , e mettiamo B all'interno di C , poi osserviamo con l'elettroscopio lo stato elettrico di C . Se la carica di B è uguale a quella di A , non vi è elettrizzazione; ma, se essa è maggiore o minore, vi sarà una carica dello stesso tipo di B , o di tipo contrario.

Questi metodi, dove ciò che si deve osservare, è la non esistenza di qualche fenomeno, sono detti *metodi di riduzione a zero*. Essi richiedono soltanto uno strumento in grado di rivelare l'esistenza del fenomeno.

In un'altra classe di strumenti destinati a registrare i fenomeni, si può fare affidamento allo strumento per dare sempre la stessa indicazione, quando la quantità da registrare assume lo stesso valore; ma le letture fatte sulla scala dello strumento non sono proporzionali ai valori della quantità, e la relazione tra queste letture e i valori corrispondenti della quantità è incognita: si sa soltanto che l'uno è una funzione dell'altro. A questa classe appartengono parecchi elettrometri basati sulla repulsione che si esercita tra le parti dello strumento che hanno cariche simili. L'utilità di questi strumenti è nel prendere nota dei fenomeni, non di misurarli. Invece dei valori reali della quantità da misurare, si ottiene una serie di numeri che possono più tardi servire a determinare valori veri, quando un opportuno studio della scala dello strumento ha permesso di stilare una Tavola di corrispondenza.

In una classe di strumenti ancora più perfetti, le letture sono proporzionali alle quantità da misurare; per fare una misura completa delle quantità, basta quindi conoscere il coefficiente per il quale moltiplicare la lettura fatta sulla scala per avere il valore vero della quantità.

Si chiamano *strumenti assoluti* quelli che sono costruiti in modo da contenere in se stessi tutto quanto è necessario a determinare i valori veri delle quantità.

Bilancia di torsione di Coulomb. 215. Un grande numero di esperienze con le quali Coulomb ha stabilito le leggi fondamentali dell'elettricità sono state fatte misurando la forza che agisce tra due piccole sfere elettrizzate, una delle quali è fissa e l'altra si mantiene in equilibrio sotto l'azione di due forze, l'azione elettrica che si esercita tra le due sfere e l'elasticità della torsione di un filo di vetro o di metallo (si veda § 38).

Una bilancia di torsione consiste in un'asta di gomma lacca sospesa a filo sottile di metallo o di vetro, e portante alle sue estremità una piccola sfera di midollo di sughero, dorato e compatto. Nella sua parte superiore, il filo di sospensione è fissato all'asse verticale di un indice che si può far ruotare su un cerchio graduato orizzontale, in modo da torcere l'estremità superiore del filo di un numero qualunque di gradi attorno al suo asse.

Tutto lo strumento è racchiuso in una gabbia; un'altra piccola sfera è montata su un'asta isolante, in modo che la si possa caricare, introdurla nella gabbia tramite un foro e porla in modo che il suo centro coincida con un punto determinato posto sul cerchio orizzontale che descrive la sfera sospesa. La posizione della sfera sospesa si determina per mezzo di un cerchio graduato impresso sulla gabbia cilindrica dello strumento.

Supponiamo le due sfere cariche e quella sospesa in equilibrio in una posizione nota, tale che l'asta di torsione formi un angolo θ con il raggio passante per il centro della sfera fissa. La distanza dei centri è allora $2a \sin \frac{\theta}{2}$, essendo a il raggio dell'asta di torsione; e se F è la forza che agisce tra le sfere, il momento di questa forza rispetto all'asse di torsione è $Fa \cos \frac{\theta}{2}$.

Scarichiamo completamente le due sfere, e sua ora ϕ l'angolo che forma l'asta di torsione nella sua posizione di equilibrio con il raggio passante per il centro della sfera fissa.

L'angolo di cui la forza elettrica ha fatto ruotare l'asta di torsione è $\theta - \phi$, e se M è il momento di elasticità di torsione del filo, avremo l'equazione

$$Fa \cos \frac{\theta}{2} = M (\theta - \phi)$$

Se quindi possiamo conoscere M , possiamo determinare la forza F che agisce tra le sfere alla distanza $2a \sin \frac{\theta}{2}$.

Per trovare il momento di torsione M , siano I il momento di inerzia dell'asta di torsione, T la durata di una oscillazione doppia dell'asta sotto l'azione dell'elasticità di torsione: allora

$$M = 4\pi^2 \frac{I}{T^2}$$

In tutti gli elettrometri, è della massima importanza sapere quale forza si misura. Ora la forza che agisce sull'asta sospesa è dovuta in parte all'azione diretta della sfera fissa, ma in parte pure all'elettrizzazione delle pareti della gabbia, se queste sono elettrizzate.

Se la gabbia è in vetro, è impossibile determinare quale è l'elettrizzazione della sua superficie, se non tramite misure fatte in ogni punto con molte difficoltà. Ma se la gabbia è di metallo, o se una gabbia di metallo circondante completamente lo strumento è posto come uno schermo tra il vetro e le sfere, l'elettrizzazione della superficie interna dello schermo dipenderà solo dall'elettrizzazione delle sfere, e queste saranno interamente sottratte all'influsso dell'elettrizzazione del vetro. In questo modo si può eliminare ogni incertezza dovuta all'azione della gabbia.

Per fornire un esempio nel quale si possano calcolare tutti gli effetti, supponiamo che la gabbia sia una sfera di raggio b , e che il suo centro coincida con il centro del movimento dell'asta di torsione; sia a la lunghezza di questa asta; siano E ed E_1 le cariche della due sfere, θ l'angolo delle loro posizioni, a_1 la distanza tra la sfera fissa e il centro, e r la distanza delle due piccole sfere.

Trascuriamo per ora l'effetto dell'induzione sulla distribuzione elettrica alla superficie delle piccole sfere; la forza che agisce tra esse sarà repulsiva $\frac{EE_1}{r^2}$ e il momento di questa forza rispetto a un asse verticale passante per il centro sarà

$$\frac{EE_1 a a_1 \sin \theta}{r^2}$$

L'immagine di E_1 dovuta alla superficie sferica della gabbia è un punto sullo stesso raggio a una distanza $\frac{b^2}{a_1}$ e avente una carica $-E_1 \frac{b}{a_1}$; il momento dell'attrazione tra P e questa immagine,

rispetto all'asse di sospensione, è

$$EE_1 \frac{b}{a_1} \frac{a \frac{b^2}{a_1} \sin \theta}{\left\{ a^2 - 2 \frac{ab^2}{a_1} \cos \theta + \frac{b^4}{a_1^2} \right\}^{\frac{3}{2}}} = EE_1 \frac{aa_1 \sin \theta}{b \left\{ 1 - 2 \frac{aa_1}{b^2} \cos \theta + \frac{a^2 a_1^2}{b^4} \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

Se b , raggio della gabbia sferica, è grande rispetto ad a e a_1 , distanze delle sfere dal centro, si può trascurare il secondo e il terzo termine del fattore che sta al denominatore. Il momento totale che tende a far ruotare l'asta di torsione si può allora scrivere

$$EE_1 aa_1 \sin \theta \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3} \right) = M (\theta - \phi)$$

Elettrometri per la misura dei Potenziali. 216. In tutti gli elettrometri, la parte mobile è un corpo carico di elettricità a un potenziale differente da quello di certi corpi fissi che lo circondano. Se, come nel metodo di Coulomb, si impiega un corpo isolato avente una certa carica, è la carica che è l'oggetto diretto della misura. Possiamo tuttavia collegare con dei fili sottili le sfere dell'elettrometro di Coulomb a diversi conduttori. La carica delle sfere dipenderà allora dal potenziale di tali conduttori e dal potenziale della gabbia dello strumento. La carica di ogni sfera sarà circa uguale al prodotto del suo raggio per l'eccesso del suo potenziale rispetto a quello della gabbia, a condizione che i raggi delle sfere siano piccoli rispetto alla distanza delle sfere tra loro, alla parete o all'apertura della gabbia.

Ma la disposizione dello strumento di Coulomb non è troppo appropriata per misure di questo tipo: infatti, se la differenza dei potenziali è piccola, la forza che agisce tra le sfere opportunamente distanziate è molto piccola. Una forma più conveniente è quella dell'elettrometro a piatto attratto. Fu Sir W. Snow Harris⁴ che costruì i primi elettrometri basati su questo principio. Dopo, Sir W. Thomson⁵ ha portato ad un alto livello di perfezione sia la loro teoria che la loro costruzione.

Quando due dischi a potenziali diversi sono posti l'uno di fronte all'altro a una piccola distanza, vi è sulle superfici di fronte una distribuzione pressoché uniforme e una carica molto piccola sul retro di tali dischi, purché non vi sia nelle vicinanze un altro conduttore o un corpo elettrizzato. La carica del disco positivo è all'incirca proporzionale alla sua superficie e alla differenza di potenziale dei due dischi e inversamente proporzionale alla distanza tra questi dischi.

Se quindi si prendono dischi di grande superficie, e si rende il loro scostamento molto piccolo, una differenza di potenziale piccola potrà originare una forza attrattiva misurabile.

Si è presentata (§ 202) la teoria matematica della distribuzione elettrica su due dischi così disposti; ma, siccome è impossibile fare la gabbia dello strumento tanto grande da poter supporre i dischi isolati nello spazio infinito, non è facile interpretare numericamente i risultati forniti dallo strumento preso sotto questa forma.

217. Uno dei principali perfezionamenti apportati a questo strumento da Sir W. Thomson consiste nell'aver aggiunto un anello di guardia al disco attratto.

Invece di sospendere interamente uno dei dischi e di determinare la forza che agisce su di esso, si separa dal resto la parte centrale di questo disco usandolo come disco attratto, restando l'anello esterno che forma il resto del disco fisso. Di modo che, si misura la forza solo sulle parti del disco dove è più uniforme e il difetto di uniformità della distribuzione sui bordi non ha più importanza, poiché si produce sull'anello di guardia e non sulla parte sospesa del disco (fig. 19).

⁴*Phil. Trans.*, 1834.

⁵Si veda un eccellente Rapporto di Sir W. Thomson Sugli elettrometri (*Report of the British Association*, Dundee, 1867)

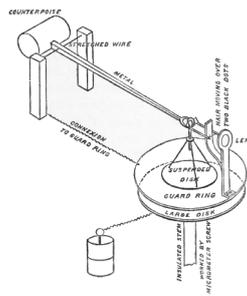


Fig. 19.

Inoltre, collegando l'anello di guardia ad un contenitore metallico che contiene il retro del disco attratto e tutto il suo sistema di sospensione, si rende impossibile l'esistenza di una carica sul retro del disco, poiché esso fa allora parte della superficie interna di un conduttore cavo che è interamente allo stesso potenziale.

L'elettrometro assoluto di Thomson consiste essenzialmente di due piatti paralleli a potenziali differenti; uno di essi è fatto in modo tale che una certa superficie, nessun punto della quale è vicino ai bordi del piatto, è mobile sotto l'azione della forza elettrica. Supponiamo, per fissare le idee, che il disco attratto e il suo anello di guardia siano al di sopra del disco fisso. Questo è sempre orizzontale, montato su un'asta isolante, e può subire, per mezzo di una vite micrometrica, un movimento verticale misurabile.

L'anello di guardia è così grande come il disco fisso; la sua superficie inferiore è esattamente piana e parallela al disco fisso. Sull'anello di guardia è montato un giogo di bilancia molto sensibile, al quale è sospeso un disco mobile molto leggero che riempie quasi esattamente l'apertura circolare dell'anello di guardia, senza tuttavia sfregare contro di esso. La superficie inferiore del disco sospeso deve essere esattamente piana, e bisogna avere un mezzo per riconoscere quando il suo piano coincide con il piano della superficie inferiore dell'anello di guardia, in modo da non formare con esso un solo piano, interrotto soltanto dall'intervallo stretto che separa il disco sospeso dall'anello di guardia.

A tale scopo, si tratta di agire sulla vite del disco inferiore finché è a contatto con l'anello di guardia, poi si lascia riposare su di esso il disco sospeso, la cui superficie inferiore è allora nello stesso piano di quello dell'anello di guardia. La posizione del disco mobile, rispetto all'anello di guardia, è allora definita da un sistema di riferimento. In genere, Sir W. Thomson impiega a tale scopo un filo nero fissato alla parte mobile, e che si muove verticalmente con esso rispetto a due punti neri segnati su un fondo di smalto bianco: si osserva il filo contemporaneamente in questi due punti, per mezzo di una lente piana convessa, il cui lato piano è girato verso l'occhio. Se, attraverso tale lente, si vede il filo diritto e nel mezzo dell'intervallo dei due punti neri, si che che è in una *posizione di puntamento*: ciò significa che il disco sospeso con il quale si muove è nella posizione voluta, per quanto riguarda l'altezza. Ci si assicura che il disco sospeso sia orizzontale, confrontando le due parti dell'immagine di un oggetto visto per riflessione sulla superficie superiore del disco sospeso e su quella dell'anello di guardia.

Il giogo della bilancia è disposto in modo tale che sospendendo un peso noto posto nel mezzo del disco, questo disco è in equilibrio nella sua posizione di puntamento, essendo l'insieme della strumentazione completamente scaricata dalla messa a contatto metallico di tutte le sue parti. Una gabbia metallica è posta sull'anello di guardia, in modo da contenere la bilancia e il disco sospeso, lasciando delle aperture sufficienti per vedere i riferimenti.

L'anello di guardia, la gabbia e il disco sospeso sono in contatto metallico, ma sono isolati dalle altre parti dello strumento.

Supponiamo ora che si debba misurare la differenza di potenziale dei due conduttori. Si collegano con dei fili metallici i due conduttori, uno al disco superiore, l'altro al disco inferiore, si toglie il peso dal disco sospeso e si sposta il disco inferiore per mezzo della vite micrometrica fino a che l'attrazione elettrica porta il disco sospeso nella sua posizione di puntamento. Si sa allora che l'attrazione dei dischi è uguale al peso che porta il disco nella sua posizione di

puntamento.

Se W è il valore numerico del peso, g la forza di gravità, la forza è Wg ; e se A è la superficie del disco sospeso, D la distanza dei dischi e V la loro differenza di potenziale⁶,

$$Wg = \frac{V^2 A}{8\pi D^2} \quad V = D \sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}$$

Se il disco sospeso è circolare e di raggio R e se il raggio dell'apertura dell'anello di guardia è R'

$$A = \frac{1}{2}\pi (R^2 - R'^2) \quad V = 4D \sqrt{\frac{gW}{R^2 + R'^2}}$$

218. Vi è sempre una certa incertezza nella determinazione della lettura del micrometro che corrisponde a $D = 0$; e, siccome un errore sulla posizione del disco diviene tanto più importante quanto D è più piccolo, Sir W. Thomson preferisce riportare tutte queste misure alla misura delle differenze di forza elettromotrice V . Così, se V e V' sono due potenziali, e D e D' le corrispondenti distanze,

$$V - V' = (D - D') \sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}$$

Così, per misurare la forza elettromotrice di una pila, si impiegano due elettrometri.

Per mezzo di un condensatore, la cui carica è mantenuta con un alimentatore, se è necessario, si mantiene a un potenziale costante il piatto inferiore dell'elettrometro principale. Si verifica che così è. collegando il piatto inferiore dell'elettrometro principale al piatto inferiore di un elettrometro ausiliario il cui disco sospeso è messo a terra. La distanza tra i piatti dell'elettrometro secondario e la forza necessaria per portare nella posizione di puntamento il suo disco sospeso sono costanti; se quindi aumentiamo il potenziale del condensatore finché l'elettrometro secondario è nella posizione di puntamento, sappiamo che in quel momento il potenziale del disco inferiore dell'elettrometro principale supera il potenziale della terra di una quantità costante che possiamo chiamare V .

Se ora mettiamo a terra il polo positivo della pila e se colleghiamo il suo elettrodo negativo al disco sospeso dell'elettrometro principale, la differenza di potenziale dei due dischi sarà $V + v$, dove v è la forza elettromotrice della pila. Sia D la lettura del micrometro in questo caso; sia D' la lettura quando il disco sospeso è a terra; si ha

$$v = (D - D') \sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}$$

Si può in tal modo misurare all'elettrometro una forza elettromotrice v , lasciando i dischi a distanze convenienti per la misura; poiché, se la distanza è troppo piccola, un piccolo cambiamento

⁶Indichiamo con R il raggio del disco sospeso, con R' quello dell'apertura dell'anello di guardia: la larghezza dello spazio anulare che separa il disco dall'anello è $B = R' - R$.

Se D è la distanza del disco sospeso dal grande disco fisso, e V la differenza dei loro potenziali, dallo studio fatto al § 201, la quantità di elettricità distribuita sul disco sospeso sarà

$$Q = V \left\{ \frac{R^2 + R'^2}{8D} - \frac{R'^2 - R^2}{8D} \frac{\alpha}{D + \alpha} \right\}$$

dove $\alpha = B \frac{\ln 2}{\pi}$ o $\alpha = 0,220635 (R' - R)$.

Se la superficie dell'anello di guardia non è esattamente nel piano della superficie del disco sospeso, supponiamo che la distanza del disco fisso dall'anello di guardia sia, non più D , ma $D + z = D'$; risulta, dallo studio fatto al § 225, che vi è sui bordi del disco una carica addizionale dovuta alla sua altezza z al di sopra della superficie generale dell'anello di guardia. Pertanto, in questo caso, la carica totale è circa

$$Q = V \left\{ \frac{R^2 + R'^2}{8D} - \frac{R'^2 - R^2}{8D} \frac{\alpha}{D + \alpha} + \frac{R + R'}{D} (D' - D) \ln \frac{4\pi (R + R')}{D' - D} \right\}$$

dove R è il raggio del disco sospeso, R' il raggio dell'apertura dell'anello di guardia, D la distanza del disco fisso dall'anello di guardia, $\alpha = 0,220635 (R' - R)$.

Se α è piccolo rispetto a D , potremo trascurare il secondo termine e, se $D' - D$ è piccolo, il terzo.

nella distanza assoluta produce un grande cambiamento nella forza, poiché la forza varia in ragione inversa del quadrato della distanza; e un errore sulla distanza assoluta produce un grande errore sul risultato, a meno che la distanza non sia molto grande rispetto ai valori estremi che può raggiungere l'errore sulla vite micrometrica.

L'effetto di piccole imperfezioni nella forma delle superfici dei dischi e dell'intervallo che li separa decresce in ragione inversa del cubo o delle potenze maggiori della distanza; qualunque sia la forma di una superficie regolare le cui asperità sono tangenti a una superficie piana, l'effetto elettrico, a una distanza considerevole rispetto all'altezza delle asperità, è la stessa di quella di un piano posto a una certa distanza dietro al piano dei vertici delle asperità (si veda i § 197 e 198).

Per mezzo di una carica ausiliaria, controllata dall'elettrometro ausiliario, ci si può assicurare uno distanziamento opportuno dei dischi.

L'elettrometro ausiliario può essere una costruzione più semplice, e non comportare il mezzo di determinare le forze di attrazione in misura assoluta; basta che assicuri una carica costante. Un simile elettroscopio può essere detto *elettrometro misuratore*.

Il metodo che consiste nell'impiegare una carica ausiliaria, oltre a quella da misurare, è detto metodo *eterostatico di elettrometria*, in opposizione al metodo idiostatico, dove ogni effetto è prodotto dalla carica da misurare.

In numerosi modelli di elettrometri a piatto attratto, questo è all'estremità dell'asta; questa è supportata da un filo di platino che passa per il suo centro di gravità ed è mantenuto teso da una molla. L'altra estremità dell'asta porta il filo nella sua posizione di puntamento, facendo variare la distanza dei piatti e riportando così la forza di attrazione elettrica a un valore costante. In generale, in questi elettrometri, questa forza non è determinata in misura assoluta, ma si sa che è costante, purché l'elasticità di torsione del filo di platino non cambi.

L'insieme dello strumento è posto all'interno di una bottiglia di Leyda, la cui superficie interna è caricata e collegata al disco attratto e all'anello di guardia. L'altro disco, che si manovra con la vite micrometrica, è dapprima a terra, poi collegato al conduttore di cui si deve misurare il potenziale. La differenza delle letture, moltiplicata per una costante da determinare per ogni elettrometro, dà il potenziale richiesto.

219. Gli elettrometri descritti non sono automatici; ad ogni osservazione, è necessario che l'operatore faccia la regolazione della vite micrometrica, o qualche altra operazione. Essi non possono servire come strumenti registratori, i quali devono essere messi nella posizione voluta. Questa condizione è verificata nell'elettrometro a quadranti di Thomson.

Il principio sul quale è basato questo strumento si può riassumere nel modo seguente:

A e B sono due conduttori fissi che possono essere a potenziali uguali oppure no. C è un conduttore mobile, portato a un potenziale elevato e posto in modo da essere opposto, in parte ad A , in parte a B , cambiando il rapporto delle parti quando C si sposta.

La disposizione più vantaggiosa a tale scopo consiste nel rendere C mobile attorno ad un asse e nel dare alle superfici opposte A, B, C la forma di superfici di rivoluzione attorno a questo asse.

In questo modo, la distanza della superficie di C da quelle opposte A, B rimane sempre la stessa, e il movimento di C nel verso positivo non fa che aumentare l'area opposta a B e diminuire l'area opposta ad A .

Se i potenziali di A e B sono uguali, nessuna forza spingerà C da A verso B ; ma, se il potenziale di C differisce più dal potenziale di B che da quello di A , C tenderà a muoversi in modo da aumentare l'area della sua superficie che è opposta a B .

Con una disposizione strumentale opportuna, si può rendere questa forza circa costante per le diverse posizioni di C comprese entro certi limiti; e, se C è sospeso a un filo di torsione, le sue deviazioni saranno circa proporzionali alla differenza dei potenziali di A e di B , moltiplicata per la differenza del potenziale di C e della media dei potenziali di A e di B .

C è mantenuto a un potenziale elevato da un condensatore provvisto di un replenisher, e controllato da un elettrometro misuratore; A e B sono collegati ai due conduttori uno dei quali

deve misurare la differenza dei potenziali. Più il potenziale di C è elevato, più lo strumento è sensibile. Essendo la carica di C indipendente da quella che si deve misurare, questo strumento si colloca nella classe degli eterostatici.

Possiamo applicare a questo elettrometro la teoria generale dei sistemi conduttori, dai ai § 93 e 127.

Siano A, B, C i rispettivi potenziali dei tre conduttori; a, b, c , le loro capacità, p il coefficiente di induzione tra B e C , q il coefficiente tra A e C , r il coefficiente tra A e B . In generale, tutti questi coefficienti varieranno con la posizione di C ; e, se C è disposto in modo che le estremità di A e di B restano lontano dalle estremità di C , tanto che il movimento di C rimane compreso entro certi limiti, potremo determinare la forma di questi coefficienti. Se θ rappresenta la deviazione di C di A verso C , la parte della superficie A che è opposta a C diminuisce al crescere di θ . Pertanto, se A è mantenuto al potenziale 1, mentre B e C sono mantenuti al potenziale zero, la carica di A diverrà $a = a_0 - \alpha\theta$, dove a_0 e α sono costanti, e a è la capacità di A . Se A e B sono simmetrici, la capacità di B sarà $b = b_0 + \alpha\theta$.

La capacità di C non cambia in conseguenza del movimento; poiché il solo effetto del movimento è di portare un'altra parte di C di fronte all'intervallo che vi è tra A e B . Pertanto $C = C_0$.

La quantità di elettricità indotta su C , quando B è portato al potenziale limitato, è $p = p_0 - \alpha\theta$.

Il coefficiente di induzione tra A e C è $q = q_0 + \alpha\theta$,

Il coefficiente di induzione tra A e B non cambiato dal movimento di C è rimane $r = r_0$.

Pertanto l'energia elettrica del sistema è

$$W = \frac{1}{2}A^2a + \frac{1}{2}B^2b + \frac{1}{2}C^2c + BCp + CAq + ABr$$

e se Θ è il momento della forza che tende ad aumentare θ , supposti A, B, C costanti

$$\Theta = \frac{dW}{d\theta}$$

$$= \frac{1}{2}A^2 \frac{da}{d\theta} + \frac{1}{2}B^2 \frac{db}{d\theta} + \frac{1}{2}C^2 \frac{dc}{d\theta} + BC \frac{dp}{d\theta} + CA \frac{dq}{d\theta} + AB \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{2}A^2\alpha + \frac{1}{2}B^2\alpha - BC\alpha + CA\alpha$$

o

$$\Theta = \alpha (A - B) \left[C - \frac{1}{2} (A + B) \right]$$

Nel modello attuale degli elettrometri a quadranti di Thomson, i conduttori A e B sono a forma di scatola cilindrica, interamente divisi in quattro quadranti (fig. 20). Questi quadranti sono isolati tra loro, ma uniti con dei fili, di modo che due quadranti opposti siano collegati ad A e gli altri due a B .

Il conduttore c è sospeso in modo da poter ruotare attorno ad un asse verticale: esso consiste di due archi piatti, di un quadrante, opposti tra loro e unita dai loro raggi estremi.

Nella posizione di equilibrio, questi quadranti devono essere parte in A e parte in B , essendo i raggi che li supportano vicino al punto medio dei quadranti della scatola cava, di modo che le divisioni di questa scatola e le estremità e i supporti di C siano il più lontani possibile.

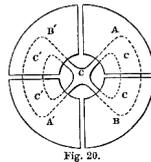


Fig. 20.

Il conduttore C è mantenuto costantemente a un potenziale elevato, tramite una contatto con l'armatura interna di una bottiglia di Leyda che forma la gabbia dello strumento. A e B sono collegati, il primo A a terra, il secondo al corpo di cui si deve misurare il potenziale.

Se il potenziale di questo corpo è zero e se lo strumento è ben regolato, non vi deve essere alcuna forza tendente a muovere C ; ma, se il potenziale di A è dello stesso segno di quello di

C , C tende a muoversi da A verso B sotto l'azione di una forza quasi uniforme, e il sistema di sospensione si torce fino a che una forza uguale sia messa in gioco e produca l'equilibrio. Entro certi limiti, le deviazioni di C sono proporzionali al prodotto

$$(A - B) \left[C - \frac{1}{2} (A + B) \right]$$

Aumentando il potenziale di C , si può aumentare il potenziale dello strumento; e, per piccoli valori di $\frac{1}{2} (A + B)$, le deviazioni sono all'incirca proporzionali a $(A - B) C$.

Misura del potenziale elettrico. 220. Per determinare in misura assoluta forti differenze di potenziale, possiamo impiegare l'elettrometro a disco attratto, e confrontare l'attrazione all'effetto di un peso. Se, nello stesso tempo, misuriamo con l'elettrometro a quadranti la differenza di potenziali degli stessi conduttori, determineremo il valore assoluto di certi punti della scala dell'elettrometro a quadranti, e potremo così dedurre il valore delle letture fatte sulla scala dell'elettrometro a quadranti, in funzione del potenziale della parte sospesa e del momento di torsione dello strumento di torsione.

Per determinare il potenziale della carica di un conduttore di dimensioni finite, si può collegare il conduttore a uno degli elettrodi di un elettrometro, essendo l'altro elettrodo collegato a terra o a un corpo il cui potenziale rimane costante. La lettura dell'elettrometro darà il potenziale del corpo dopo che la sua carica si sarà suddivisa tra lui e la parte dell'elettrometro con la quale è messo a contatto. Se K indica la capacità del conduttore e K' quello della parte dell'elettrometro, e se V e V' sono i potenziali di questi due corpi prima della loro messa a contatto, il loro potenziale comune, dopo il contatto, sarà

$$\bar{V} = \frac{KV + K'V'}{K + K'}$$

Il potenziale iniziale del conduttore era quindi

$$V = \bar{V} + \frac{K'}{K} (\bar{V} - V')$$

Se il conduttore non è grande rispetto all'elettrometro, K' sarà confrontabile a K , e, a meno che non si possano determinare i valori di K e K' , il secondo termine di questa espressione avrà un valore incerto. Tuttavia, se, prima di stabilire il contatto, si può portare l'elettrodo dell'elettrometro a un potenziale molto vicino a quello del corpo, l'incertezza sui valori di K e K' avrà solo poca importanza.

Se conosciamo approssimativamente il valore del potenziale del corpo, potremo portare l'elettrodo a questo potenziale approssimato per mezzo di un replenisher o di qualche altro mezzo, e una seconda esperienza darà una migliore approssimazione. In questo modo si può misurare il potenziale di un corpo la cui capacità è piccola rispetto a quella dell'elettrometro.

Misurare il potenziale in un punto dell'aria. 221. Primo metodo. - Si pone nel punto dato il centro di una sfera, il cui raggio è piccolo rispetto alla distanza dai conduttori carichi. Lo si collega a terra con un filo metallico sottile, poi lo si isola; lo si porta all'elettrometro, e si determinerà la sua carica totale.

Allora, se V è il potenziale nel punto dato e a il raggio della sfera, la carica della sfera sarà $Q = -Va$ e, se V' è il potenziale della sfera misurato all'elettrometro in una camera le cui mura sono messe a terra $Q = V'a$ da cui $V + V' = 0$, cioè il potenziale dell'aria, nel punto in cui era posto il centro della sfera, è uguale e di segno contrario al potenziale che prende la sfera, quando, dopo essere stata messa a terra e isolata, è portata nella camera.

Questo metodo è stato impiegato da M. Dellmann, di Creuznach, per misurare il potenziale a una certa altezza al di sopra della superficie del suolo.

Secondo metodo. - Abbiamo supposto che la sfera, posta nel punto dato e collegato dapprima a terra, fosse poi isolato e portato in una camera le cui pareti, fatte di materie conduttrici, fosse al potenziale zero.

supponiamo che si porti poi l'elettrodo dell'elettrometro fino al punto in cui deve misurare il potenziale un filo isolato. Cominciamo a scaricare interamente la sfera, cosa realizzabile mettendola all'interno di un recipiente fatto dello stesso metallo che la circonda quasi completamente, e le faceva toccare questo recipiente. La sfera così scaricata è fornita alla fine del filo e messa a contatto con esso. Poiché non è elettrizzata, è al potenziale dell'aria in questo punto: se il filo dell'elettrodo è allo stesso potenziale, il contatto non avrà effetto su di esso; ma, se è a un potenziale differente, questo potenziale, dopo il contatto con la sfera, sarà più vicina di prima al potenziale dell'aria. Da una serie di operazioni di questo genere, dove la sfera è alternativamente scaricata e messa a contatto con l'elettrodo, il potenziale dell'elettrodo dell'elettrometro si avvicinerà costantemente a quello dell'aria nel punto dato.

222. Per misurare il potenziale di un conduttore senza toccarlo, si può misurare il potenziale dell'aria in un punto vicino al conduttore, e calcolare quello del conduttore secondo il risultato. Se vi è una cavità che il conduttore racchiude quasi interamente, il potenziale dell'aria in questa cavità è molto vicino a quello del conduttore.

In questo modo Sir W. Thomson ha riconosciuto che, se due conduttori cavi, uno di rame e l'altro di zinco, sono messi a contatto metallico, il potenziale dell'aria nello spazio che contiene lo zinco è positivo rispetto a quello dell'aria nello spazio che contiene il rame.

Terzo metodo. - Se, con un procedimento qualunque, si può fare che una serie di piccoli corpi si stacchino successivamente dal fine dell'elettrodo, il potenziale dell'elettrodo tenderà verso quello dell'aria che lo circonda. Questo è ciò che si può realizzare facendo scorrere goccia a goccia, da un imbuto o un tubo collegato all'elettrodo, della graniglia di piombo, delle limature metalliche, della sabbia o dell'acqua. Il punto in cui si misura il potenziale è quello dove la vena liquida cessa di essere continua e si spezza in gocce separate.

Un altro metodo comodo consiste nell'attaccare all'elettrodo un fiammifero che brucia lentamente. Il potenziale diviene molto rapidamente uguale a quello dell'aria all'estremità della fiamma. Basta anche una punta metallica aguzza per produrre una scarica per mezzo delle molecole dell'aria, fintanto che la differenza dei potenziali è notevole; ma, se si vuole ridurre questa differenza a zero, bisogna ricorrere a uno dei metodi precedenti.

Se si vuole solo conoscere il segno della differenza dei potenziali in due punti, e non il suo valore numerico, si può produrre, in uno dei punti, uno scorrimento di gocce o di limature attraverso un imbuto comunicante con l'altro punto: si raccolgono queste gocce o limature in un recipiente isolato. Ogni goccia, cadendo, si carica di una certa quantità di elettricità, della quale si scarica completamente nel contenitore. Le cariche si accumulano quindi costantemente nel recipiente, e, dopo che è caduto un numero sufficiente di gocce, si può esaminare la carica del contenitore con i metodi anche più grossolani. Il segno della carica è positivo, se il potenziale dell'imbuto è positivo rispetto a quello dell'aria che lo circonda.

Misura della densità superficiale o della distribuzione

Teoria del piano di prova. 223. Per verificare i risultati della teoria matematica della distribuzione alla superficie di conduttori elettrizzati, è necessario poter misurare la densità superficiale in diversi punti di un conduttore. A tale scopo, Coulomb impiegò un piccolo disco di carta dorata fissato ad un'asta isolante di gomma lacca. Applicava questo disco in diversi punti del conduttore, facendolo coincidere il più esattamente possibile con la superficie di questo conduttore. Lo toglieva poi dalla sua asta isolante, e misurava la sua carica nel suo elettrometro.

La superficie del disco applicata sul conduttore coincidendo quasi esattamente con la superficie di questo conduttore, concludeva che la densità superficiale sulla superficie esterna del disco era circa uguale alla densità sulla superficie del conduttore in questo ambiente, e che la carica tolta sul disco era circa uguale alla carica che si trovava su un'area presa sulla superficie del conduttore, e uguale all'area di una delle facce del disco. Il disco, impiegato in questo modo, è detto *piano di prova di Coulomb*.

Siccome sono state sollevate delle obiezioni contro l'uso fatto da Coulomb del suo piano di prova, farò qualche osservazione sulla teoria di questa esperienza.

L'esperienza consiste nel mettere a contatto un piccolo corpo conduttore con la superficie del conduttore, nel punto in cui si vuole misurare la densità, per poi allontanare questo corpo per determinare la sua carica.

Ci basta mostrare dapprima che la carica del piccolo corpo messa a contatto con il conduttore è proporzionale alla densità superficiale che esisteva nel punto di contatto, prima che vi si ponesse il piccolo corpo.

Supporremo che tutte le dimensioni del piccolo corpo, e in particolare quelle contata sulla direzione della normale al punto di contatto, sono molto piccole rispetto ai raggi di curvatura del conduttore nel punto di contatto. Poi potremo ammettere che la forza risultante prodotta dalla carica del conduttore supposto immobile subisca solo variazioni trascurabili nello spazio occupato dal piccolo conduttore, e potremo trattare la superficie del conduttore vicino al piccolo corpo come una superficie piana.

La carica che prende il piccolo corpo, per il suo contatto con una superficie piana, è proporzionale alla forza risultante normale a questa superficie, cioè alla densità superficiale. Determineremo la grandezza di questa carica per forme particolari di questo corpo.

Bisogna ora mostrare che, quando si allontanerà il piccolo corpo, non passerà scintilla tra esso e il conduttore, e che, di conseguenza, porterà la sua carica con sé. È evidente, poiché, quando i corpi sono a contatto, i loro potenziali sono gli stessi, e di conseguenza la densità è estremamente piccola sulle parti più vicine del punto di contatto. Quando il piccolo corpo è spostato a una distanza molto piccola dal conduttore che supporremo elettrizzato positivamente, la carica, nel punto più vicino al piccolo corpo, non è più nulla, ma positiva; ma siccome la carica del piccolo corpo è pure positiva, l'elettrizzazione positiva è minore che in qualsiasi altro punto vicino sulla superficie. Il passaggio di una scintilla dipende, in generale, dall'intensità della forza risultante, e dalla densità superficiale. Pertanto, poiché supponiamo che il conduttore non è elettrizzato a un potenziale molto elevato per scaricare l'elettricità da tutti i punti della sua superficie, non passerà scintilla tra il piccolo corpo e una parte della superficie dove abbiamo mostrato che vi è una minore densità superficiale.

224. Consideriamo ora diverse forme del piccolo corpo.

Supponiamo che sia una piccola semisfera, disposta in modo da toccare il conduttore nel centro della sua faccia piana.

Supponiamo che il conduttore sia una grande sfera e modifichiamo la forma della semisfera, in modo che la sua superficie sia un poco più di una semisfera, e incontri la superficie della sfera ad angolo retto. Ci troviamo allora in un caso per il quale abbiamo già ottenuto la soluzione esatta (vedere § 167).

Se A e B sono i centri di due sfere che si tagliano ad angolo retto, DD' il diametro del cerchio di intersezione e C il centro di questo cerchio; se V è il potenziale di un conduttore la cui superficie esterna coincide con quella delle due sfere, la quantità di elettricità che si trova sulla superficie libera della sfera A è

$$\frac{1}{2}V(AD + BD + AC - CD - BC)$$

e quella che si trova sulla superficie libera della sfera B è

$$\frac{1}{2}V(AD + BD + BC - AD - AC)$$

e la carica totale è la somma delle due, cioè

$$V(AD + BD - CD)$$

Se α e β sono i raggi delle due sfere, e se α è grande rispetto a β , la carica di B sta a quella di A nel rapporto di

$$\frac{3}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{6} \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \dots \right) a \quad 1$$

Sia σ la densità superficiale uniforme di A , quando B è tolto, la carica di A è

$$4\pi\alpha^2\sigma$$

e, di conseguenza, la carica di B è

$$3\pi\beta^2\sigma \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\beta}{\alpha} + \dots \right)$$

o, se β è molto piccolo in confronto ad α , la carica della semisfera B è uguale a tre volte la carica dovuta alla densità σ presente su un'area uguale alla base circolare della semisfera.

Risulta dal § 175 che se una piccola sfera è portata a contatto di un corpo elettrizzato, poi da esso allontanato, la densità superficiale media su questa sfera sta alla densità superficiale del corpo nel punto di contatto come π^2 sta a 6, o come 1,645 sta a 1.

225. La forma più opportuna per un piano di prova è quella di un disco circolare. Mostriamo come sia possibile misurare la carica di un disco circolare posto su una superficie elettrizzata.

A tale scopo, combineremo un valore della funzione potenziale, tale che una delle superfici equipotenziali assomigli a una protuberanza circolare appiattita, e presenti la forma generale di un disco posto su un piano.

Sia σ la densità superficiale su un piano che supporremo essere quello delle xy .

Il potenziale dovuto a questa distribuzione sarà

$$V = -4\pi\sigma z$$

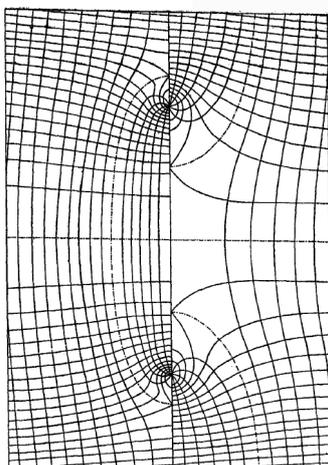
Siano due dischi di raggio a , aventi cariche elettriche invariabilmente poste, di densità superficiale $-\sigma'$ e $+\sigma'$. Poniamo il primo di questi dischi sul piano xy , con il suo centro nell'origine; e il secondo disco parallelamente al primo a una distanza c molto piccola.

Si può dimostrare, come vedremo nella teoria del magnetismo, che il potenziale di due dischi in un punto qualunque è $\omega\sigma'c$, essendo ω l'angolo solido sotteso nel punto considerato dal contorno di uno o dell'altro disco. Pertanto il potenziale dell'intero sistema sarà

$$V = -4\pi\sigma z + \sigma'c\omega$$

La forma delle superfici equipotenziali e delle linee di induzione è data sul lato sinistro della tavola XX.

Pl. XX.



A sinistra. posizione stabile a destra instabile. Corrente circolare in un campo di forza uniforme

Tracciamo la forma della superficie per la quale $V = 0$: essa è indicata dalla linea punteggiata. Indicando con r la distanza di un punto qualunque dall'asse z , quando r è molto più piccolo di a , e con z piccolo, troviamo

$$\omega = 2\pi - 2\pi \frac{z}{a} + \dots$$

Pertanto, per valori di r considerevolmente inferiori ad a , l'equazione della superficie equipotenziale zero è

$$0 = -4\pi\sigma z + 2\pi\sigma'c - 2\pi\sigma' \frac{zc}{a} + \dots$$

o

$$z_0 = \frac{\sigma'c}{2\sigma + \sigma' \frac{c}{a}}$$

Quindi, nelle vicinanze dell'asse, la superficie equipotenziale è quasi piatta.

Al di fuori del disco, dove r è più grande di a , ω è nullo quando z è nullo, di modo che il piano xy fa parte della superficie equipotenziale.

Per trovare dove si ricongiungono queste due parti della superficie, cerchiamo in quale punto del piano $\frac{dV}{dz} = 0$.

Se r è quasi uguale ad a , l'angolo solido ω diviene quasi una lunula ritagliata sulla sfera di raggio unitario, il cui angolo è $\arctan \left\{ \frac{z}{r-a} \right\}$, cioè, ω è $2 \arctan \left\{ \frac{z}{r-a} \right\}$, cosicchè

$$\frac{dV}{dz} = -4\pi\sigma + \frac{2\sigma'c}{r-a}$$

Pertanto, quando $\frac{dV}{dz} = 0$

$$r_0 = a + \frac{\sigma'c}{r-a} = a + \frac{z_0}{\pi}$$

approssimativamente.

La superficie equipotenziale $V = 0$ si compone di una figura a forma di disco, di raggio r_0 e di spessore quasi uniforme z_0 , e della parte del piano infinito xy che è al di fuori della figura.

L'integrale di superficie, preso sull'intero disco, dà la sua carica di elettricità. Si trova (come nella Teoria di una corrente circolare, IV parte, § 704) che è

$$Q = 4\pi a \sigma' c \left\{ \log \frac{8a}{r_0 - a} - 2 \right\} + \pi \sigma r_0^2$$

Su una superficie uguale del piano, la carica è $\pi \sigma r_0^2$: pertanto la carica del disco supera quella di un'area uguale presa nel piano, nel rapporto

$$1 + 8 \frac{z}{r} \log \frac{8\pi r}{z} \quad a \quad 1$$

dove z è lo spessore ed r il raggio del disco, e dove si suppone z piccolo rispetto a r .

Accumulatori elettrici e misura della capacità. 226. Un accumulatore o condensatore è un apparecchio formato da due superfici conduttrici separata da un mezzo dielettrico isolante.

Una bottiglia di Leyda è un accumulatore la cui armatura interna, di fogli di stagno, è separata dall'armatura esterna dal vetro della bottiglia. La prima bottiglia di Leyda era un recipiente di vetro contenente acqua che era separata dal vetro dalla mano di chi teneva il recipiente.

La superficie esterna di un conduttore isolato qualsiasi può essere considerata come una delle superfici di un accumulatore, con l'altra superficie formata dalla terra o dai muri della camera dove è posto, e dove il mezzo dielettrico è l'aria dell'ambiente.

La capacità di un accumulatore ha per misura la quantità di elettricità con cui bisogna caricare la superficie interna per stabilire tra le due superfici una differenza di potenziale unitaria.

Poiché ogni potenziale elettrico è la somma di un certo numero di parti ottenute dividendo ogni elemento elettrico per la sua distanza da un punto, il rapporto di una quantità di elettricità con un potenziale deve avere le dimensioni di una linea; quindi la capacità elettrostatica è una quantità lineare, che possiamo valutare in piedi o in metri senza ambiguità.

Nelle ricerche elettriche, si impiegano accumulatori per due usi principali: ricevere e conservare grandi quantità di elettricità in uno spazio il più piccolo possibile; misurare quantità definite di elettricità con il potenziale che portano sull'accumulatore.

Per conservare cariche elettriche, nulla di più perfetto della bottiglia di Leyda. La maggior parte delle perdite è dovuta al scorrere dell'elettricità da una armatura all'altra per l'umidità della superficie del vetro non rivestito. Questo inconveniente può essere evitato quasi completamente seccando artificialmente l'aria all'interno della bottiglia e verniciando il vetro, laddove è esposto all'atmosfera.

Negli elettroscopi di sir W. Thomson, la proporzione della perdita da un giorno all'altro è molto piccola, e, di questa perdita, credo nulla possa essere attribuito a una conduzione diretta da parte dell'aria o dal vetro quando questo è di buona qualità; ma si produce interamente per conduzione superficiale sulle diverse aste isolanti e sulle superfici del vetro dello strumento.

Infatti, lo stesso studioso ha dato una carica a dell'acido solforico racchiuso in un pallone a collo lungo; ha poi sigillato ermeticamente il collo fondendolo, in modo che questa carica si trovasse completamente racchiusa nel vetro. Al termine di parecchi anni, si è constatato che la carica era ancora conservata.

Ma è solo a freddo che il vetro è isolante a questo punto: la carica sfugge non appena il vetro è portato a una temperatura inferiore a 100° .

Quando si desidera ottenere una grande capacità in un piccolo volume, conviene impiegare accumulatori il cui dielettrico è di caucciù in foglie, di mica o di carta impregnata di paraffina.

227. Per accumulatori della seconda specie, destinati alla misura di quantità di elettricità, i dielettrici solido devono essere impiegato solo con grande precauzione, poiché possiedono la proprietà detta *assorbimento elettrico*.

Il solo dielettrico sicuro per simili accumulatori è l'aria: ancora vi è l'inconveniente che tutta l'umidità, la polvere che penetra nello spazio stretto compreso tra le opposte superfici, e dove non dovrebbe trovarsi dell'aria, non solo altera lo spessore dello strato d'aria, ma anche può stabilire un contatto tra le superfici opposte, nel qual caso l'accumulatore non mantiene la sua carica.

Per determinare, in misura assoluta, cioè in metri o piedi, la capacità di un accumulatore, dobbiamo conoscerne dapprima la forma e le dimensioni, e risolvere poi il problema della distribuzione sulle sue superfici opposte; oppure dobbiamo confrontare la sua capacità con quella di un accumulatore per il quale il problema è stato risolto.

Siccome il problema è difficile, la cosa migliore è cominciare col costruire un accumulatore per la cui forma conosciamo la soluzione. Così, si sa che la capacità di una sfera isolata in uno spazio illimitato ha per misura il raggio di questa sfera.

Una sfera, sospesa in una camera, è stata impiegata da MM. Kohlrausch e Weber come campione assoluto, al quale essi confrontavano la capacità di altri accumulatori.

Ma la capacità di una sfera di dimensioni moderate è così piccola rispetto a quella degli accumulatori abitualmente impiegati, che una sfera non è un campione di misura assai comodo.

La capacità può essere notevolmente accresciuta se si circonda la sfera con una superficie cava, concentrica, e di raggio un poco più grande. La capacità della superficie interna è allora un quarto proporzionale tra lo spessore dello strato d'aria e dei raggi delle due sfere.

Sir W. Thomson ha impiegato questa disposizione per avere un campione di capacità; ma vi sono notevoli difficoltà nel lavorare superfici esattamente sferiche, a renderle del tutto concentriche e a misurare le loro distanze e i loro raggi con una sufficiente precisione.

Siamo così portati a preferire come campione assoluto di capacità una disposizione nella quale le facce opposte sono piani paralleli.

È facile verificare se le superfici sono esattamente piane; la loro distanza può essere misurata con una vite micrometrica e può essere resa suscettibile di una variazione continua, e questa è una proprietà molto importante in uno strumento di misura.

Rimane solo una difficoltà, dovuta alla limitatezza dei piani alla distribuzione dell'elettricità vicino alle estremità del piano difficilmente calcolabile in modo rigoroso. È vero che se prendiamo

per superfici opposte due dischi circolari uguali, il cui raggio è grande rispetto alla loro distanza, possiamo trattare i limiti di questi dischi come se fossero linee rette e calcolare la distribuzione con il metodo di Helmholtz, descritto al § 202. Ma bisogna notare che, nel caso attuale, una parte dell'elettricità è distribuita sulla parte inversa dei dischi e che si è supposto nel calcolo che non vi siano conduttori nelle vicinanze, cosa non possibile con questo piccolo strumento.

228. Preferiamo quindi la disposizione seguente, dovuta a sir W. Thomson, che si può chiamare disposizione ad anello di guardia: grazie ad essa, la quantità di elettricità che è su un disco isolato si può determinare esattamente in funzione del suo potenziale.

Il condensatore ad anello di guardia. Bb è un recipiente cilindrico fatto di una sostanza conduttrice: la superficie esterna della sua faccia superiore è esattamente piana. Questa faccia superiore è formata di due parti, un disco A e un grande anello BB che circonda il disco, e separato da esso da un piccolo spazio, proprio sufficiente a non lasciar passare la scintilla. La superficie superiore del disco è esattamente nello stesso piano di quello dell'anello di guardia.

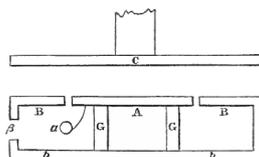


Fig. 21.

Il disco è sostenuto da colonne di materia isolante GC ; C è un disco di metallo la cui superficie inferiore è esattamente piana e parallela a BB . Il disco C è notevolmente più grande di A . La sua distanza da A è regolata e misurata per mezzo di una vite micrometrica che non è rappresentata in figura.

Ecco come si impiega questo accumulatore come strumento di misura:

Supponiamo che C sia al potenziale zero e A e Bb al potenziale V . Non vi sarà carica sul retro del disco, poiché il recipiente è quasi interamente chiuso e tutto allo stesso potenziale. Vi sarà una carica molto piccola sui bordi del disco, poiché è allo stesso potenziale di BB . Sulla faccia del disco, la distribuzione è alquanto uniforme; la carica totale del disco sarà quindi quasi esattamente rappresentata dalla sua area moltiplicata per la densità superficiale di un piano, come è stato calcolato al § 124.

Infatti, lo studio fatto al § 201 ci mostra che la carica del disco è

$$V \left\{ \frac{R^2 + R'^2}{8A} - \frac{R'^2 + R^2}{8A} \frac{\alpha}{A + \alpha} \right\}$$

dove R è il raggio del disco, R' quello dell'apertura dell'anello di guardia, A la distanza di A da C , e α una quantità che non può essere superiore a $(R' - R) \frac{\ln 2}{\pi}$.

Se l'intervallo tra l'anello di guardia e il disco è piccolo rispetto alla distanza tra A e C , il secondo termine è molto piccolo e la carica del disco è, circa

$$V \frac{R^2 + R'^2}{8A}$$

Mettiamo ora a terra il contenitore Bb . La carica del disco A non conserverà più la sua distribuzione uniforme, ma sarà la stessa come quantità e se ora scarichiamo A , otterremo una quantità di elettricità, di cui conosciamo il valore in funzione della differenza di potenziale iniziale V e delle quantità misurabili R, R', A .

Confronto della capacità dei condensatori. 229. La forma del condensatore che si presta meglio alla determinazione della capacità in misura assoluta, secondo la forma e le dimensioni dello strumento, non è, in generale, quella migliore per le esperienze elettriche. Per gli strumenti destinati ad eseguire correntemente misure di capacità, è preferibile avere solo due superfici conduttrici, di cui una circonda l'altra il più completamente possibile. Al contrario, l'accumulatore ad anello di guardia ha tre conduttori indipendenti che devono essere

caricati e scaricati in un certo ordine. È quindi preferibile poter confrontare le capacità di due accumulatori con un metodo elettrico in modo da valutare in qualche modo accumulatori che serviranno poi da campioni secondari.

Mostrerò dapprima come si può verificare che le capacità di due accumulatori ad anello di guardia sono uguali.

Siano, in uno di questi accumulatori, A il disco, B l'anello di guardia e il resto del recipiente conduttore che gli è fissato, C il grande piatto; siano $A'B', C'$ le parti corrispondenti dell'altro accumulatore.

Se uno di questi accumulatori è di costruzione più semplice, e vi sono solo due conduttori, basta sopprimere B o B' e supporre che A è l'armatura interna, C l'armatura esterna, che si suppone circondare interamente A .

Stabiliamo i seguenti contatti:

Colleghiamo in modo permanente B a C' e B' a C , cioè ognuno degli anelli di guardia al piatto grande dell'altro condensatore.

- (1) Colleghiamo A a B e C' e a J l'elettrodo di una bottiglia di Leyda; A' a B' e C a terra;
- (2) Isoliamo A, B, C' da J ;
- (3) Isoliamo A da B e C' , e A' da B' e C ;
- (4) Colleghiamo B e C' con B' e C e con la terra;
- (5) Colleghiamo A e A' ;
- (6) Colleghiamo A e A' a un elettroscopio.

Possiamo rappresentare questi contatti come segue:

$$\begin{array}{ll}
 (1) & 0 = C = B' = A' \quad | \quad A = B = C' = J \\
 (2) & 0 = C = B' = A' \quad | \quad A = B = C' | J \\
 (3) & 0 = C = B' | A' \quad | \quad A | B = C' \\
 (4) & 0 = C = B' | A' \quad | \quad A | B = C' = 0 \\
 (5) & 0 = C = B' | A' \quad | \quad A | B = C' = 0 \\
 6 & 0 = C = B' | A' \quad A' = E = A \quad A | B = C' = 0
 \end{array}$$

qui il segno di = significa il contatto elettrico e il tratto verticale | l'isolamento.

Nella (1) i due accumulatori hanno cariche opposte: A è positivo, A' negativo, e le cariche di A e A' sono distribuite uniformemente sulla superficie superiore opposta al grande piatto di ognuno degli accumulatori.

Nella (2) la bottiglia di Leyda è tolta, e nella (3) le cariche di A e A' sono isolate.

Nella (4), gli anelli di guardia sono collegati ai grandi piatti: e, di conseguenza, le cariche di A e A' si distribuiscono su tutta la superficie di questi dischi, senza che il loro valore sia modificato.

Nella (5) A è collegato ad A' . Se le cariche sono uguali e di segno contrario, l'elettrizzazione è interamente eliminata. Questo è ciò che si verifica nella (6) per mezzo dell'elettroscopio E .

L'elettroscopio E indicherà una carica positiva o una carica negativa, secondo che A o A' abbia la capacità maggiore.

Per mezzo di una chiave opportunamente costruita, si possono effettuare tutte queste operazioni nell'ordine voluto, nello spazio di una piccola frazione di secondo; e si possono far variare le capacità fino a che l'elettroscopio non accusa la più piccola traccia di carica. In questo modo, si può portare la capacità di un accumulatore ad essere uguale a quella di un altro accumulatore, o alla somma delle capacità di numerosi altri, e si può formare un sistema di accumulatori dove la capacità di ognuno è espressa in misura assoluta, cioè in piedi o in metri, e dove si è impiegato nello stesso tempo il modo di costruzione più conveniente per le esperienze elettriche.

Questo metodo di confronto troverà senza dubbio un impiego vantaggioso nella determinazione dei poteri induttori specifici dei diversi dielettrici messi sotto forma di dischi o di piatti. Se, tra A e C , si interpone un disco di dielettrico considerevolmente più grande di A , la capacità dell'accumulatore è modificata, e diviene uguale a quelle che presenterebbe questo accumulatore

per una minore distanza di A e C . Se l'accumulatore, provvisto del suo piatto dielettrico, e avente le sue armature A e C separate da una distanza x , ha la stessa capacità che presenterebbe quando le sue armature sono alla distanza x' senza interposizione di dielettrico, e se a è lo spessore del piatto, k il suo potere induttivo specifico riferito a quello dell'aria preso come unitario,

$$k = \frac{a}{a + x' - x}$$

La combinazione di tre cilindri, descritta al § 127, è stata impiegata da sir W. Thomson per formare un condensatore la cui capacità può essere aumentata o diminuita di quantità misurabili.

Le esperienze di MM. Gibson e Barclay, fatte per mezzo di questo strumento, sono descritte nei *Proceedings* della Société Royale, del 2 febbraio 1871, e nelle *Phil. Trans.* del 1871, p. 573. Esse hanno trovato per il potere induttivo specifico della paraffina 1,975, quello dell'aria preso come unitario.

Parte 2

ELETTROKINETICA

La corrente elettrica

230. Abbiamo visto, al § 45, che il potenziale è necessariamente lo stesso in tutti i punti di un conduttore in equilibrio elettrico.

Se due conduttori A e B sono carichi di elettricità, essendo il potenziale di A superiore a quello di B , e se questi due corpi sono messi a contatto con un filo metallico C che li tocca entrambi, una parte della carica di A si trasporta su B , e, dopo un tempo molto breve, i potenziali di A e di B divengono uguali.

231. Mentre si produce questo fenomeno, si osservano nel filo C certi fenomeni detti *fenomeni di flusso o di corrente elettrica*.

Il primo di questi fenomeni è un trasporto di elettricità positiva da A verso B , di elettricità negativa da B verso A . Questo trasporto si può effettuare più lentamente se si mette un piccolo corpo isolato a contatto alternativamente con A e con B . In questa operazione, che si può chiamare la *convezione elettrica*, piccole frazioni di carica di ogni corpo sono trasportate successivamente dall'una sull'altra. Ne due casi, una certa quantità di elettricità, o di carica elettrica, passa da un posto ad un altro lungo un certo percorso nello spazio che separa i corpi.

Qualunque sia pertanto la nostra opinione sulla natura dell'elettricità, bisogna ammettere che l'operazione descritta costituisce una corrente elettrica. Questa corrente può essere considerata come una corrente di elettricità positiva da A verso B , o di elettricità negativa da B verso A , o una combinazione di entrambe.

Secondo la teoria di Fechner e di Weber, è una combinazione di una corrente elettrica positiva e di una corrente esattamente uguale di elettricità negativa, che si muove in senso inverso nello stesso corpo. È necessario ricordare questa ipotesi essenzialmente artificiale sulla natura della corrente, per comprendere l'enunciato di alcuni dei più importanti risultati sperimentali di Weber.

Se, come nel § 36, supponiamo che P unità di elettricità positiva si trasportano da A verso B , e che N unità di elettricità negativa si trasportano da B verso A , nell'unità di tempo, la teoria di Weber vuole che $P = N$, e P o N può essere preso come misura numerica della corrente.

Al contrario, non avanziamo qui alcuna ipotesi su una relazione tra P e N ; ma, tenendo conto che l'effetto prodotto dalla corrente, cioè del trasporto di $P + N$ unità di elettricità positiva da A su B , considereremo $P + N$ come la reale misura della corrente. La corrente che Weber chiamerebbe 1, noi la chiameremo 2.

Correnti permanenti. 232. Nel caso della corrente che passa tra due conduttori isolati portati a potenziali diversi, l'operazione giunge presto alla sua conclusione, che è la uguaglianza dei potenziali dei due corpi: la corrente è quindi essenzialmente una corrente istantanea.

Ma se vi sono mezzi con i quali si può mantenere tra due conduttori una differenza di potenziale costante, allora passa tra di essi una corrente continua di intensità costante: è ciò che si chiama una *corrente permanente*.

La pila voltaica. Il metodo più comodo per produrre una corrente permanente è di impiegare la pila voltaica.

Per precisare le idee, descriviamo la pila costante di Daniell.

Una soluzione di solfato di zinco è posta in un contenitore di terra porosa, che è esso stesso in un contenitore racchiudente una soluzione satura di solfato di rame. Un pezzo di zinco è

immerso nel solfato di zinco; un pezzo di rame nel solfato di rame, al di sopra del livello del liquido. Questa combinazione è detta una *coppia* o un *elemento della pila di Daniell*.

233. Se si isola la coppia ponendola su un supporto non conduttore, e se si mette a contatto con un conduttore isolato *A* il filo collegato al rame, e il filo collegato allo zinco a contatto con un altro conduttore isolato *B*, fatto dello stesso metallo di *A*, si può mostrare per mezzo di un elettrometro sensibile che il potenziale di *A* supera quello di *B* di una certa quantità. Questa differenza di potenziale è detta *forza elettromotrice dell'elemento di Daniell*.

Se ora si staccano *A* e *B* dalla pila, e li si mette a contatto con un filo metallico, una corrente passeggera attraversa il filo, da *A* verso *B* e i potenziali di *A* e *B* divengono uguali. Ma, se si collega *A* e *B* con il filo *C*, e nello stesso tempo li si collega alla pila, come in precedenza, la pila mantiene una corrente costante attraverso *C*, così come una differenza di potenziale costante tra *A* e *B*. Questa differenza non, come vedremo, uguale alla forza elettromotrice totale dell'elemento, essendo una parte di questa forza spesa per mantenere la corrente attraverso l'elemento stesso.

Un certo numero di elementi messi in serie, in modo che lo zinco del primo comunica metallicamente con il rame del secondo, e così di seguito, formano ciò che si chiama una *pila voltaica*. La forza elettromotrice di una tale pila è uguale alla somma delle forze elettromotrici degli elementi che la compongono. Se la pila è isolata, essa può, nel suo insieme, ricevere una carica qualunque di elettricità; ma il potenziale del polo rame supererà sempre quello del polo zinco di una quantità uguale alla forza elettromotrice della pila, qualunque siano i loro valori assoluti. Gli elementi della pila possono essere di forme differenti, contenere sostanze chimiche e metalli diversi, purché l'azione chimica non continui quanti non passa corrente.

234. Consideriamo la pila voltaica le cui due estremità sono isolate tra loro. L'estremità rame avrà una carica positiva o vitrea, l'estremità zinco una carica negativa o resinosa.

Colleghiamo ora con un filo metallico i due capi della pila. Si originerà una corrente e, dopo un tempo molto breve raggiungerà un valore costante. Si dice allora che è una corrente permanente.

Proprietà della corrente. 235. La corrente descrive un circuito chiuso, che va dal rame allo zinco nei fili, e dallo zinco al rame nelle soluzioni.

Se si interrompe il circuito tagliando uno dei fili che collegano il rame di un elemento allo zinco del successivo, la corrente è fermata, e si trova che il potenziale dell'estremità del filo collegato al rame supera quello all'estremità del rame collegato allo zinco di una quantità costante, la forza elettromotrice totale del circuito.

Azione elettrolitica della corrente. 236. Finché il circuito è interrotto, non si produce negli elementi alcuna azione chimica; ma, appena il circuito è formato, dello zinco inizia a dissolversi in ognuno degli elementi Daniell, e del rame si deposita sulle lamine di rame.

La quantità di solfato di zinco aumenta, quella del solfato di rame diminuisce, a meno che non se aggiunga costantemente di nuovo.

La quantità di zinco disciolta, la quantità di rame depositata sono le stesse in tutti gli elementi Daniell del circuito, qualunque siano le dimensioni degli elettrodi di questo elemento; e, se vi sono elementi di costruzione diversa, l'azione chimica che vi si produce è in un rapporto costante con l'azione chimiche di un elemento Daniell. Se, per esempio, uno degli elementi è formato da due lamine di platino immerse nell'acido solforico sciolto in acqua, dell'ossigeno è liberato alla superficie della placca attraverso la quale la corrente entra nel liquido, cioè la placca che è collegata metallicamente al rame della pila Daniell; e dell'idrogeno si libera alla superficie della placca da dove la corrente esce dal liquido, che è la placca collegata allo zinco della pila di Daniell.

Il volume dell'idrogeno è esattamente doppio di quello dell'ossigeno liberato nello stesso intervallo di tempo; e il peso dell'ossigeno è esattamente otto volte il peso dell'idrogeno.

In ognuno degli elementi del circuito, il peso di ogni sostanza disciolta, depositata o decomposta, è uguale al prodotto di una certa quantità che si chiama l'*equivalente elettrochimico della sostanza*, per l'intensità della corrente e per la durata del suo passaggio.

Per le esperienze che stabiliscono questo principio, si vedano le Serie VII e VIII delle *Experimental Researches* di Faraday; e, per le apparenti eccezioni a questa regola, si veda la *Chemical Physics* di Miller, e la *Galvanismus* di Wiedemann.

237. Si chiamano *elettroliti* le sostanze che subiscono questo tipo di decomposizione. L'operazione stessa si chiama *elettrolisi*. I luoghi in cui la corrente penetra nell'elettrolita e ne esce sono detti gli *elettrodi*. Di questi elettrodi, quello attraverso il quale entra la corrente è detto *anodo*, e quello da cui esce è detto *catodo*. Le componenti nelle quali si risolve l'elettrolita sono detti *ioni*; quello che tra loro appare all'anodo porta il nome di *anione*, e quello che appare al catodo di *catione*.

Di questi termini, che sono stati, credo, inventati da Faraday con l'aiuto del Dr Whewell, i primi tre, elettrodi, elettrolisi e elettrolita, sono stati generalmente adottati, e si chiama *conduzione elettrolitica* questa forma di conduzione della corrente nella quale si produce questo tipo di scomposizione e questo trasporto degli elementi componenti-

Se si mette un elettrolita omogeneo in un tubo di sezione variabile, e se si mettono gli elettrodi alla fine di questo tubo, si trova che, quando la corrente passa, l'anione appare all'anodo, il catione al catodo, essendo le quantità di questi ioni tra loro equivalenti, ed equivalenti insieme a una quantità di elettroliti. Nelle altre parti del tubo, sia che la sezione sia grande o piccola, costante o variabile, la composizione dell'elettrolita resta invariata. Pertanto, la quantità di materia che subisce l'elettrolisi in ogni sezione del tubo è la stessa. Se la sezione è piccola, l'azione deve quindi essere più intensa che se la sezione fosse grande; ma la quantità totale di ogni ioni che attraversa in un tempo dato una sezione completa dell'elettrolita è la stessa per tutte le sezioni.

L'intensità di una corrente si può quindi misurare dalla quantità di materia che è elettrolizzata in un tempo dato. Si chiama *voltmetro* uno strumento che permette di misurare facilmente la quantità di questi prodotti di elettrolisi.

L'intensità della corrente, così misurata, è la misura in tutti i punti del circuito, e la quantità totale di prodotti elettrolitici che si trovano in un voltmetro dopo un tempo dato è proporzionale alla quantità di elettricità che attraversa una sezione nello stesso tempo.

238. Se introduciamo un voltmetro in un punto del circuito di una pila voltaica e se interrompiamo il circuito in un altro punto, possiamo supporre che si proceda a misurare la corrente nel modo seguente. Siano *A* e *B* le estremità del circuito rotto, *A* l'anodo e *B* il catodo. Prendiamo una sfera isolata, e facciamola toccare alternativamente *A* e *B*: a ogni spostamento, essa porterà da *A* su *B* una certa quantità misurabile di elettricità. Questa quantità si può misurare all'elettrometro o calcolare moltiplicando la forza elettromotrice del circuito per la capacità elettrostatica della sfera. Dell'elettricità è così trasportata da *A* verso *B*, sulla sfera isolata, da un'operazione che si può chiamare *convezione*. Nello stesso tempo, l'elettrolisi si produce nel voltmetro e in ognuno degli elementi della pila e la quantità di materia elettrolizzata in ogni elemento può essere confrontata alla quantità di elettricità trasportata dalla sfera. La quantità di una sostanza che è elettrolizzata da una unità di elettricità è detta l'*equivalente elettrochimico della sostanza*.

Questa esperienza sarebbe estremamente noiosa e difficile, se la si conducesse in questo modo con una sfera di grandezza ordinaria e una pila come quelle di cui si può disporre; poiché bisognerebbe fare un numero enorme di spostamenti per decomporre una quantità apprezzabile di elettrolita. Si deve quindi considerare questa esperienza solo come un semplice procedimento espositivo alquanto diverso dal modo in cui in realtà condurre le misure degli equivalenti elettrochimici. Ma si può vedere in questa esperienza come una immagine del meccanismo stesso dell'elettrolisi; poiché, se consideriamo la conduzione elettrolitica come una sorta di convezione, nella quale un equivalente anione si sposta verso l'anodo con una carica negativa, mentre un

equivalente catione si sposta verso il catodo con una carica positiva, ci faremo del meccanismo dell'elettrolisi un'idea che, a conoscenza mia, non è in disaccordo con nessun fatto noto; tuttavia, non sappiamo nulla della natura dell'elettricità e dei composti chimici, e, di conseguenza, ciò può essere ancora una rappresentazione alquanto imperfetta di ciò che avviene realmente.

Azione magnetica della corrente. 239. Oersted ha scoperto che una calamita posta vicino a una corrente elettrica rettilinea tende a disporsi perpendicolarmente al piano che passa per la calamita e la corrente (si veda § 475).

Se un uomo si pone nella direzione della corrente, in modo che la corrente che va dal rame allo zinco attraverso i fili lo attraversi dalla testa ai piedi, e se avesse la figura ruotata verso la metà della calamita, è l'estremità della calamita che è diretta verso nord, che tende a dirigersi verso la destra dell'osservatore quando la corrente passa.

La natura e le leggi dell'azione elettromagnetica saranno discusse nella Parte IV. Ciò che per ora ci interessa, è il fatto che la corrente elettrica possiede un'azione magnetica che si esercita al di fuori della corrente e che può servire a rivelare l'esistenza o a misurare l'intensità senza rompere il circuito o senza introdurre nulla nella corrente stessa.

Ci si è accertati che la grandezza dell'azione magnetica è esattamente proporzionale all'intensità misurata nel voltmetro dai prodotti dell'elettrolisi: l'intensità è quindi interamente indipendente dalla natura del conduttore nel quale passa la corrente, che sia un metallo o un elettrolita.

240. Si chiama *galvanometro* uno strumento che indica l'intensità di una corrente elettrica, per mezzo del suo effetto magnetico.

In generale, un galvanometro consiste in una o più bobine di filo ricoperte di seta, all'interno delle quali è sospesa una calamita il cui asse è orizzontale. Quando una corrente attraversa il filo, la calamita tende a porre l'asse perpendicolare al piano delle bobine. Se si suppone che il piano delle bobine parallelo al piano dell'equatore terrestre, e si suppone la corrente scorrere nella bobina da est a ovest nella direzione del moto apparente del sole, la calamita tende a porsi in modo che la sua magnetizzazione sia diretta come quella della terra considerata come una grossa calamita, essendo il polo nord della terra simile a questa estremità dell'ago di una bussola, che è diretto verso sud.

Il galvanometro è il più comodo di tutti gli strumenti per misurare l'intensità delle correnti elettriche. Per studiare le leggi di queste correnti, ammetteremo che è possibile costruire un simile strumento, riservando alla Parte IV la discussione dei suoi principi. Così quindi, quando diremo che una corrente ha una certa intensità, supporremo la misura fatta al galvanometro.

Conduzione e resistenza

241. Se per mezzo di un elettrometro si determina il potenziale elettrico in diversi punti di un circuito nel quale si trasporta una corrente elettrica costante, si trova che, in una parte del circuito formato da un solo metallo dappertutto alla stessa temperatura, il potenziale di un punto qualunque supera il potenziale di ogni altro punto posto più lontano da esso nel verso della corrente, di una quantità che dipende dall'intensità di corrente e dalla natura e dimensioni della parte del circuito che è compresa tra questi due punti. Si chiama *forza elettromotrice* agente in questa parte del circuito la differenza dei potenziali alle sue estremità.

Se la porzione del circuito che si considera non è omogenea, ma al contrario contiene passaggi da una sostanza ad un'altra, da un metallo a un elettrolita, da una parte calda a una fredda, vi possono essere, oltre alla forza elettromotrice esterna, forze elettromotrici interne di cui bisogna tener conto.

Le relazioni tra la forza elettromotrice, l'intensità e la resistenza sono state studiate per la prima volta dal Dr. G.S. Ohm, nella sua Opera pubblicata nel 1827, intitolata: *Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet*, che è stata tradotta nella Memorie scientifiche di Taylor. Il risultato di questi studi, nel caso di conduttori omogenei, è generalmente noto sotto il nome di *leggi di Ohm*.

Leggi di Ohm. *La forza elettromotrice che agisce tra le estremità di una parte qualunque del circuito è uguale al prodotto dell'intensità della corrente per la resistenza di questa parte del circuito.*

Qui si introduce un termine nuovo, la resistenza di un conduttore, che è definita dal rapporto tra la forza elettromotrice e l'intensità della corrente che essa produce. L'introduzione di questo termine non avrebbe alcun vantaggio scientifico, se Ohm non avesse mostrato, come ha fatto sperimentalmente, che questo termine corrisponde a una quantità fisica reale, cioè avente un valore definito variante solo con la natura del conduttore.

In primo luogo, la resistenza di un conduttore non dipende dall'intensità della corrente che lo attraversa.

In secondo luogo, la resistenza non dipende dal potenziale elettrico al quale è portato il conduttore, né dalla densità dell'elettricità distribuita alla sua superficie.

Essa dipende solo dalla natura della sostanza di cui è formato il conduttore, dallo stato di aggregazione delle sue parti e dalla sua temperatura.

La resistenza di un conduttore si può misurare ad una approssimazione di $\frac{1}{10000}$, o anche di $\frac{1}{100000}$ del suo valore, e si sono studiati tanti conduttori che, ora, possiamo considerare come molto certa la validità della legge di Ohm. Indicheremo in seguito le sue applicazioni e conseguenze.

Produzione del calore da parte della corrente. 242. Avviamo visto che, quando una forza elettromotrice determina il passaggio di una corrente in un conduttore, dell'elettricità è trasportata dai punti a potenziale più elevato a quello dove è meno elevato. Se questo trasporto avvenisse per convezione, cioè trasportando da un punto all'altro cariche successivamente cedute ad una sfera, le forze elettriche agenti sulla sfera effettuerebbero del lavoro, e si potrebbe valutare tale lavoro. Lo si può valutare in parte in quei circuiti di pile a secco, dove gli elettrodi sono formati da campane e dove la sfera veicolo oscilla come un pendolo tra le due campane che essa urta alternativamente: la forza elettrica serve a mantenere le oscillazioni del pendolo e a propagare a distanza il suono delle campanelle. Nel caso di un filo conduttore, abbiamo pure

il trasporto di elettricità da un punto a potenziale più alto a uno a potenziale più basso, e ciò senza che vi sia lavoro esterno. Il principio di conservazione dell'energia ci porta allora a ricercare nel conduttore qualche lavoro interno. In un elettrolita, questo lavoro interno consiste in parte nella separazione degli elementi componenti. Negli altri conduttori, vi è conversione totale in calore.

In questo caso, l'energia convertita in calore è uguale al prodotto della forza elettromotrice per la quantità di elettricità che passa nel circuito. Ma la forza elettromotrice è uguale al prodotto dell'intensità per la resistenza; la quantità di elettricità, al prodotto dell'intensità per il tempo. Pertanto il prodotto della quantità di calore per l'equivalente meccanico dell'unità di calore è uguale al prodotto del quadrato dell'intensità per la resistenza e per il tempo.

Il calore liberato generato dalle correnti elettriche mentre vincono la resistenza dei conduttori è stato misurato dal Dr. Joule, che, per primo, ha stabilito che il calore prodotto in un tempo dato è proporzionale al quadrato dell'intensità: poi, facendo con la massima cura la misura assoluta di tutte le quantità che intervengono, ha verificato la legge

$$JH = C^2 Rt$$

dove J è l'equivalente meccanico del calore, determinato da Joule; H il numero di unità di calore; C l'intensità della corrente; R la resistenza del conduttore; t il tempo durante il quale passa la corrente. La spiegazione completa di queste relazioni tra la forza elettromotrice, il lavoro e il calore, è stata data per la prima volta da sir W. Thomson, in una Memoria sull'applicazione del principio dell'effetto meccanico alla misura della forza elettromotrice¹.

243. L'analogia tra la teoria della conduzione dell'elettricità e la teoria della conduzione del calore è, a prima vista, quasi completa. Se prendiamo due sistemi geometricamente simili, e tali che la conducibilità calorifica di una parte sia proporzionale alla conducibilità elettrica della parte corrispondente del secondo, e si pone la temperatura di ogni parte del primo proporzionale al potenziale elettrico della stessa parte del secondo, il flusso di calore attraverso un'area qualunque presa nel primo sarà proporzionale al flusso di elettricità attraverso l'area corrispondente nel secondo.

Così, nel confronto che facciamo, e dove il flusso di elettricità corrisponde al flusso di calore, e il potenziale elettrico alla temperatura, l'elettricità tende a passare dai punti a potenziale maggiore a quelli a potenziale minore, come il calore tende a passare da punti dove la temperatura è alta a quelli dove è bassa.

244. La teoria del potenziale e quella della temperatura possono quindi servire a spiegarsi reciprocamente; ma vi è una differenza notevole tra i fenomeni elettrici e quelli del calore.

Sospendiamo con un filo di seta un corpo conduttore in un recipiente conduttore chiuso e carichiamolo di elettricità. Il potenziale del recipiente e di tutto ciò che contiene si innalza immediatamente; ma, se a lungo, così potentemente come il recipiente sia elettrizzato, e il corpo sospeso sia o meno a contatto con esso, nessun segno di elettricità appare all'esterno del recipiente, e il corpo non manifesta nessun effetto di elettricità quando è ritirato dal recipiente.

Al contrario, se il recipiente è portato ad un'alta temperatura, il corpo che esso contiene non è innalzato alla stessa temperatura se non dopo un tempo considerevole; e se allora lo si toglie, si trova che è caldo, e che rimane caldo finché ha perso il suo calore per radiazione, dopo un certo tempo.

La differenza tra i fenomeni consiste quindi in questo fatto: che i corpi sono in grado di assorbire il calore e di emetterlo, mentre non hanno la proprietà corrispondente per l'elettricità. Non si può scaldare un corpo senza fornirgli una certa quantità di calore dipendente dalla sua massa e dal suo calore specifico; il potenziale elettrico, al contrario, può essere innalzato ad un grado qualsiasi, nel modo che abbiamo già descritto, senza comunicare al corpo alcuna carica di elettricità.

¹*Phil. Mag.*, dicembre, 1851.

245. Supponiamo ancora prima scaldato e posto all'interno di un recipiente chiuso. L'esterno del recipiente sarà dapprima alla temperatura degli oggetti circostanti, si scalderà presto e rimarrà caldo finché il calore del corpo interno non sarà sfuggito completamente.

È impossibile fare l'esperienza elettrica corrispondente. È impossibile elettrizzare un corpo e porlo in un contenitore chiuso, in modo che l'esterno non mostri alcuna traccia di elettricità e divenga poi elettrizzato. Questi sono fenomeni del tipo che Faraday ha analizzato invano sotto il nome di *carica assoluta di elettricità*.

Il calore può essere nascosto all'interno di un corpo e non avere azione all'esterno: ma è impossibile isolare una quantità di elettricità, di impedirle di essere costantemente collegata per induzione a una uguale quantità di segno contrario.

Non vi sono quindi fenomeni elettrici che corrispondono alla capacità calorifica. È quanto risulta immediatamente dall'ipotesi adottata in questa Opera, che l'elettricità è soggetta alla stessa condizione di continuità dei fluidi incomprimibili. È quindi impossibile dare a un corpo una carica effettiva di elettricità, costringendo una quantità aggiuntiva di elettricità di penetrare in questo corpo (vedere i § 61, 111, 329 e 334).

Forza elettromotrice prodotta tra i corpi a contatto

Potenziale di sostanze differenti messe a contatto. 246. Se definissimo il potenziale di un recipiente conduttore cavo, essendo come il potenziale dell'aria che sta all'interno del recipiente, possiamo determinare questo potenziale per mezzo dell'elettrometro, così come è stato spiegato nella prima Parte (si veda § 222).

Prendiamo ora due contenitori cavi fatti di metalli diversi, di rame e di zinco, per esempio; mettiamoli a contatto metallico e misuriamo il potenziale dell'aria all'interno di ognuno di essi. Il potenziale dell'aria racchiusa nel recipiente di zinco è positiva rispetto a quella dell'aria nel recipiente di rame. La differenza di potenziale dipende dalla natura delle superfici interne dei recipienti: essa è massima quando lo zinco è assai pulito e il rame ancora coperto di ossido.

Così, quando due metalli sono messi a contatto, vi è in generale una forza elettromotrice che agisce da uno verso l'altro, di modo che il potenziale dell'uno supera quello dell'altro di una certa quantità. Questa è la teoria dell'elettricità di contatto, di Volta.

Se si prende come termine di confronto un certo metallo, il rame per esempio, e se F è il potenziale del ferro messo a contatto con del rame a potenziale zero, il potenziale dello zinco messo a contatto con del ferro al potenziale zero sarà $Z - F$.

Questo risultato è vero per tre metalli qualunque; di conseguenza, si vede che la differenza di potenziale di due metalli presi alla stessa temperatura è la stessa di questi metalli messi a contatto diretto o separati da un terzo metallo: se quindi si forma un circuito con un numero qualunque di metalli presi alla stessa temperatura, vi sarà equilibrio elettrico prima che questi metalli avranno raggiunto il loro proprio potenziale e la corrente non continuerà a passare nel circuito.

247. Ma, se il circuito è formato da due metalli e da un elettrolita, secondo la teoria di Volta, l'elettrolita tende a riportare all'uguaglianza i potenziali dei metalli a contatto, di modo che, la forza elettromotrice che risiede alla giunzione dei metalli non essendo più controbilanciata, si produce una corrente permanente. L'energia di questa corrente è fornita dall'azione chimica che si stabilisce tra l'elettrodo e il metallo.

248. Ma l'effetto elettrico può pure essere prodotto senza azione chimica, da ogni altro mezzo che permette di riportare all'uguaglianza i potenziali dei metalli a contatto. Così, in una esperienza di Sir W. Thomson¹, un imbuto di rame è messo a contatto con un cilindro verticale di zinco; si fa colare dall'imbuto della limatura di rame, di modo essa lasci l'imbuto e si separi verso la metà del cilindro di zinco, per cadere poi in un recipiente isolato posto al di sotto. Si trova che il recipiente prende una carica negativa che aumenta fintanto che la limatura continua a cadere. Nello stesso tempo, il cilindro di zinco e l'imbuto di rame che esso racchiude assumono una carica positiva sempre maggiore.

Se ora il recipiente è collegato con un filo al cilindro di zinco, questo filo sarà attraversato da una corrente positiva che va dal cilindro al recipiente. La corrente di limatura, ogni granello della quale è carico negativamente per induzione, costituisce una corrente negativa che va dall'imbuto al recipiente o, in altre parole, una corrente positiva che va dal recipiente all'imbuto di rame. La corrente positiva va quindi dallo zinco al rame dall'aria attraverso le limature, e dal rame allo zinco dai punti di contatti dei metalli, così come nelle disposizioni voltaiche comuni; ma, nel caso attuale, la forza che mantiene la corrente non è più l'azione chimica, ma bensì la gravità che agisce tra l'imbuto carico positivamente e le limature cariche negativamente.

¹*North British Review*, p. 353, 1864; e *Proc. R. S.*, 20 giugno 1867.

249. La teoria dell'elettricità di contatto ha ricevuto una conferma significativa dalla scoperta di Peltier: se una corrente elettrica passa per il punto di contatto di due metalli, questo contatto si scalda se la corrente è in un verso, e si raffredda se è nel verso opposto. Ci si deve ricordare che una corrente produce sempre del calore attraversando un metallo, poiché incontra della resistenza; l'effetto di raffreddamento dell'insieme del conduttore deve essere sempre inferiore all'effetto di riscaldamento. E dobbiamo distinguere la produzione di calore che è dovuta alla resistenza ordinaria in ogni metallo dalla produzione o dall'assorbimento di calore che avviene nel punto di contatto di due metalli. Diremo nel primo caso che la corrente produce calore per attrito e abbiamo visto che questo calore è proporzionale al quadrato dell'intensità e che è lo stesso, qualunque sia il verso positivo o negativo della corrente. Il secondo fenomeno può essere detto *effetto Peltier*, e cambia il segno contemporaneamente alla corrente.

Il calore totale prodotto in un conduttore complesso formato da due metalli si può esprimere con

$$H = \frac{R}{J} C^2 t - \Pi C t$$

essendo H la quantità di calore, J l'equivalente meccanico dell'unità di calore, R la resistenza del conduttore, C l'intensità, t il tempo, Π il coefficiente dell'effetto Peltier, cioè la quantità di calore assorbita nel punto di contatto per il passaggio dell'unità di corrente nell'unità di tempo.

Ora il calore generato è meccanicamente equivalente al lavoro compiuto nel conduttore in senso contrario rispetto alle forze elettriche; esso è quindi uguale al prodotto dell'intensità per la forza elettromotrice che lo determina. Quindi, se E è la forza elettromotrice esterna, che determina il passaggio della corrente nel conduttore,

$$JH = CEt = RC^2t - J\Pi Ct$$

da cui

$$E = RC - J\Pi$$

Si vede da questa equazione che la forza elettromotrice esterna necessaria per far passare la corrente nel conduttore complesso è inferiore a quella che corrisponderebbe alla sola resistenza del conduttore della forza elettromotrice $J\Pi$. Pertanto $J\Pi$ rappresenta la forza elettromotrice di contatto che agisce nel verso positivo alla giunzione di due metalli.

Questa applicazione della teoria dinamica del calore alla determinazione di una forza elettromotrice locale si deve a Sir W. Thomson²; essa ha una grande importanza scientifica, poiché non si potrebbe fare uso del metodo consueto che consiste nel collegare con fili due punti del conduttore complesso agli elettrodi di un galvanometro o di un elettroscopio, precisamente a causa delle forze di contatto che si producono alla giunzione dei fili con le sostanze che formano il conduttore complesso. Nel metodo termico, al contrario, sappiamo che la corrente elettrica è la sola sorgente di energia, e che, in una certa parte del circuito, non compie altro lavoro che scaldare questa parte del circuito. Se quindi possiamo misurare la quantità di elettricità che passa, e la quantità di calore generato o assorbito, potremmo determinare la forza elettromotrice necessaria per emettere questa corrente attraverso questa parte del conduttore; e questa misura è interamente indipendente dall'effetto delle forze di contatto nelle altre parti del circuito.

La forza elettromotrice prodotta alla giunzione di due metalli, e misurata come detto, non basta a rendere conto della forza elettromotrice osservata da Volta, e descritta al § 246. Quest'ultima è in generale assai più grande di quella trattata qui, ed essa è spesso di segno contrario. Pertanto vi deve essere un errore nell'ipotesi che si possa misurare il potenziale di un metallo da quello dell'aria che è a contatto con esso, e si deve cercare la maggior parte della forza elettromotrice di Volta, non più alla giunzione dei metalli, ma su una delle superfici o sulle due che separano i metalli dall'aria o dalla mezzo che forma il terzo elemento del circuito.

250. La scoperta, dovuta a Seebeck, delle correnti termoelettriche che si producono nei circuiti di numerosi metalli le cui giunzioni sono a temperature differenti, mostra che queste forze di contatto non si fanno sempre equilibrio in un circuito chiuso. Ma è chiaro che, in un circuito

²*Proc. R. S. Edin.*, 15 dicembre 1881; e *Proc. R. S. Edin.*, 1854.

chiuso formato da diversi metalli che sono tutti a una stessa temperatura, le forze di contatto si devono equilibrare. Se fosse altrimenti, si formerebbe nel circuito una corrente che si potrebbe impiegare nel far funzionare una macchina, o a produrre calore nel circuito, cioè a compiere del lavoro, senza spendere nello stesso tempo energia; poiché il circuito è interamente alla stessa temperatura, non si produce alcun cambiamento, chimico o altro. Pertanto, rappresentando con Π_{ab} l'effetto Peltier alla giunzione dei due metalli a e b , quando la corrente passa da a a b , dobbiamo avere per un circuito di due metalli alla stessa temperatura

$$\Pi_{ab} + \Pi_{ba} = 0$$

e, per un circuito di tre metalli, dobbiamo avere

$$\Pi_{ab} + \Pi_{bc} + \Pi_{ca} = 0$$

Da questa equazione, risulta che i tre effetti di Peltier non sono indipendenti, ma che uno di essi si può dedurre dagli altri due. Se, per esempio, prendiamo il metallo c come termine di confronto, e se poniamo

$$P_a = J\Pi_{ac} \quad P_b = J\Pi_{bc}$$

si avrà

$$J\Pi_{ab} = P_a - P_b$$

La quantità P_a è una funzione della temperatura e dipende dalla natura del metallo a .

251. Magnus ha pure mostrato che, in un circuito metallico, in un circuito con un solo metallo, non si forma corrente, qualunque siano i valori di sezione e di temperatura nei diversi punti del conduttore.

Poiché, in questo caso, vi è conduzione di calore, cioè dissipazione di energia, non si può più considerare questo risultato come evidente, così come il precedente. Così, la forza elettromotrice tra due punti del circuito potrebbe variare, secondo che la corrente va da una parte spessa a una sottile, o inversamente, secondo che passi rapidamente o lentamente da una parte calda a una fredda, o inversamente; ciò che renderebbe possibile l'esistenza di una corrente in un circuito di un solo metallo diversamente caldo in questi differenti punti.

Allora, ripetendo lo stesso ragionamento del caso del fenomeno Peltier, si trova che il passaggio di una corrente in un conduttore di un solo metallico non può produrre effetto termico cambiante di segno contemporaneamente alla corrente, come se la corrente passasse da punti dove la temperatura è alta a quelli dove è bassa, o inversamente; e, chiamando Π la quantità di calore emessa in un tale conduttore da una corrente che passa da un punto a temperatura x a uno a temperatura y , si ha

$$JH = RC^2t - S_{xy}Ct$$

dove S_{xy} è la forza elettromotrice che tende a mantenere la corrente. Siano x, y, z le temperature in tre punti di un circuito omogeneo, dobbiamo avere, secondo Magnus,

$$S_{yz} + S_{zx} + S_{xy} = 0$$

Se supponiamo che z sia la temperatura zero, e se poniamo

$$Q_x = S_{xz} \quad Q_y = S_{yz}$$

troviamo

$$S_{xy} = Q_x - Q_y$$

dove Q_x è una funzione della temperatura x , la cui forma dipende dalla natura del metallo.

Se ora consideriamo un circuito formato da due metalli, a e b , dove la temperatura è x , nel punto in cui la corrente passa da a in b , e dove la temperatura è y nel punto dove la corrente passa da d in a , la forza elettromotrice sarà

$$F = P_{ax} - P_{bx} + Q_{bx} - Q_{by} + P_{by} - P_{ay} + Q_{ay} - Q_{ax}$$

dove P_{ax} rappresenta il valore di P per il metallo a e la temperatura x , ossia

$$F = P_{ax} - Q_{ax} - (P_{ay} - Q_{ay}) - (P_{bx} - Q_{bx}) + P_{by} - Q_{by}$$

E poiché, in un circuito chiuso formato da numerosi metalli a diverse temperature, vi sono in generale correnti termoelettriche, c'è che P e Q sono in generali differenti per uno stesso metallo e a una stessa temperatura.

252. Fu Sir W. Thomson che, nella Memoria già citata, ha dimostrato per primo l'esistenza della quantità Q , partendo dal fenomeno dell'inversione elettrica scoperto da Cumming. Questo fisico ha trovato che l'ordine termoelettrico di certi metalli non è lo stesso ad alta e a bassa temperatura, di modo che a una certa temperatura due metalli possono essere neutri l'uno per l'altro. Così, in un circuito formata da rame e ferro, di cui si mantiene una saldatura alla temperatura ordinaria, mentre si innalza la temperatura della seconda saldatura, si stabilisce una corrente che va dal rame al ferro dalla saldatura calda; e la forza elettromotrice continua ad aumentare finché la saldatura calda ha raggiunto una temperatura T , che, secondo Thomson, è di circa $284^{\circ}C$. Se si continua ad innalzare la temperatura della saldatura calda, la forza elettromotrice diminuisce, e infine, se si innalza sufficientemente la temperatura, la corrente cambia verso. L'inversione di corrente si può ottenere più facilmente innalzando la temperatura della saldatura fredda. Se la saldatura di due contatti è superiore a T , la corrente si stabilisce dal ferro al rame dal contatto caldo, cioè nel verso opposto della corrente ottenuta quando i due contatti sono al di sotto di T .

Pertanto, se uno dei contatti è alla temperatura neutra T , la corrente si stabilisce dal rame al ferro per questo contatto, che l'altra saldatura sia più calda o più fredda.

253. Thomson fa su questi fatti il seguente ragionamento: Supponiamo il secondo contatto a una temperatura inferiore a T . Si può impiegare la corrente per azionare una macchina o per produrre del calore in un filo, e questa spesa di energia deve essere compensata da una trasformazione di calore in energia elettrica: del calore deve quindi scomparire in qualche punto del circuito. Il ferro e il rame sono neutri l'uno per l'altro alla temperatura T ; non può quindi prodursi al contatto caldo l'effetto termico reversibile, e, al contatto freddo, la corrente deve, dal principio di Peltier, produrre una emissione di calore. Pertanto i soli punti dove possa scomparire del calore sono le parti in ferro o in rame del circuito: così, una corrente che attraversa il ferro dai punti caldi a quelli freddi deve raffreddare il ferro, oppure una corrente che attraversa il rame dai punti freddi a quelli caldi deve raffreddare il rame, oppure infine questi due effetti si producono contemporaneamente. Con una serie complicata di ingegnose esperienze, Thomson è riuscito a mettere in evidenza l'azione termica reversibile della corrente che passa tra i punti a temperature diverse, e ha riconosciuto che la corrente produce effetti contrari nel rame e nel ferro³.

Quando un fluido materiale scorre lungo un tubo, passando da una parte calda a una fredda, scalda il tubo; quando passa da una parte fredda a una calda, raffredda il tubo, e questi effetti dipendono dalla capacità calorifica specifica del fluido. Se supponiamo che l'elettricità, positiva o negativa, sia un fluido materiale, potremo misurare il suo calore specifico dai suoi effetti termici su un conduttore diversamente caldo in diversi punti. Le esperienze di Thomson mostrano che l'elettricità positiva nel rame, negativa nel ferro, trasporta del calore dalle parti calde a quelle fredde. Se quindi supponiamo che l'elettricità positiva, oppure la negativa sia un fluido in grado di scaldarsi, di raffreddarsi e di cedere calore ad altri corpi, troviamo queste ipotesi in difetto nel caso del ferro per l'elettricità positiva, del rame per l'elettricità negativa; bisogna quindi abbandonare l'una e l'altra supposizione.

Questa predizione scientifica di un effetto reversibile prodotto dalla corrente elettrica in un conduttore a un solo metallo diversamente riscaldato è un esempio istruttivo di ciò che può l'applicazione della teoria della conservazione dell'energia nell'aprirci nuove prospettive di ricerca scientifica. Thomson ha pure impiegato la seconda legge della Termodinamica per stabilire le relazioni tra le quantità che abbiamo indicato con P e Q , e per studiare le proprietà termoelettriche che potrebbero avere corpi non isotropi. Ha pure studiato sperimentalmente in quali condizioni di pressione, di magnetizzazione, ecc., si possono sviluppare tali proprietà.

³*On the electrodynamic qualities of metals (Phil. Trans., 1856)*

254. Il professor Tait⁴ ha studiato ultimamente la forza elettromotrice di circuito termoelettrici formati da metalli differenti i cui contatti sono a temperature diverse. Trova che la forza elettromotrice di un circuito si può rappresentare molto esattamente con la formula

$$E = a(t_1 - t_2) \left[t_0 - \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \right]$$

dove t_1 è la temperatura assoluta del contatto caldo, t_2 quella del contatto freddo, e t_0 quella dove i due metalli sono neutri l'uno per l'altro. Essendo questa legge stata verificata tra limiti di temperatura molto estesi da lui stesso e dai suoi studenti, spera di potersi servire del circuito termoelettrico come di uno strumento termometrico nelle sue esperienze sulla conduzione del calore, e in altri casi dove il termometro a mercurio non è di comodo impiego, o non presenta un campo di variazioni molto esteso.

Dalla teoria di Tait, la quantità che Thomson chiama *calore specifico dell'elettricità* è proporzionale alla temperatura assoluta per ogni metallo puro, la sua grandezza e anche il suo segno variabili per i diversi metalli. Da ciò ricava, per mezzo dei principi della Termodinamica, i risultati seguenti: Siano $k_a t, k_b t, k_c t$ i calori specifici dell'elettricità nei tre metalli a, b, c ; siano T_{bc}, T_{ca}, T_{ab} le temperature alle quali le coppie formate con questi metalli sono neutri; le equazioni

$$(k_b - k_c) T_{bc} + (k_c - k_a) T_{ca} + (k_a - k_b) T_{ab} = 0$$

$$J\Pi_{ab} = (k_a - k_b) t (T_{ab} - t)$$

$$E_{ab} = (k_a - k_b) (t_1 - t_2) \left[T_{ab} - \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \right]$$

esprimono le relazioni tra le temperature di neutralizzazione, il valore dell'effetto Peltier, e la forza elettromotrice, in un circuito termoelettrico.

⁴*Proc. R. S. Edin.*, sessione 1870-71, p. 308; e 18 dicembre 1871.

Elettrolisi

Conduzione elettrolitica. 255. Ho già detto che, quando una corrente elettrica attraversa, in un punto del suo circuito, certe sostanze composte dette *elettroliti*, il passaggio di corrente è accompagnato da una operazione chimica detta *elettrolisi*: la sostanza si scompone in due elementi o ioni; uno di essi, detto *anione* o elemento elettronegativo, appare all'anodo, cioè nel luogo in cui la corrente penetra nell'elettrolita; l'altro, detto *catione* o elemento elettropositivo, appare al catodo, cioè nel punto in cui la corrente esce dall'elettrolita.

Lo studio completo dell'elettrolisi riguarda tanto la Chimica quanto l'Elettricità. Noi la considereremo dal punto di vista elettrico, senza discutere le sue applicazioni alla teoria della struttura dei composti chimici.

Di tutti i fenomeni elettrici, l'elettrolisi sembra essere la più idonea a fornire immagini esatte della natura della corrente elettrica; poiché troviamo qui correnti di materia ordinaria e correnti di elettricità che sono parti essenziali di uno stesso fenomeno.

Ed è senza dubbio per questa ragione che, nello stato imperfetto delle nostre conoscenze attuali in elettricità, abbiamo teorie così poco soddisfacenti dell'elettrolisi.

Ecco quale è la legge fondamentale dell'elettrolisi stabilita da Faraday e confermata finora dalle esperienze di Beetz, di Hittorf e di altri ancora:

Il numero di equivalenti elettrochimici di un elettrolita, che sono scomposti in un tempo dato dal passaggio di una corrente elettrica, è uguale al numero delle unità di elettricità trasportate dalla corrente nello stesso spazio di tempo.

L'equivalente elettrochimico di una sostanza è la quantità di questa sostanza che è scomposta dall'unità di corrente attraversante la sostanza nell'unità di tempo o, in altre parole, dal passaggio dell'unità di elettricità. Quando l'unità di elettricità è definita in misura assoluta, il valore assoluto dell'equivalente elettrochimico di ogni sostanza si può determinare in grani o in grammi.

Gli equivalenti elettrochimici di diverse sostanze sono proporzionali ai loro equivalenti chimici ordinari. Ma gli equivalenti chimici sono solo rapporti numerici secondo i quali si combinano i corpi, mentre gli equivalenti elettrochimici sono quantità definite di materia, dipendenti dalla definizione di unità di elettricità.

Ogni elettrolita è formato da due elementi che, durante l'elettrolisi, compaiono nei punti in cui la corrente entra e esce in questi punti soltanto. Se quindi immaginiamo una superficie qualunque descritta nella massa dell'elettrolita, la grandezza dell'azione elettrolitica che si produce attraverso questa superficie, misurata dal numero di equivalenti elettrochimici dei due componenti che sono trasportati attraverso questa superficie in direzioni opposte, è proporzionale alla corrente elettrica totale che passa attraverso la superficie.

Il trasporto di ioni in direzioni opposte, attraverso la massa dell'elettrolita, fa quindi parte integrante del fenomeno della conduzione di correnti elettriche attraverso gli elettroliti. In ogni punto dell'elettrolita dove passa una corrente elettrica esistono così due correnti materiali di verso contrario una di anioni e l'altra di cationi, le cui linee di flusso sono identiche a quelle della corrente elettrica, e che gli sono proporzionali in grandezza.

È quindi naturale supporre che le correnti di ioni sono correnti elettriche di convezione, e, in particolare, che ogni molecola di catione è carica di una certa quantità fissa di elettricità positiva, la stessa per le molecole di ogni specie di catione, e che ogni molecola di anione è carica di una uguale quantità di elettricità negativa.

I movimenti opposti degli ioni nell'elettrolita ci danno quindi una rappresentazione fisica completa della corrente elettrica. Si può così confrontare questo movimento di ioni al movimento

dei liquidi o dei gas che si mescolano per diffusione: vi è tuttavia tra i due fenomeni questa differenza che, nella diffusione, le differenti sostanze sono soltanto mescolate e che la miscela non è omogenea; nell'elettrolisi le due sostanze sono combinate chimicamente, e l'elettrolita è omogeneo. Nella diffusione, la causa che determina il movimento di una sostanza in una direzione data è una diminuzione della quantità di questa sostanza che è contenuta nell'unità di volume, in questa direzione; nell'elettrolisi, il movimento di ogni ione è dovuto alla forza elettromotrice che agisce sulle molecole elettrizzate.

256. Clausius, che ha molto studiato la teoria dell'agitazione molecolare dei corpi, suppose che le molecole di tutti i corpi sono in un perpetuo stato di moto; nei corpi solidi, la molecola non si allontana dalla sua posizione iniziale oltre una certa distanza; al contrario, nei fluidi, una molecola che si è allontanata a una certa distanza dalla sua posizione iniziale è sollecitata a muoversi più lontano che a tornare indietro. Le molecole di un fluido che sembra a riposo cambiano costantemente posizione e passano indifferentemente da un punto a un altro del fluido. Clausius suppose che, in un fluido composto, non sono sole le molecole composte che si producono tra queste molecole composte, gli atomi di cui esse sono formate si separano frequentemente, si associano ad altri, e in tal modo un dato atomo di una certa specie è associato a volte a uno e a volte a un altro degli atomi dell'altra specie. Questo fenomeno si produrrebbe in ogni istante in un liquido. Quando una forza elettromotrice agisce sul liquido, questi movimenti, che si effettuano indifferentemente in tutte le direzioni, subiscono l'azione della forza elettromotrice: le molecole cariche positivamente tendono a muoversi verso il catodo piuttosto che verso l'anodo, le molecole cariche negativamente tendono a prendere un moto in verso contrario. Di conseguenza, negli istanti in cui esse sono libere, le molecole di catione si precipitano verso il catodo; ma in ogni istante il loro cammino è arrestato, poiché, incontrando le molecole d'anione che precipitano in massa nella direzione opposta, si uniscono con esse in raggruppamenti temporanei.

257. Questa teoria di Clausius ci permette di comprendere come sia necessaria una forza elettromotrice di grandezza finita per effettuare la scomposizione materiale di un elettrolita, e come, al contrario, la conduzione di corrente nell'elettrolita avvenga secondo la legge di Ohm, di modo che la forza elettromotrice, anche la più debole, produca in un elettrolita una corrente di grandezza proporzionale.

Secondo la teoria di Clausius, la scomposizione e ricomposizione dell'elettrolita avvengono costantemente, anche quando non vi è corrente, e la forza elettromotrice più piccola basta a dirigere queste operazioni in una certa misura e per produrre così le correnti di ioni e di elettricità che fanno parte dello stesso fenomeno. Ma, all'interno dell'elettrolita, gli ioni non sono mai messi in libertà in quantità finita, ed è questa messa in libertà degli ioni che esige una forza elettromotrice finita. Gli ioni si accumulano agli elettrodi; via via che essi arrivano, le porzioni successive degli ioni incontrano molecole dell'altra specie, tutte pronte ad entrare in combinazione, ma esse sono sospinte di forza in compagnia delle molecole della loro stessa specie, con le quali non possono combinarsi. La forza elettromotrice necessaria per produrre questo effetto è di grandezza finita, e origina una forza elettromotrice contraria che produce una corrente di verso contrario quando le altre forze elettromotrici sono soppresse. Quando si manifesta questa forza elettromotrice inversa, dovuta all'accumulo degli ioni sugli elettrodi, si dice che gli elettrodi sono polarizzati.

258. Uno dei metodi migliori per determinare se un corpo è oppure no un elettrolita, consiste nel porlo tra elettrodi di platino e di farlo attraversare, per qualche tempo, da una corrente; poi, staccando gli elettrodi della pila voltaica e collegandolo a un galvanometro, si osserva se il galvanometro è attraversato da una corrente inversa dovuta alla polarizzazione degli elettrodi. L'esistenza di una simile corrente, essendo dovuta all'accumulo sui due elettrodi di sostanze differenti, dimostra che la materia ha subito una scomposizione elettrolitica sotto l'azione della corrente iniziale della pila. Questo metodo si può applicare spesso nei casi in cui i metodi chimici diretti farebbero fatica a rivelare la presenza di prodotti di scomposizione sugli elettrodi (si veda § 271).

259. Fin qui la teoria dell'elettrolisi sembra essere soddisfacente. Essa spiega la corrente elettrica, di cui non comprendiamo la natura, tramite le correnti degli elementi materiali dell'elettrolita, i cui movimenti, per non essere visibili all'occhio umano, non sono meno facili da dimostrare. Essa spiega chiaramente, così come ha mostrato Faraday, perché un elettrolita che è conduttore allo stato liquido non lo è più allo stato solido; poiché se le molecole non possono circolare liberamente da un punto a un altro, non vi può essere conduzione elettrolitica: pertanto, per essere conduttrice, la sostanza deve essere resa liquida, mediante fusione o soluzione.

Ma, se andiamo oltre, se ammettiamo che nell'elettrolita le molecole degli ioni sono realmente cariche di quantità definite di elettricità positiva e negativa, di modo che la corrente elettrolitica sarebbe solo una semplice corrente di convezione, questa ipotesi aggiuntiva ci porta su un terreno alquanto difficile.

In primo luogo, bisogna ammettere che, in ogni elettrolita, ogni molecola di catione, nel momento in cui è liberata sul catodo, cede a questo una carica di elettricità positiva la cui grandezza è la stessa per tutte le molecole, non solo di questo catodo, ma anche di ogni altro catodo. Analogamente ogni molecola di anione liberata dà all'anodo una carica di elettricità negativa, della stessa grandezza della carica positiva dovuta a una molecole di catione, ma di segno contrario.

Se, invece di una sola molecola, consideriamo un insieme di molecole formanti un equivalente elettrochimico dello ione, la carica totale di tutte queste molecole è, come abbiamo visto, una unità di elettricità positiva o negativa.

260. Non sappiamo ancora bene quante molecole vi sono in un equivalente elettrochimico di una sostanza, ma la teoria chimica molecolare, che è confermata da un grande numero di considerazioni fisiche, suppone che il numero di molecole contenute in un equivalente elettrochimico è lo stesso per tutte le sostanze. Possiamo quindi, nelle considerazioni molecolari, ammettere che il numero delle molecole contenute in un equivalente elettrochimico è un certo numero N , sconosciuto per il momento, ma che più tardi si potrà trovare il modo di determinarlo.

Allora ogni molecola, liberandosi dallo stato di combinazione, abbandona una carica il cui valore è $\frac{1}{N}$, carica che è positiva per il catione e negativa per l'anione. Questa quantità determinata è ciò che chiamiamo *carica molecolare*. Se la si conoscesse, sarebbe l'unità di elettricità più naturale.

Finora abbiamo abbiamo solo precisato le nostre idee, ricorrendo all'immaginazione per rappresentarci come le molecole di caricano e scaricano.

La liberazione di ioni, l'uscita dell'elettricità positiva dall'anodo, il suo ingresso nel catodo sono fatti simultanei. Gli ioni liberati non sono elettrizzati; pertanto, mentre sono combinati, le loro cariche molecolari sono tali come le abbiamo descritte.

Ma, se è facile parlarne, non è altrettanto facile immaginare l'elettrizzazione di una molecola.

Sappiamo che, se due metalli sono messi a contatto in un punto, il resto della loro superficie si elettrizza; che, se questi metalli sono a forma di piatti separati da uno strato d'aria molto sottile, la carica di ogni piatto può divenire considerevole. Si può supporre che si produca qualcosa di analogo quando i due elementi di un elettrolita sono combinati; si può supporre che, in ogni coppia di molecole, vi sia un punto di contatto e che il resto delle superfici è caricato dall'elettricità dovuta alla forza elettromotrice di contatto.

Ma, per spiegare il fenomeno, dobbiamo mostrare perché la carica prodotta così in ogni molecola ha una grandezza costante; perché, per esempio, una molecola di cloro combinata a una di zinco, la carica molecolare è la stessa di quando fosse combinata con del rame, allorché la forza elettromotrice della coppia cloro-zinco è assai più grande di quella della coppia cloro-rame. Se la carica delle molecole è l'effetto della forza elettromotrice di contatto, perché forze elettromotrici di intensità differente producono cariche uguali?

Supponiamo tuttavia di passare oltre a questa difficoltà, limitandoci ad affermare il fatto che la carica molecolare ha un valore costante; e, per facilità di esposizione, chiamiamo questa carica molecolare costante una *molecola di elettricità*.

Questa espressione, per quanto imperfetta sia, così poco in armonia con il resto di questa

Opera, ci permetterà almeno di enunciare chiaramente ciò che si sa riguardo all'elettrolisi, e di valutare le difficoltà che si presentano.

Ogni elettrolita deve essere considerato come un composto binario formato dall'anione e dal catione. L'anione o catione, o entrambi, possono essere corpi composti, in modo che la molecola di anione o di catione possa contenere un numero qualunque di atomi semplici. Una molecola di anione e una molecola di catione combinate insieme formano una molecola di elettrolita.

Per poter funzionare come anione in un elettrolita, la molecola che svolge questo il ruolo deve essere carica di ciò che abbiamo chiamato una molecola di elettricità negativa; per agire come catione, la molecola deve essere carica di una molecola di elettricità positiva.

Queste cariche non sono legate alle molecole se non quando sono combinate come anione e catione nell'elettrolita.

Quando le molecole sono elettrolizzate, cedono le loro cariche agli elettrodi, e, una volte liberate dalla combinazione, si presentano allo stato di corpi non elettrizzati.

Se una stessa molecola è in grado di funzionare come anione in un elettrolita, come catione in un altro, e, inoltre, di entrare in combinazioni che non sono elettroliti, bisogna ammettere che questa molecola riceve una carica di elettricità positiva quando agisce come catione, una carica negativa quando agisce come anione, infine che non ha carica quando è in un corpo non elettrolita.

Così l'anodo agisce come anione negli ioduri metallici e nell'acido iodidrico e, come catione, nel bromuro di iodio.

Questa teoria delle cariche molecolari può servire a richiamare un buon numero di fatti relativi all'elettrolisi; ma è molto poco probabile che, il giorno in cui comprenderemo la reale natura dell'elettrolisi, non conserveremo nulla della teoria delle cariche molecolari; poiché avremo allora acquisito una base sicura per costruire l'effettiva teoria delle correnti elettriche, e per renderci indipendenti da queste teorie provvisorie.

261. Uno dei passi più importanti che abbiamo compiuto nella conoscenza dell'elettrolisi è stato distinguere i fenomeni chimici secondari che sono prodotti dalla liberazione di ioni agli elettrodi.

In molti casi, le sostanze che si trovano agli elettrodi non sono gli ioni propriamente detti dell'elettrolisi, ma i prodotti dell'azione di questi ioni sull'elettrolita.

Così, quando una soluzione di solfato di sodio è scomposta dalla corrente che attraversa l'acido solforico, si liberano ai due anodi quantità uguali di ossigeno, ai due catodi quantità uguali di idrogeno, così come nel solfato di sodio che nell'acido forte.

Ma se l'elettrolisi è effettuata in opportuni recipienti, tubi a U o vasi muniti di diaframmi porosi, di modo che si possa esaminare a parte la sostanza che circonda ogni elettrodo, si trova che all'anodo del solfato di sodio vi è un equivalente di acido solforico, nello stesso tempo di un equivalente di ossigeno, e al catodo un equivalente di sodio contemporaneamente a due equivalenti di idrogeno.

Sembrerebbe quindi a prima vista che, conformemente all'antica teoria sulla costituzione dei sali, il solfato di sodio sia stato scomposto nei suoi elementi: acido solforico e sodio, e che l'acqua della soluzione sia stata separata contemporaneamente in ossigeno e idrogeno. Ma una tale spiegazione obbligherebbe ad ammettere che la stessa corrente, che, attraversando l'acido solforico forte, scompone un equivalente di acqua, può, quando attraversa la soluzione di solfato di sodio, scomporre un equivalente di sale e un equivalente di acqua; ciò che è contrario alla legge degli equivalenti elettrochimici.

Ma supponiamo che gli elementi del solfato di sodio sono, non SO_3 e NaO , ma SO_4 e Na , non acido solforico e soda, ma solfato e sodio: allora il solfato va verso l'anodo e viene liberato; ma, siccome non può esistere allo stato libero, la sua molecola si spezza in acido solforico e ossigeno, e vi è un equivalente di ciascuno. Nello stesso tempo, il sodio liberato al catodo vi scompone l'acqua e forma un equivalente di soda e due di idrogeno.

Nell'acido solforico forte, i gas che si raccolgono agli elettrodi sono gli elementi dell'acqua, un volume di ossigeno, due volumi di idrogeno. La quantità di acido solforico aumenta così

all'anodo, ma non di una unità uguale a un equivalente.

Si dubita se l'acqua pura è un elettrolita oppure no: più essa è pura, più è grande la resistenza che presenta alla conduzione elettrolitica. Le minime tracce di materia estranee bastano a diminuire fortemente la sua resistenza elettrica. I diversi osservatori hanno ottenuto per la resistenza elettrica dell'acqua valori così diversi che non si potrebbe considerare questa quantità come stabilita. Più l'acqua è pura, più la sua resistenza è grande; e, se si potesse ottenere acqua completamente pura, non ci sono si può dubbi che essa non conduca alcuna elettricità.

Fintanto che l'acqua era considerata come un elettrolita, e che era presa come tipo di elettrolita, vi erano forti ragioni di sostenere che essa è un composto binario, e che due volumi di idrogeno sono chimicamente equivalenti a un volume di ossigeno. Ma, se si ammette che l'acqua non è un elettrolita, si è liberi di supporre che volumi uguali di ossigeno e di idrogeno sono chimicamente equivalenti.

La teoria dinamica dei gas non porta a supporre che, nei gas perfetti, volumi uguali contengono sempre uno stesso numero di molecole, e che la parte principale del calore specifico, quella che dipende dal moto di agitazione delle molecole le une attorno alle altre, è la stessa per uno stesso numero di molecole di ogni gas. Siamo quindi portati a preferire un sistema chimico nel quale si considerano come equivalenti volumi uguali di idrogeno e di ossigeno, e dove l'acqua è considerata come formata di due equivalenti di idrogeno e di un equivalente di ossigeno, cioè come un corpo che non è senza dubbio in grado di essere elettrolizzato direttamente.

L'elettrolisi stabilisce quindi il rapporto stretto dei fenomeni elettrici e dei fenomeni di combinazione chimica, ma il fatto che tutti i composti chimici non sono elettroliti mostra che la combinazione chimica è un fenomeno più complesso di quelli puramente elettrici. Così, le combinazioni dei metalli tra loro, sebbene formati di elementi buoni conduttori e posti a livelli differenti della scala di elettrizzazione per contatto, non sono scomposti dalla corrente, anche allo stato fluido. La maggior parte delle combinazioni tra sostanze che agiscono come anioni non è conduttrice, né, di conseguenza, elettroliti. E, oltre a questo, vi è ancora un grande numero di composti, che, contenendo gli stessi elementi degli elettroliti, ma in proporzioni diverse, non sono conduttori né, di conseguenza, elettroliti.

Conservazione dell'energia nell'elettrolisi. 262. Consideriamo un circuito voltaico formato da una pila, un filo e un voltmetro.

Mentre passa una unità di elettricità in ogni sezione del circuito, vi è elettrolisi di un equivalente elettrochimico di ogni sostanza contenuta nei recipienti della pila o nel voltmetro.

Si può determinare la quantità di energia meccanica equivalente a un'operazione chimica data, trasformando in calore tutta l'energia dovuta a questa operazione ed esprimendo questo calore in unità dinamiche: basta solo moltiplicare il numero di unità termiche per l'equivalente meccanico del calore, determinato da Joule.

Nel caso in cui questo metodo diretto non è applicabile, si portano le sostanze a uno stesso stato finale prendendo successivamente come punto di partenza lo stato in cui si trovavano prima dell'operazione chimica, e quello dove sono dopo tale operazione; se si possono valutare le quantità di calore liberate in questi due casi, l'equivalente termico dell'operazione chimica è la differenza tra queste due quantità.

Joule ha riconosciuto che se l'azione chimica, trasporta una corrente voltaica, la quantità di calore emesso negli elementi della pila è inferiore alla quantità di calore equivalente alle azioni chimiche che si producono in questi elementi, e che il resto di tale calore si sviluppa nei fili di comunicazione, oppure, se vi è una macchina elettromagnetica nel circuito, che esso si ritrova in parte nel lavoro meccanico di questa macchina.

Così, gli elettrodi di una pila voltaica essendo collegati dapprima con un filo grosso e corto, poi con un filo lungo e sottile, il calore liberato nella pila, mentre si scioglie un grammo di zinco, è più grande nel primo caso che nel secondo; ma il calore sviluppato nel filo è maggiore nel secondo caso che nel primo. E la somma dei calori liberati nella pila e nel filo durante lo scioglimento di un grammo di zinco è la stessa nei due casi. Questo risultato è stato stabilito da Joule con esperienze dirette.

Il rapporto tra il calore liberato nella pila e quello nel filo è uguale al rapporto tra le resistenze della pila e del filo. Se quindi si prende un filo sufficientemente resistente, quasi tutto il calore sarà emesso dal filo; se lo si prende sufficientemente conduttore, quasi tutto il calore sarà emesso dalla pila.

Prendiamo un filo di grande resistenza: la quantità di calore che è sviluppato è uguale, in misura dinamica, al prodotto della quantità di elettricità che passa per la forza elettromotrice che la fa muovere nel filo.

263. Ora, nel tempo che un equivalente elettrochimico della sostanza posta nella pila subisce la reazione chimica che produce corrente, passa nel filo una unità di elettricità. Pertanto, in questo caso, il calore prodotto dal passaggio dell'unità di elettricità ha per misura la forza elettromotrice. Ma questo calore è quello che sviluppa, nella pia o nel filo, un equivalente elettrochimico della sostanza, mentre subisce l'operazione chimica considerata-

Da ciò l'importante teorema che segue, dimostrato per la prima volta da Thomson (*Phil. Mag.*, dicembre 1851):

La forza elettromotrice di un sistema elettrochimico è, in misura assoluta, uguale all'equivalente meccanico dell'azione chimica su un equivalente elettrochimico della sostanza.

Gli equivalenti termici di un grande numero di reazioni chimiche è stato determinato da Andrews, Hess, Favre, Silbermann, ecc., e lo si può dedurre dagli equivalenti meccanici moltiplicando per l'equivalente meccanico del calore.

Non solo questo teorema ci permette di valutare, partendo da dati puramente termici, la forza elettromotrice di differenti sistemi voltaici, e di calcolare le forze elettromotrici necessarie a produrre l'elettrolisi in diversi casi, ma anche ci offre il mezzo per misurare effettivamente le affinità chimiche.

Da lungo tempo si sa che l'affinità chimica, cioè la tendenza alla produzione di un certo cambiamento chimico, è più grande in certi casi che in altri; ma non se ne potevano fare misure effettive fino al giorno in cui è stato dimostrato che, in certe circostanze, questa tendenza è esattamente equivalente a una forza elettromotrice, e, di conseguenza, si può misurare secondo gli stessi principi delle forze elettromotrici.

E dal momento che l'affinità chimica può, in certi casi, essere soggetta a misura, tutta la teoria delle azioni chimiche, delle proporzioni nelle quali esse si stabiliscono, dello spostamento da una sostanza ad un'altra, ecc, diviene assai più facile da comprendere di quando l'affinità chimica era considerata come una qualità *sui generis*, impossibile da misurare numericamente.

Se o prodotti dell'elettrolisi hanno un maggior volume dell'elettrolisi, del lavoro è speso durante l'elettrolisi per vincere la pressione. Se il volume di un equivalente elettrochimico dell'elettrolita aumenta di un volume v quando lo si sottopone all'elettrolisi alla pressione p , il lavoro speso per vincere la pressione, durante il passaggio dell'unità di elettricità vp , e la forza elettromotrice necessaria per produrre l'elettrolisi, dovendo comprendere una parte uguale a vp , si spende nell'eseguire questo lavoro meccanico.

Se i prodotti dell'elettrolisi sono gas che, come l'ossigeno e l'idrogeno, sono molto meno densi dell'elettrolita, e seguono molto esattamente la legge di Boyle, vp è all'incirca costante, restando la temperatura la stessa, e la forza elettromotrice necessaria per produrre l'elettrolisi non dipenderà significativamente dalla pressione. Così, si è riconosciuto che è impossibile impedire la scomposizione dell'acido solforico forte contenente in un piccolo spazio i gas risultanti dalla scomposizione.

Se i prodotti dell'elettrolisi sono liquidi o solidi, la quantità vp aumenta al crescere della pressione: se quindi v è positivo, un aumento di pressione aumenta la forza elettromotrice necessaria per produrre l'elettrolisi.

Analogamente, ogni altro lavoro, qualunque sia, che si effettua durante l'elettrolisi avrà il suo effetto sul valore della forza elettromotrice: per esempio, se una corrente verticale passa tra due elettrodi di zinco in una soluzione di solfato di zinco, servirà una forza elettromotrice più grande se, nella soluzione, la corrente va dal basso verso l'alto che se in senso contrario: poiché,

nel primo caso, lo zinco è trasportata dall'elettrodo inferiore a quello superiore, inversamente nel secondo caso. La forza elettromotrice necessaria di questo capo è inferiore di un milionesimo di quella dell'elemento Daniell, per piede di distanza tra gli elettrodi.

Polarizzazione elettrolitica

264. Quando si fa passare una corrente elettrica in un elettrolita tra elettrodi metallici, l'accumulo di ioni sugli elettrodi produce il fenomeno detto *polarizzazione*, il quale consiste in uno sviluppo di una forza elettromotrice agente in senso contrario alla corrente e producente un aumento apparente di resistenza.

Se si impiega una corrente continua, la resistenza sembra aumentare rapidamente a partire dal momento in cui comincia la corrente e finisce per raggiungere un valore all'incirca costante. Se si cambia la forma del recipiente che contiene l'elettrolita, la resistenza è modificata, così come un cambiamento analogo nella forma di un conduttore metallico modificherebbe la sua resistenza; ma, inoltre, bisogna sempre aggiungere alla resistenza effettiva dell'elettrolita una resistenza apparente dipendente dalla natura degli elettrodi.

265. Questi fenomeni hanno portato alcune persone a supporre che serve una forza elettromotrice finita per far passare una corrente attraverso un elettrolita. Ma è stato dimostrato, dalle ricerche di Lenza, di Neumann, di Beetz, di Wiedemann¹, di Paalzow² e, recentemente, da quelle di MM. F. Kohlrausch e W. A. Nippoldt³, che la conduzione avviene nell'elettrolita stesso, con tanta precisione quanta nei conduttori metallici, e che questa resistenza apparente che si osserva sulla superficie di separazione degli elettrodi e dell'elettrolita è interamente dovuta alla polarizzazione.

266. Il fenomeno detto polarizzazione consiste, nel caso di una corrente continua, in una diminuzione di intensità, ciò che rivela l'esistenza di una forza che si oppone al passaggio della corrente. La resistenza si manifesta pure come una forza opposta alla corrente; ma è facile distinguere i due fenomeni, sopprimendo o invertendo bruscamente la forza elettromotrice.

La forza di resistenza è sempre diretta in verso inverso alla corrente: la forza elettromotrice necessaria per superarla è proporzionale all'intensità di corrente e cambia verso se si cambia quello della corrente. Se la forza elettromotrice esterna diviene nulla, anche la corrente si ferma.

Al contrario, la forza elettromotrice della polarizzazione ha una direzione fissa, in verso contrario alla corrente che l'ha prodotta. Se si sopprime la forza elettromotrice che produceva la corrente, la polarizzazione origina una corrente in verso contrario.

Si può confrontare la differenza tra questi due fenomeni con la differenza che vi è tra far rifluire dell'acqua attraverso un lungo tubo capillare e in un serbatoio con un tubo di lunghezza moderata. Nel primo caso, se si sopprime la pressione che produce lo scorrimento, la corrente si ferma, ed è tutto. Nel secondo caso, se si elimina la pressione, l'acqua rifluisce al di fuori del serbatoio.

Per rendere più completa questa analogia meccanica, basta supporre che il serbatoio abbia una mediocre profondità, di modo che debordi quando è rifluita una certa quantità di acqua. Si rappresenta così questo fatto, che vi è un valore massimo della forza elettromotrice totale della polarizzazione.

267. La causa della polarizzazione sembra essere la presenza sugli elettrodi di prodotti di scomposizione elettrolitica del fluido interposto. Le superfici degli elettrodi sono così rese elettricamente dissimili e si stabilisce tra esse una forza elettromotrice la cui direzione è opposta a quella della corrente che ha prodotto la polarizzazione.

¹*Galvanismus*, vol. I.

²*Monatsbericht*, Berlino, luglio, 1868.

³*Pogg. Ann.*, vol. CXXXVIII, p. 286, ottobre 1869.

Gli ioni, la cui presenza sugli elettrodi produce i fenomeni di polarizzazione, non sono in una condizione di libertà perfetta, ma aderiscono agli elettrodi con una forza molto grande.

La forza elettromotrice di polarizzazione dipende dalla densità del deposito di ioni che ricopre l'elettrodo; ma non è proporzionale a questa densità e non cresce così rapidamente.

Il deposito di ioni tende costantemente a divenire libero e, allora, a diffondersi nel liquido, o a sfuggire allo stato gassoso, o a precipitare in forma di solido.

Questa polarizzazione si distrugge con una velocità molto bassa per le polarizzazioni deboli, molto rapidamente per i valori vicini al limite di polarizzazione.

268. Abbiamo visto che, al § 262, la forza elettromotrice che interviene in una elettrolisi è numericamente uguale all'equivalente meccanico di questa operazione valutata per un equivalente elettrochimico della sostanza. Se l'operazione corrisponde a una diminuzione dell'energia interna della sostanza sottoposta all'operazione, come è il caso della pila voltaica, la forza elettromotrice è nel verso della corrente. Ma, se l'operazione determina un aumento dell'energia interna delle sostanze, come in un voltmetro, la forza elettromotrice è nel verso contrario di quello della corrente, e si chiama *forza elettromotrice di polarizzazione*.

Nel caso di una corrente costante, che produce continuamente una elettrolisi dove gli ioni si separano allo stato di libertà sugli elettrodi, dobbiamo solo misurare con un metodo opportuno l'energia interna degli ioni separati e confrontarla con quella dell'elettrolita e potremo calcolare la forza elettromotrice necessaria per produrre l'elettrolisi. Si ha così la polarizzazione massima.

Ma, nei primi momenti dell'elettrolisi, gli ioni che si depositano agli elettrodi non sono allo stato di libertà; la loro energia interna è minore di quando sono liberi e maggiore di quando sono combinati nell'elettrolita. Infatti, finché il deposito dello ione sull'elettrodo è molto sottile, lo ione si trova in uno stato paragonabile a quello di una combinazione chimica con l'elettrodo; al crescere del deposito aumento di densità, le parti successive non sono più così intimamente combinate con l'elettrodo, ma sono semplicemente aderenti; e, alla fine, il deposito sfugge in bolle se è gassoso, si diffonde nell'elettrolita se è liquido, forma un precipitato se è solido.

Studiando la polarizzazione, dobbiamo quindi considerare:

1° La densità superficiale del deposito, che possiamo chiamare σ . Essa rappresenta il numero di equivalenti elettrochimici dello ione depositato sull'unità di superficie. E poiché ogni equivalente elettrochimico depositato corrisponde a una unità di elettricità trasmessa dalla corrente, possiamo considerare σ come rappresentante una densità superficiale di materia oppure di elettricità.

2° La forza elettromotrice di polarizzazione, che possiamo chiamare p . Questa quantità p è la differenza dei potenziali elettrici dei due elettrodi, quando la corrente che attraversa l'elettrolita è così piccola che la resistenza propria dell'elettrolita non produce alcuna differenza valutabile tra questi potenziali.

In ogni istante la forza elettromotrice p è uguale numericamente all'equivalente meccanico dell'operazione elettrolitica che si produce in questo istante, portando questa operazione su un equivalente elettrochimico dell'elettrolita. Questa operazione elettrolitica consiste nel deposito di ioni sugli elettrodi, e lo stato nel quale si depositano dipende dallo stato effettivo delle superfici degli elettrodi, i quali possono essere stati modificati dai depositi precedenti.

Quindi, in ogni istante, la forza elettromotrice dipende dalla storia anteriore dell'elettrodo. Più esattamente, essa è una funzione della densità superficiale σ del deposito, tale che $p = 0$ quando $\sigma = 0$; ma p tende al limite assai più rapidamente di σ . D'altra parte, non potrebbe essere esatto dire che p è una funzione di σ ; sarebbe più corretto dire che p è una funzione dello stato chimico dello strato esterno del deposito, stato che è legato alla densità del deposito da una legge dove interviene il tempo.

269. 3° La terza cosa di cui dobbiamo tener conto è la dissipazione della polarizzazione. Quando la polarizzazione è lasciata a se stessa, essa decresce con una velocità che dipende, in parte, dall'intensità di polarizzazione, cioè dalla densità del deposito, in parte dalla natura

del mezzo circostante, e dalle azioni chimiche, meccaniche o termiche alle quali è esposta la superficie dell'elettrodo.

Se determiniamo un tempo T , tale che la velocità con cui si dissipa tutto il deposito nel tempo T , possiamo chiamare T il modulo di durata della dissipazione. Se la densità del deposito è molto piccola, T è molto grande e si può valutare in giorni o mesi; se la densità del deposito tende al valore limite, T decresce molto rapidamente ed è probabilmente solo una piccola frazione del secondo. Infatti, la velocità di dissipazione aumenta così rapidamente che, con la forza della corrente costante, i gas provenienti dalla scomposizione, invece di contribuire ad aumentare la densità del deposito, sfuggono in bolle mentre si formano.

270. Vi è quindi una grande differenza nello stato di polarizzazione degli elettrodi di un voltmetro, secondo che la polarizzazione è piccola o raggiunge il suo valore massimo. Per esempio, se si dispone in serie un certo numero di voltmetri a elettrodi di platino, contenenti acido solforico forte, e se si fa agire su questo circuito una forza elettromotrice debole, come quella di un elemento Daniell, questa forza elettromotrice produrrà solo una corrente di breve durata; poiché, dopo un tempo molto breve, la forza elettromotrice, dovuta alla polarizzazione dei voltmetri, farà equilibrio a quella dell'elemento Daniell.

Nel caso di una polarizzazione molto piccola, la dissipazione è molto piccola e si produce molto lentamente per assorbimento e diffusione dei gas nel liquido. La quantità di questa dissipazione è indicata dalla corrente estremamente piccola che continua a passare senza che si veda separarsi alcun gas.

Se trascuriamo questa dissipazione per la breve durata durante la quale si stabilisce lo stato di polarizzazione, e se chiamiamo Q la quantità totale di elettricità trasportata in questo tempo dalla corrente, e se indichiamo con A la superficie di uno degli elettrodi e con σ la densità del deposito supposto uniforme

$$Q = A\sigma$$

Se ora stacciamo dalla pila di Daniell gli elettrodi di questo sistema elettrolitico, per collegarli al galvanometro in grado di misurare la carica totale che lo attraversa, una quantità di elettricità circa uguale a Q sarà passata nella scarica alla scomparsa della polarizzazione.

271. Si può quindi confrontare l'azione di uno strumento di questo tipo, che è formato dalla pila secondaria di Ritter, con l'azione di una bottiglia di Leyda.

La pila secondaria e la bottiglia di Leyda possono entrambe essere caricate da una certa quantità di elettricità ed esserne poi scaricate. Durante la scarica, passa una quantità di elettricità circa uguale alla carica, ma in verso contrario. La differenza tra la carica e la scarica è dovuta in parte alla dissipazione, fenomeno molto lento nel caso di piccole cariche, ma che diviene estremamente rapido quando la carica supera un certo limite. Essa riguarda ancora il fatto seguente: quando gli elettrodi sono stati collegati a lungo per produrre una scarica in apparenza completa, li si separa per qualche tempo per poi collegarli di nuovo, si ottiene una seconda scarica nella stessa direzione della prima. È ciò che si chiama *scarica residua*, fenomeno comune alla bottiglia di Leyda e alla pila secondaria.

La pila secondaria può quindi essere confrontata, a tale proposito, alla bottiglia di Leyda: ma vi sono alcune differenze importanti. La carica di una bottiglia di Leyda è molto esattamente proporzionale alla forza elettromotrice della carica, cioè alla differenza di potenziale tra le due superfici, e si chiama *capacità della bottiglia* una quantità costante che è la carica corrispondente all'unità di forza elettromotrice. La quantità corrispondente, che si potrebbe chiamare la *capacità della pila secondaria*, cresce quando la forza elettromotrice aumenta.

La capacità della bottiglia di Leyda dipende dall'area delle superfici opposte, dalla loro distanza, dal tipo di sostanza che le separa, ma non dalla natura delle superfici metalliche. La capacità della pila secondaria dipende dall'area degli elettrodi, ma non dalla loro distanza; essa dipende dalla natura delle superfici di questi elettrodi, così come dalla natura del fluido che le separa. La differenza di potenziale massima che può esistere tra gli elettrodi di un elemento di pila secondaria è piccola, se la si confronta alla differenza di potenziale massima che vi può

essere tra le armature di una bottiglia di Leyda carica: di conseguenza, per avere una forza elettromotrice considerevole, bisogna impiegare una pila di un gran numero di elementi.

D'altra parte, nella pila secondaria la densità superficiale della carica è enormemente più considerevole della più grande densità superficiale delle cariche che si può accumulare sulla superficie di una bottiglia di Leyda: è a questo punto che M. C.-F. Varley, descrivendo la costruzione di un condensatore di grande capacità, raccomanda una serie di foglie d'oro o di platino immerse in un acido forte, come preferibile, dal punto di vista del buon affare, a delle foglie di stagno separate da un materiale isolante e agente per induzione.

La forma sotto la quale si accumula l'energia in una bottiglia di Leyda è uno stato di vincolo del dielettrico compreso tra le superfici conduttrici, stato che ho già descritto con il nome di *polarizzazione elettrica*; e, segnalando i fenomeni relativi a questo stato attualmente noto, facevo notare quanto è imperfetta la nostra conoscenza di ciò che avviene realmente (si veda § 62 e 111).

L'energia accumulata nella pila secondaria risiede nello stato chimico dello strato di materiale distribuito sulla superficie degli elettrodi. Questo strato è formato dagli ioni dell'elettrolita e dalla sostanza stessa dell'elettrodo, uniti in una relazione che varia dalla combinazione chimica alla condensazione superficiale, l'aderenza meccanica o la semplice sovrapposizione.

La sede di questa energia è vicino alla superficie degli elettrodi; non nella massa intera dell'elettrolita: la forma sotto la quale esiste può essere chiamata *polarizzazione elettrolitica*.

Dopo aver studiato i rapporti della pila secondaria e della bottiglia di Leyda, il lettore potrà pure confrontare la pila voltaica a qualche forma di macchina elettrica, quella descritta al § 211, per esempio.

M. Varley⁴ ha trovato ultimamente che la capacità di un pollice quadrato di platino immerso nell'acido solforico forte varia da 175 a 542 μF , e oltre, e che questa capacità cresce con la forza elettromotrice, essendo di circa 175 per 0,02 daniell, e di 542 per 1,6 daniell.

Ma si può spingere oltre il confronto della pila secondaria e della bottiglia di Leyda, come nell'esperienza seguente, dovuta a Buff⁵. Solo quando è freddo che il vetro della bottiglia può mantenere la carica. Il vetro diviene conduttore a una temperatura inferiore ai 100° C. Se, in un contenitore di mercurio, si pone un tubo di prova contenente mercurio e si collegano due elettrodi, uno al mercurio interno, l'altro al mercurio esterno, questa disposizione costituisce una bottiglia di Leyda che, alle temperature ordinarie, conserva la sua carica. Se gli elettrodi sono collegati a una pila voltaica, non passa alcuna corrente finché il vetro è freddo; ma, se lo si scalda gradualmente, inizia a passare corrente, la cui intensità cresce rapidamente al crescere della temperatura, sebbene il vetro rimanga, in apparenza, più rigido che mai.

Questa corrente è certamente elettrolitica; poichè, se si staccano gli elettrodi dalla pila e li si collega al galvanometro, passa una notevole corrente inversa, dovuta alla polarizzazione delle superfici di vetro.

Se, mentre la pila agisce, si raffredda lo strumento, il vetro freddo blocca la corrente come prima, ma la polarizzazione delle superfici permane. Si può togliere il mercurio, lavare le superfici con acido nitrico e acqua, introdurre di nuovo mercurio. Se allora si scalda lo strumento, la corrente di polarizzazione appare non appena il vetro è abbastanza caldo per condurla.

Possiamo quindi considerare il vetro a 100° C come un elettrolita, sebbene appaia solido, e vi sono forti motivi di credere che, nella maggior parte dei casi dove un dielettrico manifesta un debole grado di conducibilità, il conduttore è elettrolitico. L'esistenza della polarizzazione può essere vista come una prova conclusiva di elettrolisi, e, se la conducibilità di una sostanza cresce con l'aumentare della temperatura, siamo ben sicuri nel supporre che la conduzione è elettrolitica.

Elementi voltaici costanti. 272. Se si esegue una serie di esperienze con una pila voltaica, nella quale si produce della polarizzazione, questa diminuisce mentre la corrente non circola; la

⁴Proc. R. S., 12 gennaio 1872.

⁵Annalen der Chemie und Pharmacie, vol. XC, p. 257; 1854.

corrente è quindi più intensa quando inizia a passare di nuovo che quando circola già da un certo tempo; se, d'altra parte, si diminuisce la resistenza del circuito facendo passare la corrente in una derivazione a bassa resistenza, quando si invia di nuovo la corrente nel circuito essa ha dapprima una forza inferiore alla sua forza normale, in ragione della forte polarizzazione che risulta dall'impiego di un corto circuito.

Per eliminare queste irregolarità della corrente, estremamente imbarazzanti nelle esperienze che richiedono misure precise, è necessario sopprimere la polarizzazione o, almeno, ridurla il più possibile.

Non sembra che si abbia una forte polarizzazione alla superficie della lamina di zinco, quando essa è immersa in una soluzione di solfato di zinco o nell'acido solforico forte. La polarizzazione principale si ha sulla superficie del metallo negativo. Quando il liquido nel quale è immerso il metallo negativo è acido solforico forte, si vede il metallo negativo ricoprirsi di bolle di idrogeno provenienti dalla scomposizione elettrolitica del liquido: è chiaro che queste bolle, impedendo al liquido di toccare il metallo, diminuiscono la superficie di contatto e aumentano la resistenza del circuito. Ma, oltre a queste bolle visibili, in uno stato che non è senza dubbio quello di libertà; e, siccome abbiamo visto che questo stato è in grado di produrre una forza elettromotrice di verso contrario, esso deve necessariamente diminuire la forza elettromotrice della pila.

Si sono adottati diversi metodi per eliminare questo stato di idrogeno. Lo si può ridurre, in una certa misura, con metodi meccanici, agitando il liquido, sfregando la superficie della placca negativa. Nella pila di Smée, le placche negative sono verticali e ricoperte di platino finemente diviso, dal quale le bolle di idrogeno si staccano facilmente: nel loro moto ascendente, esse determinano nel liquido una corrente che aiuta a scacciare le altre bolle via via che si formano.

Un metodo assai più efficace consiste nell'impiego di metodi chimici. Ve ne sono di due tipi. Nelle pile di Bunsen e di Grove, le placche negative sono immerse in un liquido ricco di ossigeno, con il quale l'idrogeno si combina, invece di formare uno strato sulla placca. Nella pila di Grove, la placca è di platino e immersa nell'acido nitrico forte. Nella prima pila di Bunsen, la placca è di carbone e immersa nello stesso acido. Si impiega pure per lo stesso uso l'acido cromico, che ha il vantaggio di non emettere vapori acidi come quelle prodotti dalla riduzione dell'acido nitrico.

Un altro metodo per eliminare l'idrogeno consiste nell'impiegare il rame come metallo negativo e nel ricoprire la sua superficie di uno strato di ossido. Ma questo ossido scompare rapidamente quando si impiega il metallo come elettrodo negativo. Per rinnovarlo, Joule propose di dare alle placche di rame la forma di dischi a semi immersione nel liquido e ruotanti lentamente, di modo che l'aria possa agire sulle parti che le sono esposte in successione.

L'altro metodo consiste nell'impiego come liquido di un elettrolita il cui catione sia fortemente negativo rispetto allo zinco.

Nella pila di Daniell, una placca di rame è immersa in una soluzione satura di solfato di rame. Quando la corrente attraversa la soluzione dallo zinco al rame, non compare idrogeno sulla placca di rame, ma vi si depona del rame. Quando la soluzione è satura e la corrente non troppo intensa, il rame sembra agire come un effettivo catione, e l'anione SO_4 si avvia verso lo zinco.

Se queste condizioni non sono soddisfatte, si libera dell'idrogeno al catodo, ma subito reagisce sulla soluzione, precipita il rame e si unisce a SO_4 per formare acido solforico. Quando avviene così, il solfato di rame è sostituito vicino al catodo dall'acido solforico, il liquido si decolora e la polarizzazione dell'idrogeno si produce nuovamente. Il rame così depositato ha una struttura più allentata e friabile del rame depositato per elettrolisi propriamente detta.

Per essere sicuri che il liquido a contatto con il rame sia sempre saturo di solfato di rame, bisogna mettere nella soluzione, vicino al rame, dei cristalli di solfato di rame; allora, se la soluzione si diluisce per deposito di una parte di rame, si discioglie una maggiore quantità di cristalli-

Abbiamo visto che è necessario che il liquido vicino al rame sia saturo di solfato di rame. Più essenziale ancora è che il liquido nel quale è immerso lo zinco sia privo di solfato di rame.

Se una traccia di questo sale si fa luce fino alla superficie dello zinco, essa è subito ridotta e del rame si deposita sullo zinco. Lo zinco, questo rame e il liquido formano allora un corto circuito dove l'elettrolisi avviene molto velocemente, e lo zinco è corrosivo in una reazione che non contribuisce per nulla all'effetto utile della pila.

Per prevenire tale inconveniente, lo zinco è immerso in una soluzione di acido solforico forte o di solfato di zinco; e, per impedire alla soluzione di solfato di rame di mescolarsi all'altro liquido, i due liquidi sono separati da una barriera formata da un vaso e da un recipiente di terra porosa, attraverso i quali l'elettrolisi può avvenire liberamente, ma impedendo in modo efficace il mescolamento dei liquidi con correnti osservabili.

In alcune pile, si impiega la segatura di legno per impedire il mescolamento delle correnti. Ma le esperienze di Graham provano che la diffusione avviene quasi tanto velocemente quanto i liquidi sono separati da un parete di queste o che sono a diretto contatto, purché non vi siano correnti osservabili: è probabile, d'altra parte, che se si impiega una parete che ritarda la diffusione, si aumenta la resistenza dell'elemento, poiché la conduzione elettrolitica è un fenomeno le cui leggi matematiche sono esattamente le stesse di quelle della diffusione, e tutto ciò che ostacola l'una deve ostacolare pure l'altra. La sola differenza è che la diffusione si produce costantemente sia mentre la corrente non passa che quando la pila funziona.

In tutte le forme delle pile di Daniell, il risultato finale è che il solfato di rame si manifesta e deteriora la pila. Per ritardare indefinitamente questo risultato, Sir W. Thomson⁶ ha costruito una pila Daniell della forma seguente (fig. 22).

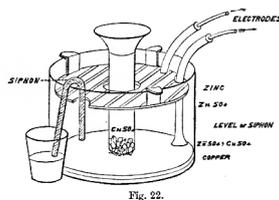


Fig. 22.

In ogni elemento, la placca di rame è distesa orizzontalmente nel fondo del recipiente: si versa da sopra una soluzione concentrata di solfato di zinco. Lo zinco è a forma di griglia, e si trova posto orizzontalmente vicino alla superficie del liquido. Un tubo di vetro è posto verticalmente nella soluzione, la sua apertura inferiore proprio al di sopra della placca di rame. Si gettano in questo tubo dei cristalli di solfato di rame che, dissolvendosi, formano una soluzione più densa di quella del solfato di zinco: questo può quindi arrivare allo zinco solo mediante diffusione. Per ritardare quest'ultimo fenomeno, si prende un sifone formato da un tubo di vetro contenente una miscela di cotone, e si pone una delle sue estremità a metà tra rame e zinco e l'altra nel recipiente esterno all'elemento, di modo che il liquido è aspirato molto lentamente verso la metà della sua altezza. Per sostituirlo, si aggiunge dall'alto, quando serve, dell'acqua o una soluzione debole di solfato di zinco. In questo modo, la maggior parte del solfato di rame che si toglie nel liquido per diffusione è aspirato prima di raggiungere lo zinco; e lo zinco è circondato da una soluzione quasi pura di solfato di zinco, dotata di un movimento molto lento verso la base del recipiente, la qual cosa ritarda ancora il moto ascensionale del solfato di rame. Mentre la pila funziona, del rame si deposita sulla placca di rame, e SO^4 si muove lentamente attraverso il liquido fino allo zinco con il quale si combina, formando solfato di zinco. Così il liquido sul fondo diviene più denso per aggiunta di zinco. Per impedire questa azione di cambiare il livello di densità degli strati e produrre così dell'instabilità e correnti misurabili nel recipiente, si deve avere cura di tenere il tubo ben fornito di cristalli di solfato di rame, e di alimentare la pila solo con una soluzione di solfato di zinco molto forte per essere più leggera di qualsiasi altro strato liquido della pila.

La pila Daniell è lungi dall'essere la più energica di quelle che si usano abitualmente. La forza elettromotrice di una pila di Grove è di 192000000, quella di una Daniell di 107000000, e quella di Bunsen di 188000000.

⁶Proc. R. S., 19 gennaio 1871.

La resistenza di una Daniell è in genere maggiore di quella di una Grove o di una Bunsen delle stesse dimensioni.

Ma questi difetti sono più che compensati in tutti i casi dove servono misure precise, poiché la pila Daniell è superiore a tutte le altre disposizioni note, come costanza della forza elettromotrice. Essa ha pure il vantaggio di mantenersi a lungo in buono stato di funzionamento, e di non emettere gas.

Correnti elettriche lineari

Sistemi di conduttori lineari. 273. Ogni conduttore può essere trattato come un conduttore lineare, se è disposto in modo che la corrente passi sempre allo stesso modo tra due porzioni di superficie dette suoi elettrodi. Per esempio, si può trattare come un conduttore lineare una massa di metallo la cui superficie è coperta da una sostanza isolante in tutti i suoi punti, tranne due per i quali la superficie libera del conduttore è in contatto metallico con due elettrodi fatti di una sostanza perfettamente conduttrice. Poiché, se la corrente entra da uno di questi elettrodi ed esce dall'altro, le linee di flusso sono determinate, e la relazione tra la forza elettromotrice, l'intensità e la resistenza è espressa dalla legge di Ohm, poiché l'intensità in ogni punto della massa è una funzione lineare di E . Ma, se vi sono più di due elettrodi, il conduttore può essere attraversato da più correnti indipendenti che possono non essere combinate tra loro (Si veda il § 282).

Legge di Ohm. 274. Sia E la forza elettromotrice che agisce in un conduttore lineare tra l'elettrodo A_1 e l'elettrodo A_2 (si veda il § 69). Sia C l'intensità di corrente elettrica nel conduttore, cioè il numero C di unità di elettricità che attraversano ogni sezione del conduttore nella direzione A_1A_2 per unità di tempo; sia infine R la resistenza del conduttore: la legge di Ohm si esprime come

$$(19.0.1) \quad E = CR$$

Conduttori lineari disposti in serie. 275. Siano A_1, A_2 gli elettrodi del primo conduttore; poniamo il secondo conduttore in modo che uno dei suoi elettrodi sia a contatto con A_2 , di modo che gli elettrodi del secondo conduttore siano A_2 e A_3 . Indichiamo con A_3 e A_4 gli elettrodi del terzo conduttore.

Indichiamo con E_{12}, E_{23}, E_{34} le forze elettromotrici che agiscono lungo questi conduttori e analogamente per gli altri.

Siano

$$R_{12}, R_{23}, R_{34}, \dots$$

le resistenze dei conduttori. Allora, poiché tutti questi conduttori sono disposti in serie, in modo che una stessa corrente C li attraversi tutti, si ha, dalla legge di Ohm.

$$(19.0.2) \quad E_{12} = CR_{12} \quad E_{23} = CR_{23} \quad E_{34} = CR_{34}$$

Se E è la forza elettromotrice risultante e R la resistenza totale del sistema, si deve avere, per la legge di Ohm,

$$(19.0.3) \quad E = CR$$

Ora

$$(19.0.4) \quad E = E_{12} + E_{23} + E_{34}$$

la somma delle forze elettromotrici è uguale a

$$C(R_{12} + R_{23} + R_{34})$$

dalle equazioni (19-2). Confrontando questo risultato alla (19-3), troviamo

$$(19.0.5) \quad R = R_{12} + R_{23} + R_{34}$$

La resistenza di una serie di conduttori è uguale alla somma delle resistenze dei conduttori presi separatamente.

Potenziale in un punto della serie. Siano A e C gli elettrodi della serie, B un punto intermedio, a, c, b i rispettivi potenziali di questi punti. Siano R_1 la resistenza della parte compresa tra A e B , R_2 quella della parte compresa tra B e C , R la resistenza totale da A a C . Allora, poiché

$$a - b = R_1 C \quad b - c = R_2 C \quad a - c = RC$$

il potenziale in B è

$$(19.0.6) \quad b = \frac{R_2 a + R_1 c}{R}$$

che determina il potenziale di B , quando si conoscono i potenziali di A e di C .

Resistenza di un conduttore multiplo. 276. Sia un certo numero di conduttori ABZ, ACZ, ADZ , disposti fianco a fianco, in modo che le loro estremità siano a contatto con gli stessi due punti A e Z . Si vede allora che essi sono disposti in arco multiplo.

Siano R_1, R_2, R_3 le rispettive resistenze di questi conduttori; C_1, C_2, C_3 le intensità; R la resistenza totale del conduttore multiplo e C l'intensità totale.

Poiché i potenziali sono gli stessi in A e in Z per tutti i conduttori, la differenza dei potenziali è la stessa per tutti, e possiamo indicarla con E . Abbiamo allora

$$E = C_1 R_1 = C_2 R_2 = C_3 R_3 = CR$$

ma

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

da cui

$$(19.0.7) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

L'inverso della resistenza di un conduttore multiplo è uguale alla somma degli inversi delle resistenze dei conduttori parziali.

Se chiamiamo conducibilità di un conduttore l'inverso della sua resistenza, possiamo dire che *la conducibilità di un conduttore multiplo è la somma delle conducibilità dei conduttori parziali.*

Intensità in un ramo di un conduttore multiplo. Dalle equazioni del paragrafo precedente, deriva che, se C_1 è l'intensità in uno dei rami dell'arco multiplo e R_1 la sua resistenza,

$$(19.0.8) \quad C_1 = C \frac{R}{R_1}$$

dove C è l'intensità totale e R la resistenza del conduttore multiplo, come determinata in precedenza.

Resistenza longitudinale dei conduttori a sezione uniforme. 277. Sia ρ la resistenza che un cubo della sostanza data presenta al passaggio di una corrente parallela a una delle sue estremità, essendo il lato del cubo uguale all'unità di lunghezza; si chiama ρ *la resistenza specifica della sostanza sotto nell'unità di volume.*

Consideriamo ora un conduttore prismatico, fatto dello stesso materiale, di lunghezza l e di sezione uguale all'unità. Esso è equivalente a l cubi disposti in serie; la sua resistenza è quindi $l\rho$.

Infine consideriamo un conduttore di lunghezza l e di sezione uniforme s . Esso è equivalente a s conduttori simili al precedente, disposti in arco multiplo: la sua resistenza è quindi

$$R = \frac{l\rho}{s}$$

Se conosciamo la resistenza di un filo uniforme e se possiamo misurare la sua lunghezza e la sua sezione, possiamo misurare la resistenza specifica della sostanza di è composto.

Il metodo più esatto per determinare la sezione trasversale dei fili sottili è di calcolare secondo la lunghezza, il peso e la densità del campione. Qualche volta non è facile determinare

la densità: allora si usa la resistenza del filo avente l'unità di lunghezza e l'unità di massa: è ciò che si chiama *la resistenza specifica sotto l'unità di peso*.

Se r è questa resistenza, l la lunghezza e m la massa di un filo, si ha

$$R = \frac{l^2 r}{m}$$

Dimensioni delle quantità che compaiono nelle equazioni. 278. La resistenza di un conduttore è il rapporto tra la forza elettromotrice che agisce su di esso e l'intensità prodotta. La conducibilità del conduttore è l'inverso di questa quantità, in altri termini, il rapporto tra l'intensità e la forza elettromotrice che la produce.

Sappiamo che, nel sistema di misure elettrostatiche, il rapporto tra una quantità di elettricità e il potenziale conduttore sul quale essa è distribuita è la capacità del conduttore e ha per misura una linea. Se il conduttore è una sfera posta in un campo illimitato, questa linea è il raggio stesso della sfera.

Il rapporto tra una quantità di elettricità e una forza elettromotrice è quindi una linea: ma il rapporto tra una quantità di elettricità e una intensità è il tempo durante il quale passa la corrente, per trasmettere questa quantità di elettricità. Pertanto il rapporto tra una intensità e una forza elettromotrice è quello di una linea su un tempo: è quindi una velocità.

Il fatto che la conducibilità di un conduttore sia espressa in misura elettrostatica da una velocità può essere verificato supponendo una sfera di raggio r , caricata al potenziale V e poi messa a terra dal conduttore dato. Facciamo contrarre la sfera, di modo che, l'elettricità sfuggendo dal conduttore, il potenziale della sfera si mantenga sempre uguale a V . In ogni istante la carica della sfera è rV , e l'intensità di corrente $\frac{d}{dt}(rV)$; ma, poiché V è costante, l'intensità è $V \frac{dr}{dt}$, e la forza elettromotrice che agisce attraverso il conduttore è V .

La conducibilità del conduttore è il rapporto tra l'intensità e la forza elettromotrice, cioè $\frac{dr}{dt}$, cioè la velocità con la quale deve diminuire il raggio della sfera per mantenere il potenziale costante, quando si fa passare la carica a terra attraverso il conduttore.

Pertanto, nel sistema elettrostatico, la conducibilità di un conduttore è una velocità, e le sue dimensioni sono $[LT^{-1}]$.

La resistenza del conduttore ha quindi come dimensioni $[L^{-1}T]$.

La resistenza specifica per unità di volume ha come dimensioni $[T]$, e la conducibilità specifica per unità di volume $[T^{-1}]$.

La grandezza numerica di questi coefficienti dipende solo dall'unità di tempo che è la stessa nei diversi paesi.

La resistenza specifica per unità di peso ha come dimensioni $[L^{-3}MT]$.

Troveremo in seguito che, nel sistema di misure elettromagnetiche, la resistenza di un conduttore si esprime con una velocità, di modo che in questo sistema le dimensioni della resistenza di un conduttore sono $[LT^{-1}]$.

La conducibilità di un conduttore è naturalmente l'inversa della resistenza.

La resistenza specifica per unità di volume ha, in questo sistema, per dimensioni $[L^2T^{-1}]$, e la resistenza specifica per unità di peso ha per dimensioni $[L^{-1}T^{-1}M]$.

Sistemi di conduttori lineare, in generale. 280. Il caso più generale di un sistema lineare è quello di n punti A_1, A_2, \dots, A_n collegati a due a due da $\frac{1}{2}n(n-1)$, conduttori lineari. Indichiamo con K_{pq} la conducibilità (o l'inverso della resistenza) del conduttore che collega due punti qualsiasi A_p e A_q ; e con C_{pq} l'intensità di corrente di A_p verso A_q . Siano P_p e P_q i potenziali elettrici nei punti A_p e A_q , e sia E_{pq} la forza elettromotrice interna, se ve ne è una, che agisce lungo il conduttore da A_p verso A_q .

L'intensità, di A_p verso A_q , è, dalla legge di Ohm ,

$$(19.0.9) \quad C_{pq} = K_{pq} (P_p - P_q + E_{pq})$$

Tra queste quantità abbiamo le serie di relazioni seguenti:

La conducibilità di un conduttore è la stessa, qualunque sia la direzione della corrente, cioè

$$(19.0.10) \quad K_{pq} = K_{qp}$$

La forza elettromotrice e l'intensità sono quantità direzionali, di modo che

$$(19.0.11) \quad E_{pq} = -E_{qp} \quad C_{pq} = -C_{qp}$$

Siano P_1, P_2, \dots, P_n i potenziali A_1, A_2, \dots, A_n ; e siano Q_1, Q_2, \dots, Q_n le quantità di elettricità che penetrano nel sistema, nell'unità di tempo in ognuno di questi punti. Esse sono per forza soggette alla condizione di continuità

$$(19.0.12) \quad Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = 0$$

poiché l'elettricità non si può né accumulare, né prodursi indefinitamente nel sistema.

La condizione di continuità in un punto A_p è

$$(19.0.13) \quad Q_p = C_{p1} + C_{p2} + \dots + C_{pn}$$

Sostituendo questi valori delle intensità nei termini della (19-9), diviene

$$(19.0.14) \quad Q_p = (K_{p1} + K_{p2} + \dots + K_{pn}) P_p - (K_{p1}P_1 + K_{p2}P_2 + \dots + K_{pn}P_n) + \\ (K_{p1}E_{p1} + K_{p2}E_{p2} + \dots + K_{pn}E_{pn})$$

Il simbolo K_{pp} non compare in questa equazione. Diamogli il valore

$$(19.0.15) \quad K_{pp} = -(K_{p1} + K_{p2} + \dots + K_{pn})$$

cioè supponiamo che K_{pp} sia uguale e di segno contrario alla somma delle conducibilità di tutti i conduttori che si incontrano in A_p . Possiamo allora scrivere l'equazione di continuità per il punto A_p

$$(19.0.16) \quad K_{p1}P_1 + K_{p2}P_2 + \dots + K_{pp}P_p + \dots + K_{pn}P_n = K_{p1}E_{p1} + \dots + K_{pn}E_{pn} - Q_p$$

sostituendo 1, 2, ..., n a p , in questa equazione, si ottengono n equazioni della stessa forma, per mezzo delle quali si possono determinare gli n potenziali P_1, P_2, \dots, P_n .

Ma, se aggiungiamo le equazioni del sistema (19-16), il risultato è identicamente nullo, dalle (19-9,11,15); vi sono quindi solo $n - 1$ equazioni indipendenti, che basteranno a determinare le differenze di potenziale dei punti, ma non il potenziale assoluto di alcuno di essi. Questa conoscenza non è d'altronde necessaria per calcolare le intensità del sistema.

Se indichiamo con D il determinante

$$(19.0.17) \quad \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1(n-1)} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{(n-1)1} & K_{(n-1)2} & \dots & K_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

e con D_{pq} il minore di K_{pq} troviamo come valore di $P_p - P_n$

$$(19.0.18) \quad (P_p - P_n) D = (K_{12}E_{12} + \dots - Q_1) D_{p1} + (K_{21}E_{21} + \dots - Q_2) D_{p2} + \dots \\ + (K_{q1}E_{q1} + \dots + K_{qn}E_{qn} - Q_n) D_{pq} + \dots$$

Si determinerà allo stesso modo l'eccesso di potenziale di un altro punto qualunque A_q sul potenziale di A_p . Si può quindi determinare, con la (19-9), l'intensità tra A_p e A_q , e il problema è completamente risolto.

281. Dimosteremo ora una proprietà reciproca di due conduttori qualsiasi di un sistema che corrisponde alla proprietà reciproca già dimostrata in Elettricità statica (si veda § 88).

Il coefficiente di Q_q nell'espressione di P_p è $\frac{D_{pq}}{D}$. Quello di Q_p , nell'espressione di P_q , è $\frac{D_{qp}}{D}$.

Ora D_{pq} differisce da D_{qp} solo per la sostituzione dei simboli, come K_{pq} con K_{qp} . Ma questi due simboli sono uguali, dalla (19-10), poiché la conducibilità di un conduttore è la stessa nei due versi. Pertanto

$$(19.0.19) \quad D_{pq} = D_{qp}$$

Da ciò risulta che la parte del potenziale di A_p che è dovuta all'entrata di una corrente di intensità 1 in A_q è uguale alla parte del potenziale di A_q che è dovuta all'entrata di una corrente di intensità 1 in A_p .

Da ciò, si può dedurre un enunciato più facile da applicare di questa proposizione.

Siano A, B, C, D quattro punti qualsiasi di un sistema, e supponiamo che una corrente Q entrante nel sistema in A e uscente da B stabilisca un eccesso P del potenziale di C su quello di D . Allora, se una corrente uguale a Q entra nel sistema in C ed esce in D , il potenziale di A supererà quello di B della stessa quantità P .

Se una forza elettromotrice E , introdotta nel conduttore e agente da A verso B , produce una corrente C da X verso Y , la stessa forza elettromotrice E , introdotta nel conduttore tra X e Y , produrrà tra A e B una corrente uguale a C .

La forza elettromotrice E può essere quella di una pila voltaica introdotta tra i punti indicati, purché si curi che la resistenza del conduttore sia la stessa, prima e dopo l'introduzione della pila.

282a. Se una forza elettromotrice E_{pq} agisce lungo un conduttore A_pA_q la corrente prodotta in un altro conduttore A_rA_s del sistema è, così come si trova facilmente,

$$\frac{K_{rs}K_{pq}E_{pq}(D_{rp} + D_{sq} - D_{rq} - D_{sp})}{D}$$

Non vi è corrente se

$$(19.0.20) \quad D_{rp} + D_{sq} - D_{rq} - D_{sp} = 0$$

Ma, dalla (19-19), la stessa equazione varrà se, agendo la forza elettromotrice lungo A_rA_s , non vi è corrente in A_pA_q . Grazie a questa relazione reciproca si dice che i due conduttori sono coniugati.

La teoria dei conduttori coniugati è stata studiata da Kirchhoff, che ha enunciato le condizioni di un sistema lineare nella forma seguente, dove è evitata la considerazione del potenziale:

1° Condizione di continuità: la somma di tutte le correnti che convergono in un punto qualsiasi di un sistema è nulla.

2° In ogni circuito chiuso, formato da conduttori, la somma delle forze elettromotrici, contate spostandosi lungo il circuito, è uguale alla somma dei prodotti delle intensità in ogni conduttore per la resistenza di questi conduttori.

Si ottiene questo risultato sommando le equazioni della forma (19-9), relative al circuito chiuso: i potenziali scompaiono.

282b. ¹ Se i fili conduttori formato un reticolo semplice, e se supponiamo che una corrente circoli attorno ad ogni maglia di questo reticolo, la corrente che percorre effettivamente un filo appartenente a due maglie consecutive è la differenza delle correnti che circolano nelle due maglie, essendo queste contate positive quando vanno nel verso antiorario. In questo caso, è facile stabilire la proposizione seguente: Siano x la corrente, E la forza elettromotrice e R la resistenza totale per una maglia qualunque; siano y, z, \dots le resistenze di queste parti comuni. Allora

$$Rx - sy - tz - \dots = E$$

Per mostrare l'utilizzo di questa regola, prendiamo la disposizione nota sotto il nome di *ponte di Wheatstone*, servendoci della figura 32 e delle notazioni del § 347.

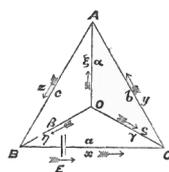


Fig. 32.

¹Tratto dalle Note prese, nel corso del prof. Maxwell, da M. J. A. Fleming, B. A., S. John's College.

Allora, applicando la regola ai tre circuiti OBC, OCA, OAB , nei quali circolano le correnti x, y, z , abbiamo le tre seguenti equazioni

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma)x - \gamma y - \beta z &= E \\ -\gamma x + (b + \gamma + \alpha)y - \alpha z &= 0 \\ -\beta x - \alpha y + (c + \alpha + \beta)z &= 0\end{aligned}$$

Da queste equazioni, si può determinare il valore di $x - y$, che è la corrente nel ramo OA dove si trova il galvanometro; ma si rinvia il lettore ai § 347 e seguenti, dove sono discusse queste questioni e altre relative al ponte di Wheatstone.

Calore sviluppato nel sistema. 293. Dal § 242, l'equivalente meccanico della quantità di calore sviluppata da una corrente C , passante nell'unità di tempo in un conduttore di resistenza R

$$(19.0.21) \quad JH = RC^2$$

Possiamo quindi determinare la somma delle quantità come RC^2 per tutti i conduttori del sistema.

Per il conduttore che va da A_p a A_q la conducibilità è K_{pq} , e la resistenza R_{pq} o

$$(19.0.22) \quad K_{pq}R_{pq} = 1$$

Dalla legge di Ohm, l'intensità in questo conduttore è

$$(19.0.23) \quad C_{pq} = K_{pq}(P_p - P_q)$$

Ma supponiamo che l'intensità non sia data dalla legge di Ohm, e sia uguale a X_{pq} , o

$$(19.0.24) \quad X_{pq} = C_{pq} + Y_{pq}$$

Per determinare il calore sviluppato nel sistema, dobbiamo trovare la somma di tutte le quantità come $R_{pq}X_{pq}^2$ cioè

$$(19.0.25) \quad JH = \sum (R_{pq}C_{pq}^2 + 2R_{pq}C_{pq}Y_{pq} + R_{pq}Y_{pq}^2)$$

Assegnando a C_{pq} il suo valore e tenendo conto della relazione tra R_{pq} e K_{pq} , si ha

$$(19.0.26) \quad \sum [(P_p - P_q)(C_{pq} + 2Y_{pq}) + R_{pq}Y_{pq}^2]$$

Ora, C e X devono soddisfare la condizione di continuità nel punto A_p : abbiamo quindi

$$(19.0.27) \quad \begin{aligned}Q_p &= C_{p1} + C_{p2} + \dots + C_{pn} \\ Q_p &= X_{p1} + X_{p2} + \dots + X_{pn}\end{aligned}$$

pertanto

$$(19.0.28) \quad 0 = Y_{p1} + Y_{p2} + \dots + Y_{pn}$$

Sommando quindi tutti i termini della (19-26), troviamo

$$(19.0.29) \quad \sum (R_{pq}X_{pq}^2) = \sum P_p Q_p + \sum R_{pq}Y_{pq}^2$$

Ora, R è sempre positivo e Y^2 essenzialmente positivo; l'ultimo termine dell'equazione è quindi essenzialmente positivo. Pertanto il primo membro è minimo quando Y è nullo in tutti i conduttori, cioè quando l'intensità in tutti i conduttori è quella che risponde alla legge di Ohm.

Da cui il teorema seguente:

284. *In tutti i sistemi di conduttori che non contengono forze elettromotrici interne, il calore generato dalla correnti distribuite conformemente alla legge di Ohm è minore di quelle che le correnti avrebbero distribuito in qualche altro modo compatibile con le condizioni obbligatorie di fornitura e scorrimento della corrente.*

Il calore sviluppato quando la legge di Ohm è soddisfatta è meccanicamente equivalente a $\sum P_p Q_p$, cioè alla somma dei prodotti delle quantità di elettricità fornite da ognuno degli elettrodi esterni, per il potenziale al quale sono fornite queste quantità di elettricità.

Conduzione nello spazio a tre dimensioni

Notazione delle correnti elettriche. 285. In un punto qualunque, prendiamo un elemento di superficie dS normale all'asse x , e sia Q il numero di unità di elettricità che la attraversano nell'unità di tempo, andando dalla parte positiva a quella negativa; se $\frac{Q}{dS}$ diviene al limite uguale a u , quando dS decresce indefinitamente, si dice che u è la componente della corrente elettrica parallela all'asse x nel punto dato.

Si possono pure determinare le componenti v e w della corrente nel verso delle y e z .

286. Per determinare la componente della corrente nell'altra direzione OR passante per il punto O , siano l, m, n i coseni direttori di OR . Se prendiamo sugli assi x, y, z delle lunghezze uguali a

$$\frac{r}{l}, \frac{r}{m}, \frac{r}{n}$$

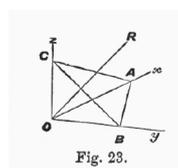
terminanti in A, B, C , il piano del triangolo ABC sarà normale a OR .

L'area del triangolo ABC sarà

$$dS = \frac{1}{2} \frac{r^2}{lmn}$$

e, se si fa decrescere r , quest'area diminuisce indefinitamente.

La quantità di elettricità che esce dal tetraedro $ABCO$ per il triangolo ABC deve essere uguale alla quantità che entra dagli altri tre triangoli, OBC, OCA, OAB .



L'area del triangolo OBC è $\frac{1}{2} \frac{r^2}{mn}$; la componente della corrente normale a questo piano è u ; la quantità di elettricità che entra per il triangolo è quindi

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{u}{mn}$$

Le quantità che entrano attraverso i triangoli OCA e OAB sono

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{v}{nl} \quad \frac{1}{2} r^2 \frac{w}{lm}$$

Se γ è la componente della corrente nella direzione OR , la quantità che esce dal tetraedro attraverso il triangolo ABC è

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\gamma}{lmn}$$

Poiché essa è uguale alla quantità che entra dagli altri tre triangoli

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\gamma}{lmn} = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{u}{mn} + \frac{v}{nl} + \frac{w}{lm} \right)$$

e, moltiplicando per $\frac{2lmn}{r^2}$, abbiamo

$$(20.0.1) \quad \gamma = lu + mv + nw$$

Se poniamo $\Gamma^2 = u^2 + v^2 + w^2$ e prendiamo l', m', n' tali che

$$u = l'\Gamma \quad v = m'\Gamma \quad w = n'\Gamma$$

abbiamo allora

$$(20.0.2) \quad \gamma = \Gamma (ll' + mm' + nn')$$

Pertanto, se definissimo l'intensità risultante come fosse un vettore di grandezza Γ , i cui coseni direttori sono l', m', n' ; e se γ è la componente dell'intensità in una direzione formante l'angolo θ con la direzione dell'intensità risultante

$$(20.0.3) \quad \gamma = \Gamma \cos \theta$$

ciò che mostra che la legge di composizione delle intensità è la stessa di quella delle velocità, delle forze e di tutti gli altri vettori.

287. Si debba determinare la condizione affinché una superficie data sia una superficie di flusso.

Sia

$$(20.0.4) \quad F(x, y, z) = \lambda$$

l'equazione di una famiglia di superfici; si ottiene una di esse in particolare considerando λ costante; allora se poniamo

$$(20.0.5) \quad \left| \frac{d\lambda}{dx} \right|^2 + \left| \frac{d\lambda}{dy} \right|^2 + \left| \frac{d\lambda}{dz} \right|^2 = \frac{1}{N^2}$$

i coseni direttori della normale contata nel verso dell'aumento di λ sono

$$(20.0.6) \quad l = N \frac{d\lambda}{dx} \quad m = N \frac{d\lambda}{dy} \quad n = N \frac{d\lambda}{dz}$$

Pertanto, se γ è la componente dell'intensità normale alla superficie,

$$(20.0.7) \quad \gamma = N \left(u \frac{d\lambda}{dx} + v \frac{d\lambda}{dy} + w \frac{d\lambda}{dz} \right)$$

Se $\gamma = 0$, non vi sono correnti attraverso la superficie, e quest'ultima può essere chiamata *superficie di flusso*, poiché il movimento avviene lungo linee tracciate su questa superficie.

288. L'equazione di una superficie di flusso è quindi

$$(20.0.8) \quad u \frac{d\lambda}{dx} + v \frac{d\lambda}{dy} + w \frac{d\lambda}{dz} = 0$$

Se questa equazione è verificata per tutti i valori di λ , tutte le superfici di questa famiglia sono superfici di flusso.

289. Sia un'altra famiglia di superfici il cui parametro è λ' : se queste sono pure superfici di flusso, avremo

$$(20.0.9) \quad u \frac{d\lambda'}{dx} + v \frac{d\lambda'}{dy} + w \frac{d\lambda'}{dz} = 0$$

Se vi è una terza famiglia il cui parametro sia λ'' , si avrà

$$(20.0.10) \quad u \frac{d\lambda''}{dx} + v \frac{d\lambda''}{dy} + w \frac{d\lambda''}{dz} = 0$$

Se eliminiamo tra queste tre equazioni u, v, w scompaiono insieme, e rimane

$$(20.0.11) \quad \begin{vmatrix} \frac{d\lambda}{dx} & \frac{d\lambda}{dy} & \frac{d\lambda}{dz} \\ \frac{d\lambda'}{dx} & \frac{d\lambda'}{dy} & \frac{d\lambda'}{dz} \\ \frac{d\lambda''}{dx} & \frac{d\lambda''}{dy} & \frac{d\lambda''}{dz} \end{vmatrix} = 0$$

cioè che

$$(20.0.12) \quad \lambda'' = \phi(\lambda, \lambda')$$

cioè λ'' è un funzione di λ, λ' .

290. Consideriamo le quattro superfici i cui parametri sono $\lambda, \lambda + d\lambda, \lambda', \lambda' + d\lambda'$. Queste quattro superfici comprendono uno spazio tubolare a quattro facce. che si può chiamare $\delta\lambda, \delta\lambda'$. Poiché questo tubo è limitato dalle superfici attraverso le quali non vi è punto di scorrimento, lo si può chiamare *un tubo di flusso*. Se prendiamo due sezioni trasversali di questo tubo, la quantità che penetra nel tubo da una delle sezioni deve essere uguale a quella che esce dall'altra; e, poiché questa quantità è la stessa per tutte le sezioni del tubo, possiamo chiamarla $L\delta\lambda, \delta\lambda'$, essendo L una certa funzione dei parametri λ, λ' , che definiscono il tubo particolare considerato.

291. Se si indica con δS la sezione di un tubo di flusso per un piano normale a x , abbiamo dalla teoria dei cambiamenti di variabile indipendente

$$(20.0.13) \quad \delta\lambda\delta\lambda' = \delta S \left(\frac{d\lambda}{dy} \frac{d\lambda'}{dz} - \frac{d\lambda}{dz} \frac{d\lambda'}{dy} \right)$$

e dalla definizione delle componenti della corrente

$$(20.0.14) \quad u\delta S = L\delta\lambda\delta\lambda'$$

da cui

$$(20.0.15) \quad \begin{aligned} u &= L \left(\frac{d\lambda}{dy} \frac{d\lambda'}{dz} - \frac{d\lambda}{dz} \frac{d\lambda'}{dy} \right) \\ v &= L \left(\frac{d\lambda}{dz} \frac{d\lambda'}{dx} - \frac{d\lambda}{dx} \frac{d\lambda'}{dz} \right) \\ w &= L \left(\frac{d\lambda}{dx} \frac{d\lambda'}{dy} - \frac{d\lambda}{dy} \frac{d\lambda'}{dx} \right) \end{aligned}$$

292. Se si conosce una delle due funzioni λ o λ' , è sempre possibile determinare l'altra, di modo che L sia uguale all'unità. Per esempio, prendiamo il piano yz , e tracciamovi una serie di linee equidistanti che rappresentano le sezioni per questo piano delle superfici della famiglia λ' . In altri termini, determiniamo la funzione λ' dalla condizione che, per $x = 0$, $\lambda' = z$.

Se allora poniamo $L = 1$, di conseguenza, per $x = 0$,

$$\lambda = \int u dy$$

la quantità di elettricità che passa attraverso una porzione qualunque del piano $x = 0$, sarà

$$(20.0.16) \quad \iint u dy dz = \iint d\lambda d\lambda'$$

Avendo determinato la natura delle sezioni delle superfici di flusso con il piano yz , la forma delle superfici è determinata in ogni punto dalle condizioni (19-38,39). Le due funzioni λ e λ' così determinate bastano a determinare l'intensità in un punto qualunque, per mezzo delle (19-45), dove si è sostituito l'unità al posto di L .

Linee di flusso. 293. Consideriamo due serie di valori di λ e λ' , tali che in ogni serie le differenze successive siano uguali all'unità. Le due serie di superfici definite da questi valori dividono lo spazio in un sistema di tubi a quattro facce, in ognuna delle quali passa l'unità di corrente. Prendendo una unità sufficientemente piccola, si può rappresentare per mezzo di questi tubi ogni particolarità della corrente con l'esattezza voluta. Così l'intensità della corrente che attraversa una superficie qualunque incontrando il sistema di tubi è espressa dal numero di tubi intercettati, poiché ogni tubo porta una corrente di intensità uguale all'unità.

Le intersezioni delle superfici possono essere dette *linee di flusso*. Se si prende una unità sufficientemente piccola, il numero di linee di flusso che incontrano una superficie è approssimativamente uguale al numero di tubi di flusso che tagliano questa superficie. Si può quindi considerare le linee di flusso come rappresentanti non solo la direzione della corrente, ma anche la sua intensità, corrispondendo ognuna delle linee di flusso che passano per una sezione a una corrente di intensità uguale all'unità.

Corrente diffusa e funzioni di intensità. 294. Si chiama *corrente diffusa* lo strato di un conduttore che è compreso tra due superfici di flusso consecutive appartenenti a uno stesso sistema, sia λ' . In questo strato, i tubi di flusso sono determinati dalla funzione λ . Se λ_A e λ_P indicano i valori di λ nei punti A e P , l'intensità di corrente che va da destra a sinistra attraverso una linea tracciata sullo strato tra A e P è $\lambda_P - \lambda_A$. Se AP è un elemento ds di una curva tracciata sulla nappa, la corrente che taglia questo elemento di retta a sinistra è

$$\frac{d\lambda}{ds} ds$$

Questa funzione λ , che determina interamente la distribuzione dell'intensità sulla nappa, è detta *funzione di intensità*.

Ogni foglio sottile di metallo o di materiale conduttore, limitato sulle sue due facce dall'aria o da qualche altro mezzo non conduttore, può essere trattato come una nappa di corrente, e la distribuzione dell'intensità può essere espressa per mezzo di una funzione di intensità (vedere §647).

Equazione di continuità. 295. Se differenziamo le tre equazioni (19-45) rispetto a x, y, z rispettivamente, ricordando che L è una funzione di λ e λ' , troviamo

$$(20.0.17) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

La corrispondente equazione in Idrodinamica è detta *equazione di continuità*. La continuità che essa esprime è quella dell'esistenza; in altri termini, essa enuncia il fatto che una sostanza materiale non può partire da un punto dello spazio e arrivare in un altro senza attraversare tutto lo spazio intermedio. Essa non può semplicemente sparire in un punto, e comparire in un altro; ma è necessario che segua un percorso continuo, di modo che, se si traccia una superficie chiusa che comprende uno dei punti e sia esterno all'altro, la sostanza materiale non può passare da un punto all'altro senza attraversare la superficie. La forma più generale di questa equazione in Idrodinamica è

$$(20.0.18) \quad \frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

dove ρ indica il rapporto tra la quantità di materia e il volume che essa occupa, essendo questo volume, nel caso presente, un elemento differenziale di volume; e $\rho u, \rho v, \rho w$ il rapporto tra la quantità di materia che attraversa un elemento di superficie nell'unità di tempo, e questo elemento di superficie, il quale è preso successivamente normale agli assi x, y, z . Così intesa, l'equazione si applica ad ogni tipo di materia, solida o fluida, dotata di un moto continuo o discontinuo, purché l'esistenza delle sue parti sia continua. Se qualche cosa, anche diversa dalla materia, è soggetta a questa condizione della continuità della sua esistenza nel tempo e nello spazio, questa condizione è espressa dall'equazione. Nelle altre parti della Fisica, nella teoria delle quantità elettriche e magnetiche per esempio, si incontrano equazioni della stessa forma che chiameremo *equazioni di continuità* per richiamare la loro forma; senza che si possa attribuire alle quantità in esame né le proprietà della materia, neppure un'esistenza continua nel tempo e nello spazio,

L'equazione (19-47) alla quale diamo giunti, nel caso delle correnti elettriche, è identica alla (19-48), se poniamo $\rho = 1$, cioè se supponiamo la sostanza omogenea e incomprimibile. Nel caso dei fluidi, l'equazione può stabilire con l'uno o l'altro dei metodi presentati nel Trattato di Idrodinamica. In uno di questi metodi, si segue il cammino e la deformazione di un determinato elemento del liquido, durante il suo moto. Nell'altro, si fissa l'attenzione su un elemento dello spazio, e si tiene conto di ciò che entra ed esce. Il primo di questi metodi non si può applicare alle correnti elettriche, poiché non sappiamo con quale velocità l'elettricità si muove nel corpo e neppure se si muove nel verso della corrente positiva o negativa. Tutto ciò che conosciamo si riduce al valore algebrico della quantità che attraversa l'unità d'area nell'unità di tempo, quantità che corrisponde a (ρu) della (19-48). Non possiamo determinare il valore dell'uno o

dell'altro dei fattori ρ o u , e, di conseguenza, non possiamo seguire una massa particolare di elettricità nel suo moto attraverso il corpo. L'altro metodo di ricerca, dove si tiene conto di ciò che passa attraverso le facce di un elemento di volume, si applica alle correnti elettriche; e forse è preferibile, dal punto di vista formale, a quello che abbiamo dato; ma, siccome lo si trova in tutti i trattati di Idrodinamica, non era necessario ripeterlo qui.

Quantità di elettricità che passa attraverso una superficie data. 296. Sia Γ l'intensità risultante in un punto della superficie. Siano dS un elemento di superficie, e ϵ l'angolo tra Γ e la normale alla superficie; la corrente totale che passa attraverso la superficie sarà

$$\iint \Gamma \cos \epsilon dS$$

estendendosi l'integrazione sull'intera superficie.

Come al § 21, possiamo mettere questo integrale nella forma

$$(20.0.19) \quad \iint \Gamma \cos \epsilon dS = \iiint \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) dx dy dz$$

se la superficie è chiusa, essendo i limiti dell'integrale determinati dalla superficie. Questa è un'espressione del flusso totale che esce dalla superficie chiusa. Come in tutti i casi di correnti permanenti, questa quantità si deve annullare, qualunque siano i limiti di integrazione, la quantità sotto il segno di integrale deve essere uguale a 0, e ritroviamo così l'equazione di continuità (19-47).

Resistenza e conducibilità nello spazio a tre dimensioni

Relazioni più generali tra l'intensità e la forza elettromotrice. 297. Siano u, v, w le componenti dell'intensità in un punto qualunque.

Siano X, Y, Z le componenti della forza elettromotrice.

La forza elettromotrice in un punto è la forza risultante che agisce su una unità di elettricità positiva posta in questo punto; essa può essere dovuta:

1° A un'azione elettrostatica, nel qual caso, essendo V il potenziale, si ha

$$(21.0.1) \quad X = -\frac{dV}{dx} \quad Y = -\frac{dV}{dy} \quad Z = -\frac{dV}{dz}$$

2° All'induzione elettromagnetica le cui leggi saranno esaminate in seguito;

3° All'azione termoelettrica o elettrochimica in questo stesso punto, tendente a produrre una corrente di direzione data.

Supporremo, in generale, che X, Y, Z rappresentino le componenti della forza elettromotrice residente in un punto dato, qualunque sia la sua origine; ed esamineremo, in particolare, ciò che si ottiene supponendo la forza elettromagnetica unicamente dovuta a una differenza di potenziale.

Dalla legge di Ohm, l'intensità è proporzionale alla forza elettromotrice. Pertanto X, Y, Z devono essere funzioni lineari di u, v, w . Possiamo quindi prendere come equazioni di resistenza

$$(21.0.2) \quad \begin{cases} X &= R_1u + Q_3v + P_2w \\ Y &= P_3u + R_2v + Q_1w \\ Z &= Q_2u + P_1v + R_3w \end{cases}$$

Possiamo chiamare i coefficienti R coefficienti di resistenza longitudinale nella direzione degli assi coordinati; e i coefficienti P e Q coefficienti di resistenza trasversale; essi indicano la forza elettromagnetica che deve agire in una direzione per produrre una corrente in un'altra direzione.

Se siamo liberi di supporre che un solido può essere trattato come un sistema di conduttori lineari, è facile mostrare, dalla proprietà reciproca di due conduttori di un sistema lineare (§ 281), che la forza elettromotrice diretta lungo le z , che è necessaria per dare l'unità di intensità parallelamente alle y , è uguale alla forza elettromagnetica parallela alle y necessaria per dare l'unità di intensità nella direzione delle z . Ciò viene a dimostrare che $P_1 = Q_1$ e anche che $P_2 = Q_2$ e $P_3 = Q_3$. Se queste condizioni sono soddisfatte, si dice che il sistema dei coefficienti è simmetrico. Se essi non lo sono, si dice che il sistema è distorto.

Abbiamo forti ragioni di credere che il sistema sia simmetrico in tutti i casi che si presentano nella realtà; ma esamineremo alcune delle conseguenze che risulterebbero dall'ipotesi distorta.

298. Le quantità u, v, w si possono esprimere come funzioni lineari di X, Y, Z mediante un sistema di equazioni che si possono chiamare *equazioni di conducibilità*,

$$(21.0.3) \quad \begin{cases} u &= r_1X + p_3Y + q_2Z \\ v &= q_3X + r_2Y + p_1Z \\ w &= p_2X + q_1Y + r_3Z \end{cases}$$

Possiamo chiamare i coefficienti r coefficienti di conducibilità longitudinale, e i coefficienti p e q coefficienti di conducibilità trasversale.

I coefficienti di resistenza sono gli inversi dei coefficienti di conducibilità. Questa relazione può essere definita come segue:

Siano $[PQR]$ il determinante dei coefficienti di resistenza e $[pqr]$ quello dei coefficienti di conducibilità.

Allora

$$(21.0.4) \quad [PQR] = P_1P_2P_3 + Q_1Q_2Q_3 + R_1R_2R_3 - P_1Q_1R_1 - P_2Q_2R_2 - P_3Q_3R_3$$

$$(21.0.5) \quad [pqr] = p_1p_2p_3 + q_1q_2q_3 + r_1r_2r_3 - p_1q_1r_1 - p_2q_2r_2 - p_3q_3r_3$$

$$(21.0.6) \quad [PQR][pqr] = 1$$

$$(21.0.7) \quad [PQR]p_1 = (P_2P_3 - Q_1R_1) \quad [pqr]P_1 = (p_2p_3 - q_1r_1) \\ \dots \qquad \qquad \qquad \dots$$

Le altre equazioni si ottengono facendo una formazione circolare sui simboli P, Q, R, p, q, r e di indici 1, 2, 3.

Produzione di calore. 299. Per trovare il lavoro compiuto nell'unità di tempo dalla corrente che vince una resistenza e produce così calore, moltiplichiamo le componenti dell'intensità per le corrispondenti componenti della forza elettromotrice. Otteniamo così le espressioni seguenti di W , la quantità di lavoro spesa nell'unità di tempo:

$$(21.0.8) \quad W = Xu + Yv + Zw$$

$$(21.0.9) \quad = R_1u^2 + R_2v^2 + R_3w^2 + (P_1 + Q_1)vw + (P_2 + Q_2)wu + (P_3 + Q_3)wv$$

$$(21.0.10) \quad = r_1X^2 + r_2Y^2 + r_3Z^2 + (p_1 + q_1)YZ + (p_2 + q_2)ZX + (p_3 + q_3)XY$$

Con una scelta di assi opportuna, si può far scomparire dall'una o dall'altra delle ultime due equazioni i termini contenenti i rettangoli di u, v, w o di X, Y, Z . Ma il sistema di assi che riporta W alla forma

$$W = R_1u^2 + R_2v^2 + R_3w^2$$

non è, in generale, lo stesso che lo riduce alla forma

$$W = r_1X^2 + r_2Y^2 + r_3Z^2$$

I due sistemi di assi non coincidono a meno che i coefficienti $P_1P_2P_3$ sono rispettivamente uguali a $Q_1Q_2Q_3$.

Se possiamo, con Thomson¹,

$$(21.0.11) \quad \begin{cases} P = S + T & Q = S - T \\ p = s + t & q = s - t \end{cases}$$

abbiamo

$$(21.0.12) \quad [PQR] = R_1R_2R_3 + 2S_1S_2S_3 - S_1^2R_1 - S_2^2R_2 - S_3^2R_3 + \\ + 2(S_1T_2T_3 + S_2T_3T_1 + S_3T_1T_2) + R_1T_1^2 + R_2T_2^2 + R_3T_3^2$$

E

$$(21.0.13) \quad \begin{cases} [PQR]r_1 = R_2R_3 - S_1^2 + T_1^2 \\ [PQR]s_1 = T_2T_3 + S_2S_3 - R_1S_1 \\ [PQR]t_1 = -R_1T_1 + S_2T_3 + S_3T_2 \end{cases}$$

Se quindi facciamo scomparire S_1, S_2, S_3 , s_1 scomparirà solo se i coefficienti T sono nulli.

¹Trans. R. S. Edin., 1853-4, p. 165.

Condizione di stabilità. 300. Poiché l'equilibrio elettrico è stabile, il lavoro speso per mantenere la corrente deve essere sempre positivo. La condizione perché W sia positivo, è che i tre coefficienti R_1, R_2, R_3 e le tre espressioni

$$(21.0.14) \quad \begin{cases} 4R_2R_3 - (P_1 + Q_1)^2 \\ 4R_3R_1 - (P_2 + Q_2)^2 \\ 4R_1R_2 - (P_3 + Q_3)^2 \end{cases}$$

siano positive.

Vi sono condizioni simili per i coefficienti di conducibilità.

Equazione di continuità in un mezzo omogeneo. 301. Se esprimiamo le componenti della forza elettromotrice come derivate del potenziale V , l'equazione di continuità

$$(21.0.15) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

diviene, per un mezzo omogeneo,

$$(21.0.16) \quad r_1 \frac{d^2V}{dx^2} + r_2 \frac{d^2V}{dy^2} + r_3 \frac{d^2V}{dz^2} + 2s_1 \frac{d^2V}{dydz} + 2s_2 \frac{d^2V}{dzdx} + 2s_3 \frac{d^2V}{dxdy} = 0$$

Se il mezzo non è omogeneo, si introducono termini dovuti alla variazione dei coefficienti di conducibilità quando si passa da un punto ad un altro.

Questa equazione corrisponde all'equazione di Laplace per i mezzi isotropi.

302. Se poniamo

$$(21.0.17) \quad [rs] = r_1r_2r_3 + 2s_1s_2s_3 - r_1s_1^2 - r_2s_2^2 - r_3s_3^2$$

e

$$(21.0.18) \quad [AB] = A_1A_2A_3 + 2B_1B_2B_3 - A_1B_1^2 - A_2B_2^2 - A_3B_3^2$$

dove

$$(21.0.19) \quad \begin{cases} [rs] A_1 = r_2r_3 - s_1^2 \\ [rs] B_1 = s_2s_3 - r_1s_1 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

e così di seguito, il sistema A, B è inverso del sistema r, s ; e se

$$(21.0.20) \quad A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2zx + 2B_3xy = [AB] \rho^2$$

troviamo che

$$(21.0.21) \quad V = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\rho}$$

è la soluzione dell'equazione.

Se i coefficienti T sono nulli, i coefficienti A e B diventano identici a R e S . Ma così non avviene se T non è nullo.

Quindi, nel caso in cui l'elettricità fluisce a partire da un centro posto in un mezzo infinito, omogeneo, ma non isotropo, le superficie equipotenziali sono degli ellissoidi per ognuno dei quali ρ è costante. Gli assi di questi ellissoidi sono diretti lungo gli assi principali di conducibilità. i quali non coincidono con gli assi principali di resistenza se non quando il sistema è simmetrico.

Trasformando questa equazione, si può prendere per assi gli assi principali di conducibilità. I coefficienti della forma s della forma B si riducono allora a zero, e ognuno dei coefficienti della forma A è l'inverso del coefficiente corrispondente della forma r . L'espressione di ρ è

$$(21.0.22) \quad \frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} + \frac{z^2}{r_3} = \frac{\rho^2}{r_1r_2r_3}$$

303. La teoria del sistema completo delle equazioni di resistenza e conducibilità è quella delle funzioni lineare a tre variabili, di cui si trovano esempi nella teoria delle deformazioni

elastiche² e negli altri settori della Fisica. La forma più conveniente per trattare tale teoria è quella che Hamilton e Tait applicano alle funzioni lineari e vettoriali di un vettore. Tuttavia non introdurremo formalmente la notazione dei quaternioni.

Si possono considerare i coefficienti T_1, T_2, T_3 come le componenti rettangolari di un vettore T , la cui grandezza assoluta e la direzione nel corpo sono fissi e indipendenti dalla scelta degli assi coordinati. La stessa cosa è vera per t_1, t_2, t_3 , componenti di un altro vettore t .

In generale, le direzioni dei vettori T e di t non coincidono.

Prendiamo l'asse z , in modo che coincida con il vettore T e trasformiamo, di conseguenza, le equazioni di resistenza; esse assumono la forma

$$(21.0.23) \quad \begin{cases} X &= R_1u + S_3v + S_2w - Tv \\ Y &= S_3u + R_2v + S_1w + Tu \\ Z &= S_2u + S_1v + R_3w \end{cases}$$

Da queste equazioni risulta che possiamo considerare la forza elettromotrice come la risultante di due forze: una dipendente solo dai coefficienti R e S , e l'altra solo da T . La parte che dipende da R e S è legata all'intensità dalla stessa relazione che esiste tra la perpendicolare abbassata sul piano tangente a un ellissoide e il raggio vettore. L'altra parte, che dipende da T , è uguale al prodotto di T per la componente dell'intensità perpendicolare all'asse T ; la sua direzione è perpendicolare all'asse T e alla componente dell'intensità, nel senso in cui sarebbe portata questa componente da una rotazione di 90° attorno a T nel verso positivo.

Se consideriamo l'intensità e T come vettori. la parte della forza elettromotrice dovuta a T è la parte vettoriale del prodotto T per l'intensità.

Il coefficiente T può essere chiamato *coefficiente di rotazione*. Abbiamo motivo di credere che non esiste per alcuna sostanza nota. Se esistesse qualche parte, sarebbe nelle calamite, che hanno in una certa direzione una polarità dovuta senza dubbio a quale fenomeno di rotazione all'interno della sostanza.

304. Ammettendo che non vi sia coefficiente di rotazione, estendiamo il teorema di Thomson dato al § 100 e dimostriamo che il calore sviluppato da una corrente in un sistema in un tempo dato è un minimo unico.

Per semplificare le operazioni algebriche, prendiamo gli assi in modo da ridurre a tre i termini dell'espressione (21-9) e, di conseguenza, nel caso attuale, l'espressione (21-10); si ha allora per l'equazione generale caratteristica (21-16)

$$(21.0.24) \quad r_1 \frac{d^2V}{dx^2} + r_2 \frac{d^2V}{dy^2} + r_3 \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

Siano anche a, b, c tre funzioni di x, y, z che soddisfano alla condizione

$$(21.0.25) \quad \frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0$$

e siano

$$(21.0.26) \quad \begin{cases} a &= -r_1 \frac{dV}{dx} + u \\ b &= -r_2 \frac{dV}{dy} + v \\ c &= -r_3 \frac{dV}{dz} + w \end{cases}$$

Prendiamo infine l'integrale triplo

$$(21.0.27) \quad W = \iiint (R_1a^2 + R_2b^2 + R_3c^2) dx dy dz$$

per spazi definiti come nell'enunciato del § 100, cioè tali che V sia costante in certe parti, e che componente del vettore a, b, c lungo la normale alle superfici limite delle altre parti sia data e

²Si veda Thomson e Tait, *Natural Philosophy*, § 154.

soggetta, inoltre, alla restrizione che il suo integrale preso sull'insieme della superficie limite sia nullo; allora W sarà minimo se

$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = 0$$

Infatti, abbiamo,

$$r_1 R_1 = 1 \quad r_2 R_2 = 1 \quad r_3 R_3 = 1$$

pertanto, dalla (21-26)

$$(21.0.28) \quad W = \iiint \left[r_1 \left| \frac{dV}{dx} \right|^2 + r_2 \left| \frac{dV}{dy} \right|^2 + r_3 \left| \frac{dV}{dz} \right|^2 \right] dx dy dz + \\ + \iiint (R_1 u^2 + R_2 v^2 + R_3 w^2) dx dy dz + \\ - 2 \iiint \left(u \frac{dV}{dx} + v \frac{dV}{dy} + w \frac{dV}{dz} \right) dx dy dz$$

Ma, poiché

$$(21.0.29) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

il terzo termine si annulla in virtù delle condizioni ai limiti.

Il primo termine della (21-28) è quindi l'unico minimo di W .

305. Siccome questa proposizione ha una grande importanza nella teoria dell'elettricità, può essere utile dare la dimostrazione seguente del caso più generale, sotto una forma priva di operazioni analitiche.

Consideriamo la propagazione dell'elettricità in un conduttore di forma qualsiasi, omogeneo o eterogeneo.

Sappiamo che:

1° Una linea, tracciata lungo la direzione e nel verso della corrente, va da punti a potenziale maggiore a quelli a potenziale minore.

2° Se in tutti i punti del sistema il potenziale è cambiato nello stesso rapporto, l'intensità è cambiata nello stesso rapporto: è la legge di Ohm.

3° Se una certa distribuzione di potenziali produce una certa distribuzione di intensità, e se un'altra distribuzione di potenziali nella prima e nella seconda distribuzione produce una distribuzione di intensità tale che l'intensità della corrente che, in questo terzo caso, passa attraverso una superficie finita data, è uguale alla somma o alla differenza delle intensità delle correnti che attraversano tale superficie nel primo e secondo caso. Infatti, dalla legge di Ohm, l'intensità addizionale dovuta a una variazione di potenziale non dipende dall'intensità iniziale dovuta all'iniziale distribuzione dei potenziali.

4° Se il potenziale è costante sull'insieme di una superficie chiusa non contenente né elettrodi, né forze elettromotrici interne, non vi è corrente all'interno della superficie chiusa, e il potenziale in un punto interno qualunque è uguale al potenziale sulla superficie.

Infatti, se vi sono correnti all'interno della superficie chiusa, esse descrivono curve chiuse, ossia iniziano e finiscono in punti situati all'interno della superficie o su di essa.

Ma, poiché le correnti passano sempre da punti a potenziale maggiore a quelli a potenziale minore, non possono descrivere curve chiuse.

Poiché non vi sono elettrodi all'interno della superficie, la corrente non può iniziare né finire in un punto interno della superficie; poiché il potenziale è lo stesso in tutti i punti della superficie, non vi può essere corrente lungo linee tracciate da un punto a un altro della superficie.

Pertanto, non vi sono correnti all'interno della superficie, e, di conseguenza, differenze di potenziale; poiché una simile differenza produrrebbe correnti. Pertanto, il potenziale in tutti i punti interni è lo stesso di quello sulla superficie chiusa.

5° Se non vi è corrente elettrica che attraversa una parte qualsiasi della superficie chiusa, e se non vi sono all'interno di tale superficie degli elettrodi, né forze elettromotrici interne, non vi è corrente nella superficie e il potenziale è dappertutto lo stesso.

6° Se il potenziale è uniforme su una parte della superficie chiusa, e non passa corrente attraverso il resto della superficie, il potenziale all'interno delle superfici è uniforme per le stesse ragioni.

7° Se si conosce il potenziale per ognuno dei punti di una parte di una superficie chiusa e l'intensità della corrente che attraversa la superficie in ognuno dei punti del resto di questa superficie, può esistere punti interni del corpo solo una distribuzione di potenziali.

Infatti, se un punto qualunque interno al corpo avesse due valori, di cui V_1 fu il primo e V_2 il secondo, possiamo immaginare un terzo caso nel quale il potenziale di ogni punto sarà l'eccesso del primo valore sul secondo. Per la parte della superficie dove si conosce il potenziale, questo diverrà nullo in questo terzo caso; analogamente, l'intensità sarà nulla per tutte le altre parti della superficie; di conseguenza, dal (6), il potenziale sarà nullo per tutti i punti all'interno della superficie: non deve quindi esistere differenza di potenziale tra V_1 e V_2 . Vi è pertanto una sola distribuzione di potenziali possibile. Questa proposizione è vera, sia che il solido sia limitato da una o più superfici chiuse.

Calcolo approssimato della resistenza di un conduttore di forma data. 306. Il conduttore che consideriamo qui ha la sua superficie divisa in tre parti: su una, il potenziale è mantenuto a un valore costante; sull'altra, ha un valore costante differente dal primo; tutto il resto della superficie è impenetrabile all'elettricità. Possiamo supporre che si soddisfino le condizioni relative alla prima e alla seconda parte, applicando sul conduttore due elettrodi fatti a una sostanza perfettamente conduttrice, e quella che è relativa al resto della superficie, ricoperta da uno strato di materia perfettamente isolante.

In queste condizioni, l'intensità in ogni punto del conduttore è proporzionale alla differenza di potenziale agli elettrodi. Chiamando questa differenza *forza elettromotrice*, l'intensità totale dall'uno all'altro di questi elettrodi è il prodotto della forza elettromotrice per la conducibilità dell'intero conduttore, e la resistenza del conduttore è l'inverso della sua conducibilità.

Soltanto quando un conduttore si trova quasi nelle condizioni così definite che si può affermare che, preso nel suo insieme, ha una resistenza o una conducibilità determinata. Una bobina di resistenza, formata da un filo sottile che termina con grosse masse di rame, soddisfa quasi queste condizioni; poiché il potenziale è sensibilmente costante in questi elettrodi massivi, le differenze di potenziale che possono esistere tra i diversi punti di uno stesso elettrodo possono essere trascurati a fronte della differenza di potenziale ai due elettrodi.

Un metodo molto utile per calcolare la resistenza di simili conduttori è stata fornita per la prima volta, a mia conoscenza, nella Memoria di lord Raleygh nella *Teoria della Risonanza*³.

Essa è basata sulle seguenti considerazioni: se la resistenza specifica di una parte del conduttore cambia, mentre quella del resto del conduttore rimane invariata, la resistenza del conduttore totale aumenta o diminuisce a seconda che la resistenza di questa parte aumenta o diminuisce.

Questo principio può essere considerato come evidente; è pure facile mostrare che il valore dell'espressione che dà la resistenza di un sistema di conduttori tra due punti scelti come elettrodi cresce con il crescere della resistenza di ognuno degli elementi del sistema.

Da ciò risulta che, nella massa del conduttore, tracciamo una superficie di forma qualunque, e se supponiamo che questa superficie sia una falda infinitamente sottile, formata da una sostanza perfettamente conduttrice, la resistenza del conduttore totale sarà diminuita, a meno che la superficie non sia una superficie equipotenziale quando il corpi è in condizioni naturali; poiché allora, essendo questa superficie già in equilibrio elettrico, nessun effetto sarà prodotto quando la si renderà perfettamente conduttrice.

Tracciamo quindi all'interno del conduttore una serie di superfici: la prima coincidente con il primo elettrodo, la seconda con il secondo elettrodo, essendo le superfici intermedie limitate dalla superficie non conduttrice e non taglientesi tra loro; supponiamo che ognuna di queste superfici sia una falda infinitamente sottile, di una sostanza perfettamente conduttrice.

³*Phil. Trans.*, 1871.

Avremo così costituito un sistema la cui resistenza non è certamente superiore alla resistenza del conduttore proposto, e gli diviene uguale solo se le superfici che abbiamo scelto sono le superfici equipotenziali naturali.

Ma calcolare la resistenza del sistema artificiale è un'operazione ben più facile del problema iniziale; poiché la resistenza dell'insieme è la somma delle resistenze di tutti gli strati compresi tra le superfici successive, e si può trovare, così come segue, la resistenza di ogni strato.

Siano

dS un elemento di superficie dello strato,

ν lo spessore dello strato perpendicolarmente a questo elemento,

ρ la resistenza specifica,

E la differenza di potenziale delle due superfici perfettamente conduttrici,

dC l'intensità di corrente che passa attraverso dS ;

allora

$$(21.0.30) \quad dC = E \frac{1}{\rho\nu} dS$$

e l'intensità di corrente totale che attraversa lo strato è

$$(21.0.31) \quad C = \iint \frac{1}{\rho\nu} dS$$

estendendosi l'integrazione a tutto lo strato limitato dalla superficie non conduttrice del conduttore.

Perciò la conducibilità del conduttore è

$$(21.0.32) \quad \frac{C}{E} = \iint \frac{1}{\rho\nu} dS$$

e la resistenza dello strato è l'inverso di questa quantità.

Se lo strato è limitato da due superfici per le quali una funzione F ha valori F e $F + dF$, si ha

$$(21.0.33) \quad \frac{dF}{\nu} = \nabla F = \left[\left(\frac{dF}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dF}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

e la resistenza dello strato

$$(21.0.34) \quad \frac{dF}{\iint \frac{1}{\rho} \nabla F dS}$$

Per trovare la resistenza dell'insieme del conduttore, ci basta integrare rispetto a F e troviamo

$$(21.0.35) \quad R_1 = \int \frac{dF}{\iint \frac{1}{\rho} \nabla F dS}$$

La resistenza R del conduttore, nel suo stato naturale, è più grande del valore così trovato, a meno che le superfici scelte non siano le equipotenziali naturali. D'altra parte, siccome il valore di R è il massimo assoluto dei valori di R_1 e può essere così ottenuto, una leggera differenza tra le superfici scelte e quelle equipotenziali esatte produrrà su R solo un errore in proporzione piccolo.

Questo metodo per determinare un limite inferiore del valore della resistenza è evidentemente di una generalità perfetta, e si può applicare a conduttori di forma qualsiasi, anche quando la resistenza specifica ρ varierà in un modo qualunque nell'interno del conduttore.

L'esempio più familiare di questo metodo è il modo in cui si determina abitualmente la resistenza di un filo metallico teso di sezione variabile. In questo caso, le superfici che si scelgono sono piani perpendicolari all'asse del filo; gli strati hanno facce parallele e la resistenza di uno strato di sezione S e di spessore ds è

$$(21.0.36) \quad dR_1 = \frac{\rho ds}{S}$$

e la resistenza di un filo intero di lunghezza s è

$$(21.0.37) \quad R_1 = \int \frac{\rho ds}{S}$$

essendo S la sezione trasversale, la quale è funzione di s .

Nel caso di fili la cui sezione varia lentamente con la lunghezza, questo metodo fornisce risultati molto vicini al vero; ma è, in realtà, solo un limite inferiore, e la resistenza effettiva è sempre maggiore, salvo nel caso in cui la sezione è perfettamente uniforme.

307. Per trovare un limite superiore della resistenza, supponiamo di tracciare nel corpo una superficie e che la si renda impenetrabile all'elettricità. L'effetto sarà di aumentare la resistenza del conduttore, a meno che la superficie non sia una superficie naturale di flusso. Per mezzo di due sistemi di superfici, possiamo formare una serie di tubi che determinano completamente il flusso; e l'effetto di questo sistema di superfici impenetrabili, se un effetto si produce, è di aumentare la resistenza del conduttore oltre il suo valore naturale.

La resistenza di ogni tubo può essere calcolata con il metodo dato per un filo sottile, e la resistenza del conduttore è l'inverso della somma degli inversi delle resistenze di tutti i tubi. La resistenza così trovata è maggiore della resistenza effettiva, a meno che i tubi non siano le linee naturali di flusso.

Nel caso già considerato di un conduttore a forma di solido di rivoluzione allungato, contiamo le x lungo l'asse, e sia b il raggio della sezione fatta in un punto qualunque. Prendiamo per una delle serie di superfici impenetrabili del piano passanti per l'asse, per ognuna delle quali ϕ è costante; per l'altra, superfici di rivoluzione, per le quali

$$(21.0.38) \quad y^2 = \psi b^2$$

essendo ψ una quantità numerica compresa tra 0 e 1.

Consideriamo una porzione del tubo limitata dalle superfici ϕ e $\phi + d\phi$, ψ e $\psi + d\psi$, e $x + dx$.

La sezione del tubo perpendicolare all'asse è

$$(21.0.39) \quad y dy d\phi = \frac{1}{2} b^2 d\psi d\phi$$

Se θ è l'angolo del tubo con l'asse

$$(21.0.40) \quad \tan \theta = \psi^{\frac{1}{2}} \frac{db}{dx}$$

La vera grandezza dell'elemento del tubo è $dx \sec \theta$ e la sua sezione vera è

$$\frac{1}{2} b^2 d\psi d\phi \cos \theta$$

di modo che la resistenza è

$$(21.0.41) \quad 2\rho \frac{dx}{b^2 d\psi d\phi} \sec^2 \theta = 2\rho \frac{dx}{b^2 d\psi d\phi} \left(1 + \psi \left(\frac{db}{dx} \right)^2 \right)$$

Siano

$$(21.0.42) \quad A = \int \frac{\rho}{b^2} dx \quad B = \int \frac{\rho}{b^2} \left(\frac{db}{dx} \right)^2 dx$$

estendendosi l'integrazione a tutta la lunghezza x del conduttore; allora la resistenza del tubo $d\psi d\phi$ è

$$\frac{2}{d\psi d\phi} (A + \psi B)$$

e la sua conducibilità

$$\frac{d\psi d\phi}{2(A + \psi B)}$$

Per trovare la conducibilità di tutto il conduttore, che è la somma delle conducibilità dei diversi tubi, dobbiamo integrare questa equazione da $\phi = 0$ fino a $\phi = 2\pi$, e da $\psi = 0$ a $\psi = 1$. Il risultato è

$$(21.0.43) \quad \frac{1}{R'} = \frac{\pi}{B} \log \left(1 + \frac{B}{A} \right)$$

esso può essere inferiore, ma non superiore alla conducibilità vera del conduttore.

Se $\frac{db}{dx}$ è sempre una piccola quantità, $\frac{B}{A}$ è anche piccolo, e possiamo sviluppare l'espressione della conducibilità sotto la forma

$$(21.0.44) \quad \frac{1}{R'} = \frac{\pi}{A} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{B}{A} + \frac{1}{3} \frac{B^2}{A^2} - \frac{1}{4} \frac{B^3}{A^3} + \dots \right)$$

Il primo termine $\frac{\pi}{A}$ è quello che si sarebbe trovato, con il primo metodo, come limite superiore della conducibilità. Pertanto la conducibilità vera è inferiore al primo termine, ma superiore all'intera serie. Il limite superiore della resistenza è l'inverso di questa, cioè

$$(21.0.45) \quad R' = \frac{A}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{B}{A} - \frac{1}{12} \frac{B^2}{A^2} + \frac{1}{24} \frac{B^3}{A^3} - \dots \right)$$

Se avessimo supposto non solo che il flusso è diretto dalle superfici ϕ e ψ ma anche che il flusso in ogni tubo è proporzionale a $d\phi d\psi$, si sarebbe ottenuto, come valore della resistenza, sotto questa restrizione ulteriore

$$(21.0.46) \quad R' = \frac{1}{\pi} \left(A + \frac{1}{2} B \right)$$

la quale è evidentemente superiore al primo valore, così come dovrebbe essere in ragione di questa restrizione aggiuntiva. Nella Memoria di lord Raleygh, questa ipotesi è presente, e il limite superiore della resistenza che vi è dato ha il valore della (21-46), un poco più grande di quello ottenuto con la (21-45).

308. Applichiamo ora questo stesso metodo alla ricerca della correzione che bisogna applicare alla lunghezza di un conduttore cilindrico di raggio a , quando la sua estremità è messa a contatto con un elettrodo massivo, che supporremo fatto di un metallo diverso.

Per trovare il limite inferiore, possiamo supporre che si interponga tra la fine del cilindro e l'elettrodo massivo un disco infinitamente sottile di una sostanza perfettamente conduttrice, in modo che il potenziale si dappertutto lo stesso alla fine del cilindro. Allora il potenziale nel cilindro sarà solo funzione della sua lunghezza; e, se supponiamo che la superficie di contatto dell'elettrodo e del cilindro sia all'incirca piana e che l'elettrodo abbia dimensioni considerevoli rispetto al diametro del cilindro, la distribuzione del potenziale sarà la stessa di quella che è prodotta su un conduttore a forma di disco posto in un mezzo infinito (si veda § 151 e 177).

Se E è la differenza tra il potenziale del disco e quello delle parti più lontane dell'elettrodo, C l'intensità della corrente che va dalla superficie del disco all'elettrodo, e se ρ' è la resistenza specifica dell'elettrodo; se infine Q è la quantità di elettricità distribuita sul disco e che supponiamo distribuita come al § 151, abbiamo

$$(21.0.47) \quad \rho' C = \frac{1}{2} \cdot 4\pi Q = 2\pi \frac{aE}{\frac{\pi}{2}} = 4aE$$

Se quindi il filo presenta una lunghezza L da un punto dato fino all'elettrodo, e se la sua resistenza specifica è ρ , la sua resistenza, dal punto scelto fino a un punto dell'elettrodo non posto vicino alla giunzione, è

$$R = \rho \frac{L}{\pi a^2} + \frac{\rho'}{4a}$$

che si può scrivere come

$$(21.0.48) \quad R = \frac{\rho}{\pi a^2} \left(L + \frac{\rho' \pi a}{\rho} \frac{1}{4} \right)$$

dove il secondo termine della parentesi è una quantità che si deve aggiungere alla lunghezza del cilindro o del filo quando si calcola la sua resistenza, e che è evidentemente una correzione molto piccola.

Per comprendere la natura dell'errore, bisogna osservare che abbiamo sempre supposto il flusso uniforme in tutta la sezione del filo, ivi compreso il disco: in ogni punto, è inversamente proporzionale alla corda minima passante per questo punto. Nel caso attuale, il flusso attraverso il disco non è uniforme; ma non è più molto diverso da un punto ad un altro come abbiamo qui supposto. Nel caso attuale, il potenziale del disco non è uniforme, ma varia e diminuisce quando si va dalla zone mediana verso i bordi.

309. Determineremo ora una quantità più grande della resistenza reale, imponendo al flusso di essere uniforme in tutti i punti del disco. Possiamo supporre che le forze elettromotrici introdotte a tale scopo agiscano perpendicolarmente alla superficie del disco.

La resistenza del filo sarà la stessa che in precedenza; ma la quantità di calore prodotto nell'elettrodo sarà l'integrale di superficie del prodotto del flusso per il potenziale. Ora il flusso, in un punto qualunque, è

$$\frac{C}{4\pi a^2}$$

e il potenziale è lo stesso di quello di una superficie elettrizzata per la quale la densità superficiale σ è

$$(21.0.49) \quad 2\pi\sigma = \frac{C\rho'}{\pi a^2}$$

essendo ρ' la resistenza specifica.

Dobbiamo quindi determinare l'energia potenziale della carica di un disco la cui densità superficiale è uniforme e uguale a σ .

Si trova⁴ facilmente che sui bordi di un disco dove la densità superficiale è uniforme e uguale a σ , il potenziale è $4a\sigma$.

Il lavoro compiuto, se si aggiunge alla circonferenza del disco una banda di spessore da , è $2\pi a\sigma da \cdot 4a\sigma$ e l'energia potenziale totale del disco è l'integrale di questa espressione, cioè

$$(21.0.50) \quad P = \frac{8\pi}{3} a^3 \sigma^2$$

Nel caso della conduzione elettrica, il lavoro compiuto in un elettrodo di resistenza R' è $C^2 R'$, ma, dall'equazione generale della conduzione, l'intensità di corrente che passa attraverso l'unità di area del disco è della forma

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dV}{d\nu}$$

o

$$\frac{4\pi}{\rho'} \sigma$$

Pertanto la quantità di lavoro compiuto è

$$\frac{4\pi}{\rho'} P$$

Abbiamo quindi

$$(21.0.51) \quad C^2 R' = \frac{4\pi}{\rho'} P$$

da cui, in virtù delle (21-48,49)

$$R' = \frac{8\rho'}{3\pi^2 a}$$

⁴Si veda una Memoria del professor Carley, *London Math. Soc. Proc.*, VI, p. 47.

e la correzione che bisogna far subire alla lunghezza del cilindro è

$$\frac{\rho'}{\rho} \frac{8}{3\pi} a$$

essendo questa superiore al valore reale. La correzione vera da fare sulla lunghezza è quindi $\frac{\rho'}{\rho} an$, dove n è un numero compreso tra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{8}{4\pi}$, cioè tra 0,785 e 0,849.

Per una seconda approssimazione, lord Raleygh ha ridotto a 0,8282 il limite superiore di n^5 .

⁵*Phil. Mag.*, novembre 1872. Poi, lord Rayleigh ha ottenuto per limite superiore 0,8242 (si veda *London Math. Soc. Proc.*, VIII, p. 74.)

Conduzione nei mezzi eterogenei

Condizioni che devono essere soddisfatte alla superficie di separazione di due mezzi conduttori. 310. Vi sono due condizioni da soddisfare, in generale, per ogni distribuzione di corrente: la condizione di continuità del potenziale e di continuità delle correnti elettriche.

La prima esige che due punti infinitamente vicini, ma posto da parti opposte della superficie di separazione dei due mezzi, siano a potenziali uguali. È inteso che i potenziali sono misurati con un elettrometro collegato nel punto considerato mediante un elettrodo fatta di un metallo assegnato. Ma, se i potenziali sono misurati con il metodo descritto ai § 222 e 246, dove gli elettrodi terminano in una cavità piena d'aria, scavata nel conduttore, i potenziali di due punti vicini presi su metalli differenti dovranno differire di una certa quantità che dipende dalla natura e dalla temperatura dei due metalli.

L'altra condizione alla superficie è che la corrente che passa attraverso un elemento qualunque della superficie di separazione abbia lo stesso valore, qualunque sia quello del mezzo nel quale lo si misura.

Così, essendo V_1 e V_2 i potenziali nei due mezzi, in un punto qualunque della superficie di separazione,

$$(22.0.1) \quad V_1 = V_2$$

e, se u_1, v_1, w_1 e u_2, v_2, w_2 sono le componenti dell'intensità nei due mezzi, e l, m, n i coseni direttori della normale alla superficie di separazione

$$(22.0.2) \quad lu_1 + mv_1 + nw_1 = lu_2 + mv_2 + nw_2$$

Nel caso più generale, u, v, w sono funzioni lineari delle derivate di V e sono rappresentati da equazioni della forma

$$(22.0.3) \quad \begin{cases} u = r_1X + p_3Y + q_2Z \\ v = q_3X + r_2Y + p_1Z \\ w = p_2X + qY + r_3Z \end{cases}$$

dove X, Y, Z sono le derivate parziali di V rispetto a x, y, z .

Consideriamo il caso dove la superficie separa un mezzo che ha coefficienti di conduzione di un mezzo isotropo, con coefficiente di conduzione uguale a r .

Siano X', Y', Z' i valori di X, Y, Z nel mezzo isotropo; abbiamo alla superficie

$$(22.0.4) \quad V = V'$$

o

$$(22.0.5) \quad Xdx + Ydy + Zdz = X'dx + Y'dy + Z'dz$$

quando

$$(22.0.6) \quad ldx + mdy + ndz = 0$$

Questa condizione dà

$$(22.0.7) \quad X' = X + 4\pi\sigma l \quad Y' = Y + 4\pi\sigma m \quad Z' = Z + 4\pi\sigma n$$

dove σ è la densità superficiale.

Abbiamo così, nel mezzo isotropo,

$$(22.0.8) \quad u' = rX' \quad v' = rY' \quad w' = rZ'$$

e alla superficie la conduzione del flusso è

$$(22.0.9) \quad u'l + v'm + w'n = ul + vm + wn$$

o ancora

$$(22.0.10) \quad r(lX + mY + nZ + 4\pi\sigma) = l(r_1X + p_3Y + q_2Z) + \\ + m(q_3X + r_2Y + p_1Z) + n(p_2X + q_1Y + r_3Z)$$

pertanto

$$(22.0.11) \quad 4\pi\sigma r = (l(r_1 - r) + mq_3 + np_2)X + (lp_3 + m(r_2 - r) + nq_1)Y + \\ + (lq_2 + mp_1 + n(r_3 - r))Z$$

La quantità σ rappresenta la densità superficiale della carica, alla superficie di separazione. Nelle sostanze cristalline o organizzate, essa dipende dalla direzione della superficie, così come dalla forza che è normale a questa superficie. Nelle sostanze isotrope, p e q sono nulli, e tutti i coefficienti r sono uguali, di modo che

$$(22.0.12) \quad 4\pi\sigma = \left(\frac{r_1}{r} - 1\right)(lX + mY + nZ)$$

dove r_1 è la conducibilità della sostanza, e r quella del mezzo esterno, e l, m, n i coseni direttori della normale diretta verso il mezzo la cui conducibilità è r .

Se i due mezzi sono isotropi, le condizioni possono essere alquanto semplificate; poichè, essendo k la resistenza specifica per unità di volume,

$$(22.0.13) \quad u = -\frac{1}{k} \frac{dV}{dx} \quad v = -\frac{1}{k} \frac{dV}{dy} \quad w = -\frac{1}{k} \frac{dV}{dz}$$

e se ν è la normale tracciata in un punto della superficie di separazione, dal primo mezzo verso il secondo, la condizione di continuità è

$$(22.0.14) \quad \frac{1}{k_1} \frac{dV_1}{d\nu} = \frac{1}{k_2} \frac{dV_2}{d\nu}$$

Se θ_1 e θ_2 sono gli angoli che formano, con la normale alla superficie di separazione, le linee di flusso nel primo e nel secondo mezzo, le tangenti a queste linee di flusso sono in un piano contenente la normale e poste da entrambe le parti di questa normale, e

$$(22.0.15) \quad k_1 \tan \theta_1 = k_2 \tan \theta_2$$

Questa si può chiamare la *legge di rifrazione delle linee di flusso*.

311. Per dare un esempio delle condizioni che devono essere soddisfatte quando l'elettricità attraversa la superficie di separazione di due mezzi, considereremo una superficie sferica di raggio a , essendo la resistenza specifica k_1 all'interno della sfera e k_2 all'esterno.

Sviluppriamo in armoniche solide il potenziale dell'interno e quello dell'esterno della superficie, e siano

$$(22.0.16) \quad V_1 = (A_1 r^i + B_1 r^{-(i+1)}) S_i$$

$$(22.0.17) \quad V_2 = (A_2 r^i + B_2 r^{-(i+1)}) S_i$$

le parti che, per l'interno e l'esterno della sfera, dipendono dall'armonica di superficie S_i .

Alla superficie di separazione, dove $r = a$, dobbiamo avere

$$(22.0.18) \quad V_1 = V_2 \quad \frac{1}{k_1} \frac{dV_1}{dr} = \frac{1}{k_2} \frac{dV_2}{dr}$$

Da queste condizioni ricaviamo le equazioni

$$(22.0.19) \quad \begin{cases} (A_1 - A_2) a^{2i+1} + (B_1 - B_2) = 0 \\ \left(\frac{1}{k_1} A_1 - \frac{1}{k_2} A_2\right) i a^{2i+1} - \left(\frac{1}{k_1} B_1 - \frac{1}{k_2} B_2\right) (i+1) = 0 \end{cases}$$

Se conosciamo due delle quattro quantità A_1, A_2, B_1, B_2 , queste equazioni bastano a determinare le altre due.

Supponiamo note A_1 e B_1 , troviamo le espressioni seguenti di A_2 e B_2 :

$$(22.0.20) \quad \begin{cases} A_2 = \frac{[k_1(i+1)+k_2i]A_1+(k_1-k_2)(i+1)B_1 a^{-(2i+1)}}{k_1(2i+1)} \\ B_2 = \frac{(k_1-k_2)iA_1 a^{2i+1}+[k_1i+k_2(i+1)]B_1}{k_1(2i+1)} \end{cases}$$

Si possono così trovare le condizioni alle quali deve soddisfare ogni termine dello sviluppo armonico del potenziale, per un numero qualunque di strati limitati da superfici sferiche concentriche.

312. Siano a_1 il raggio della prima superficie sferica, a_2 il raggio di una seconda superficie sferica maggiore, oltre la quale la resistenza specifica è k_2 . Se non vi sono all'interno di queste sfere né sorgenti, né perdite di elettricità, non vi sono valori infiniti di V e avremo $B_1 = 0$.

Troviamo allora, per i coefficienti A_2 e B_2 del mezzo esterni

$$(22.0.21) \quad \begin{cases} A_3 k_1 k_2 (2i+1)^2 = \{ [k_1(i+1)+k_2i] [k_2(i+1)+k_3i] + \\ \quad + i(i+1)(k_1-k_2)(k_2-k_3) \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1} \} A_1 \\ B_3 k_1 k_2 (2i+1)^2 = \{ i [k_1(i+1)+k_2i] (k_2-k_3) a_2^{2i+1} + \\ \quad + i(k_1-k_2) [k_2i+k_3(i+1)] a_1^{2i+1} \} A_1 \end{cases}$$

Il valore del potenziale nel mezzo esterno dipende in parte da sorgenti esterne di elettricità che producono le correnti, indipendentemente dall'esistenza della sfera di materia non omogenea introdotta nel campo da queste sorgenti, e in parte dalla perturbazione causata dall'introduzione di questa sfera eterogenea.

La prima parte dipende solo da armoniche solide di grado positivo, poiché essa non può avere valori infiniti all'interno della sfera.

La seconda parte deve dipendere solo da armoniche di grado negativo, poiché essa si deve annullare a una distanza infinita dal centro della sfera.

Pertanto, il potenziale dovuto alle forze elettromotrici esterne deve essere sviluppabile in una serie armonica solida, di grado positivo. Sia A_3 il coefficiente di una di esse, della forma $A_3 S_i r^i$; possiamo trovare A_1 , il coefficiente corrispondente per la sfera interna, dalla (22-21), e da questa dedurre A_2, B_2, B_3 . Da ciò, B_3 rappresenta l'effetto prodotto sul potenziale dal mezzo esterno dall'introduzione di sfere eterogenee.

Supponiamo ora $k_3 = k_1$; saremo quindi nel caso di un involuppo cavo, per il quale $k = k_2$, che separa un mezzo interno da un esterno simile, nel quale $k = k_1$.

Se poniamo

$$C = \frac{1}{(2i+1)^2 k_1 k_2 + i(i+1)(k_2-k_1)^2 \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right)}$$

allora

$$(22.0.22) \quad \begin{cases} A_1 = k_1 k_2 (2i+1)^2 C A_3 \\ A_2 = k_2 (2i+1) [k_1(i+1)+k_2i] C A_3 \\ B_2 = k_2 (2i+1) (k_1-k_2) a_1^{2i+1} C A_3 \\ B_3 = i(k_2-k_1) [k_1(i+1)+k_2i] \left(a_2^{2i+1} - a_1^{2i+1}\right) C A_3 \end{cases}$$

La differenza tra A_3 , il coefficiente non perturbato, e il suo valore A_1 nella cavità interna dell'involuppo sferico, è

$$(22.0.23) \quad A_3 - A_1 = (k_2 - k_1)^2 i(i+1) \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right) C A_3$$

Poiché questa quantità è sempre positiva, per qualunque valore di k_1 e k_2 , risulta che l'azione elettrica, nello spazio compreso all'interno dell'involuppo, è minore di quanto non sarebbe stato se lo strato sferico conducesse meglio o peggio del resto del mezzo. Se l'involuppo conduce meglio del resto del mezzo, esso tende a pareggiare il potenziale in tutta l'estensione della sfera

interna. Se conduce meno bene, esso tende a impedire assolutamente alle correnti elettriche di raggiungere la sfera interna.

Il caso di una sfera massiva può essere dedotto da questo, ponendo $a_1 = 0$, o può essere studiato direttamente.

313. Il termine più importante nello sviluppo armonico è quello nel quale $i = 1$; si ha

$$(22.0.24) \quad \begin{cases} C = \frac{1}{9k_1k_2 + 2(k_2 - k_1)^2 \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)} \\ A_1 = 9k_1k_2CA_3 & A_2 = 3k_2(2k_1 + k_2)CA_3 \\ B_2 = 3k_2(k_1 - k_2)a_1^3CA_3 & B_3 = (k_2 - k_1)(2k_1 + k_2)(a_2^3 - a_1^3)CA_3 \end{cases}$$

Il caso di una sfera massiva di resistenza k_2 , si può dedurre ponendo $a_1 = 0$. Si ha allora

$$(22.0.25) \quad \begin{cases} A_2 = \frac{3k_2}{k_1 + 2k_2}A_3 & B_2 = 0 \\ B_3 = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + 2k_2}a_2^3A_3 \end{cases}$$

È facile mostrare, mediante espressioni generali, che il valore di B_3 è lo stesso nel caso di una sfera cava formata da un nucleo di resistenza k_1 circondato da un involucro di resistenza k_2 , e, nel caso di una sfera massiva e omogenea, avente per raggio il raggio della superficie esterna e con una resistenza K , dove

$$(22.0.26) \quad K = \frac{(2k_1 + k_2)a_2^3 + (k_1 - k_2)a_1^3}{(2k_1 + k_2)a_2^3 - 2(k_1 - k_2)a_1^3}k_2$$

314. Se si hanno n sfere di raggio a_1 e resistenza k_1 , distribuite in un mezzo di resistenza k_2 e a distanze tra loro tali che si possano considerare come indipendenti gli effetti di perturbazione che esse esercitano sul percorso della corrente, e se queste sfere sono tutte contenute in una sfera di raggio a_2 , il potenziale, in un punto molto lontano dal centro di questa sfera, sarà della forma

$$(22.0.27) \quad V = \left(Ar + nB\frac{1}{r^2}\right) \cos \theta$$

essendo il valore di B

$$(22.0.28) \quad B = \frac{k_1 - k_2}{2k_1 + k_2}a_1^3A$$

Il rapporto tra il volume di n piccole sfere e quello della sfera che le contiene è

$$(22.0.29) \quad p = n\frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Il valore del potenziale, in un punto lontano dal centro della sfera, potrà essere messo nella forma

$$(22.0.30) \quad V = A \left(r + pa_2^3 \frac{k_1 - k_2}{2k_1 + k_2} \frac{1}{r^2}\right) \cos \theta$$

Ora, se l'intera sfera fosse stata fatta di una sostanza avente la resistenza specifica K , si avrebbe

$$(22.0.31) \quad V = A \left(r + a_2^3 \frac{K - k_2}{2K + k_2} \frac{1}{r^2}\right) \cos \theta$$

Affinché una di queste espressioni sia equivalente all'altra, serve che

$$(22.0.32) \quad K = \frac{2k_1 + k_2 + p(k_1 - k_2)}{2k_1 + k_2 - 2p(k_1 - k_2)}k_2$$

Questa è quindi la resistenza specifica del mezzo composto, formato da una sostanza di resistenza k_2 nella quale sono disseminate piccole sfere di resistenza k_1 , essendo il rapporto tra il volume delle piccole sfere e il volume della massa totale uguale a p . Affinché non si producano effetti dovuti alle reazioni reciproche di queste sfere, bisogna che i loro raggi siano piccoli in confronto alle loro distanze, o che p sia una frazione assai piccola.

Questo risultato può pure essere ottenuto con altri metodi; ma quello qui mostrato non fa che riprendere il risultato già ottenuto nel caso di una sola sfera.

Se la distanza delle sfere non è grande rispetto al loro raggio e se $\frac{k_1-k_2}{2k_1+k_2}$ è considerevole, altri termini si introducono nel risultato che esamineremo ora. Grazie all'esistenza di questi termini, certe distribuzioni delle sfere danno luogo a resistenze del mezzo composto variabili nelle diverse direzioni.

Applicazione del principio delle immagini. 315. Prendiamo per esempio il caso di due mezzo separati da una superficie piana, e supponiamo che, nel primo mezzo, a una distanza a dalla superficie, vi sia una sorgente S di elettricità, che emette una quantità di elettricità S nell'unità di tempo.

Se il primo mezzo si estendesse indefinitamente, la corrente avrebbe, in un punto qualunque P , la direzione SP , e il potenziale in P sarebbe $\frac{E}{r_1}$, dove $E = \frac{Sk_1}{4\pi}$ e $r_1 = SP$.

Nel caso attuale, le condizioni sono soddisfatte, se si prende un punto I , immagine di S nel secondo mezzo, di modo che il piano di separazione dei due mezzi divida normalmente IS in due parti uguali. Sia r_2 la distanza di un punto qualunque dal punto I ; alla superficie di separazione

$$(22.0.33) \quad r_1 = r_2$$

$$(22.0.34) \quad \frac{dr_1}{d\nu} = -\frac{dr_2}{d\nu}$$

Sia V_1 il potenziale in un punto del primo mezzo, dovuto a una quantità di elettricità E posta in S , e a un'altra quantità E_2 fittiziamente posta in I ; sia V_2 il potenziale in un punto del secondo mezzo, dovuto a una quantità E_1 fittiziamente posta in S . Allora, se

$$(22.0.35) \quad V_1 = \frac{E}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} \quad V_2 = \frac{E_1}{r_1}$$

la condizione alla superficie $V_1 = V_2$ dà

$$(22.0.36) \quad E + E_2 = E_1$$

e la condizione

$$(22.0.37) \quad \frac{1}{k_1} \frac{dV_1}{d\nu} = \frac{1}{k_2} \frac{dV_2}{d\nu}$$

dà

$$(22.0.38) \quad \frac{1}{k_1} (E - E_2) = \frac{1}{k_2} E_1$$

da cui

$$(22.0.39) \quad E_1 = \frac{2k_2}{k_1+k_2} E \quad E_2 = \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2} E$$

Il potenziale nel primo mezzo è quindi uguale a quello che produrrebbe nell'aria, secondo la teoria elettrostatica, una carica E posta in S e una carica E_2 posta in I ; e il potenziale nel secondo mezzo è uguale a quello che produrrebbe nell'aria una carica E posta in S .

In un punto qualunque del primo mezzo, l'intensità è uguale a quella che produrrebbe la sorgente S e una sorgente $\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2} S$ posta in I , agendo nel primo mezzo supposto infinito; e l'intensità nel secondo mezzo è uguale a quella che produrrebbe una sorgente $\frac{2k_2}{k_1+k_2} S$ posta in S nel secondo mezzo supposto infinito.

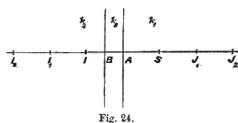
Abbiamo così una teoria completa delle immagini elettriche nel caso di due mezzi separati da una superficie piana. Qualunque sia la natura delle forze elettromotrici che agiscono nel primo mezzo, il potenziale che esse vi producono si può calcolare combinando il loro effetto diretto con l'effetto della loro immagine.

Se supponiamo il secondo mezzo perfettamente conduttore, $k_2 = 0$, e l'immagine I è uguale e di segno contrario alla sorgente S . Tale è il caso delle immagini elettriche nella teoria elettrostatica di Thomson.

Se supponiamo il secondo mezzo perfettamente isolante, k_2 è infinito, e l'immagine I è uguale alla sorgente S e dello stesso segno. Questo è il caso delle immagini in idrocinetica, quando il fluido è limitato da una superficie piana rigida.

316. Il metodo di inversione, così utile in Elettrostatica dove si suppone che la superficie di separazione è quella di un corpo perfettamente conduttore, non si applica più al caso più generale di una superficie che separa due mezzi con resistenze elettriche disuguali. Tuttavia, si può applicare il metodo di inversione nel piano, così come il metodo, più generale, di trasformazione nel piano dato al § 190¹.

Conduzione in una placca che separa due mezzi. 317. Consideriamo una placca di spessore AB , fatta di una sostanza di resistenza k_2 , che separa due mezzi di resistenza k_1 e k_2 (fig. 24), e vediamo come essa fa variare il potenziale dovuto a una sorgente S posta nel primo mezzo.



Il potenziale sarà uguale a quello che sarebbe dovuto nell'aria a una serie di cariche poste in certi punti sulla normale tracciata da S alla placca.

Poniamo

$$AI = SA \quad BI_1 = SB \quad AJ_1 = I_1A \quad BI_2 = J_1B \quad AJ_2 = I_2A \quad \dots$$

abbiamo così due serie di punti distanti tra loro il doppio dello spessore della placca.

318. Il potenziale in un punto qualunque P del primo mezzo è uguale a

$$(22.0.40) \quad \frac{E}{PS} + \frac{I}{PI} + \frac{I_1}{PI_1} + \frac{I_2}{PI_2} + \dots$$

il potenziale in un punto P' del secondo mezzo è

$$(22.0.41) \quad \frac{E'}{P'S} + \frac{I'}{P'I} + \frac{I'_1}{P'I_1} + \frac{I'_2}{P'I_2} + \dots + \frac{J'_1}{P'J'_1} + \frac{J'_2}{P'J'_2} + \dots$$

il potenziale in un punto P'' del terzo mezzo sarà

$$(22.0.42) \quad \frac{E''}{P''S} + \frac{J_1}{P''J_1} + \frac{J_2}{P''J_2} + \dots$$

dove I, I', \dots rappresentano le cariche fittizie poste nei punti I, I', \dots , e dove gli accenti indicano che il potenziale deve essere preso all'interno della placca.

Allora, dal paragrafo precedente, abbiamo, per la superficie passante per A ,

$$(22.0.43) \quad I = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} E \quad E' = \frac{2k_2}{k_2 + k_1} E$$

Per la superficie passante per B , abbiamo

$$(22.0.44) \quad I'_1 = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2} E' \quad E'' = \frac{2k_3}{k_3 + k_2} E'$$

Analogamente, per la superficie passante per A ,

$$(22.0.45) \quad J'_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} I'_1 \quad I_1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} I'_1$$

e per la superficie passante per B

$$(22.0.46) \quad I'_2 = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2} J'_1 \quad J_1 = \frac{2k_3}{k_3 + k_2} J'_1$$

e, se poniamo

$$\rho = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad \rho' = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2}$$

¹Si veda Kirchhoff, *Pogg. Ann.*, LXIV, 497, e LXVII, 344; Quincke, *Pogg.* XCVII, 382, e Smith, *Proc. R. S. Edin.*, 1869-70. p. 79.

troviamo per il potenziale nel primo mezzo

$$(22.0.47) \quad V = \frac{E}{PS} - \rho \frac{E}{PI} + (1 - \rho^2) \rho' \frac{E}{PI_1} + \rho' (1 - \rho^2) \frac{E}{PI_2} + \dots + \rho' (1 - \rho^2) (\rho \rho')^{n-1} \frac{E}{PI_n}$$

Per il potenziale nel terzo mezzo, troviamo

$$(22.0.48) \quad V = (1 + \rho') (1 - \rho) E \left(\frac{1}{PS} + \frac{\rho \rho'}{PJ_1} + \dots + \frac{(\rho \rho')^n}{PJ_n} \right)$$

Se il primo mezzo è lo stesso del terzo, $k_1 = k_3$ e $\rho = \rho'$, e il potenziale, sull'altro lato della placca, sarà

$$(22.0.49) \quad V = (1 - \rho^2) E \left(\frac{1}{PS} + \frac{\rho^2}{PJ_1} + \dots + \frac{\rho^{2n}}{PJ_n} \right)$$

Se la placca conduce molto meglio del resto del mezzo, ρ è molto vicino a 1. Se la placca è un isolante quasi perfetto, ρ è quasi uguale a -1 ; e, se il potere conduttore della placca differisce poco da quello del resto del mezzo, ρ è una quantità molto piccola, positiva o negativa.

La teoria di questo caso è stata data, per la prima volta, da Green, nella sua *Teoria dell'induzione magnetica* (*Essay*, p. 65). Ma il suo risultato non esatto a meno che ρ sia uguale a 1². La quantità g che egli impiega è legata a ρ dalle equazioni

$$g = \frac{2\rho}{3-\rho} = \frac{k_1-k_2}{k_1+2k_2} \quad \rho = \frac{3g}{2+g} = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$$

Se poniamo $\rho = \frac{4\pi k}{1+2\pi\kappa}$, abbiamo la soluzione del problema dell'induzione magnetica prodotta da un polo magnetico in una placca indefinita il cui coefficiente di magnetizzazione è κ .

Conduttori stratificati. 319. Sia un conduttore formato da strati alternati di spessore c e c' , di due sostanze i cui coefficienti di conducibilità sono differenti. Si chiede di trovare i coefficienti di resistenza e di conducibilità del conduttore composto.

Prendiamo il piano degli strati normale alle z , e distinguiamo con un accento i simboli relativi allo strato della seconda specie, con un tratto posto sopra i simboli relativi al conduttore composto: così \bar{X} . Allora

$$\begin{aligned} \bar{X} &= X = X' & (c + c') \bar{u} &= cu + c'u' \\ \bar{Y} &= Y = Y' & (c + c') \bar{v} &= cv + c'v' \\ (c + c') \bar{Z} &= cZ + c'Z' & \bar{w} &= w = w' \end{aligned}$$

Dobbiamo dapprima determinare u, u', v, v', Z, Z' in funzione di \bar{X}, \bar{Y} e \bar{w} , secondo le equazioni di resistenza del § 297 o quelle di conducibilità del § 298. Se indichiamo con D il determinante dei coefficienti di resistenza, troviamo

$$\begin{aligned} ur_3 D &= R_2 \bar{X} - Q_3 \bar{Y} + \bar{w} q_2 D \\ vr_3 D &= R_1 \bar{Y} - P_3 \bar{X} + \bar{w} p_1 D \\ Zr_3 &= -p_2 \bar{X} - q_1 \bar{Y} + \bar{w} \end{aligned}$$

Equazioni simili, con i simboli sono accentati, danno i valori di u', v', Z' . Avendo trovato $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ in funzione di $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, possiamo porre le equazioni di conducibilità del conduttore stratificato. Se poniamo

$$h = \frac{c}{r_3} \quad h' = \frac{c'}{r_3}$$

²Vedere Sir W. Thomson, *Note sur l'induction magnétique dans une plaque*. (*Camb. and Dub. Math. Journ.*, nov. 1845, o *Reprint*, art. IX, § 156.

troviamo

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= \frac{hp_1+h'p'_1}{h+h'} & \bar{q}_1 &= \frac{hq_1+h'q'_1}{h+h'} \\ \bar{p}_2 &= \frac{hp_2+h'p'_2}{h+h'} & \bar{q}_2 &= \frac{hq_2+h'q'_2}{h+h'} \\ \bar{p}_3 &= \frac{cp_3+c'p'_3}{c+c'} - \frac{hh'(q_1-q'_1)(q_2-q'_2)}{(h+h')(c+c')} \\ \bar{q}_3 &= \frac{cq_3+c'q'_3}{c+c'} - \frac{hh'(p_1-p'_1)(p_2-p'_2)}{(h+h')(c+c')} \\ \bar{r}_1 &= \frac{cr_1+c'r'_1}{c+c'} - \frac{hh'(p_2-p'_2)(q_2-q'_2)}{(h+h')(c+c')} \\ \bar{r}_2 &= \frac{cr_2+c'r'_2}{c+c'} - \frac{hh'(p_1-p'_1)(q_1-q'_1)}{(h+h')(c+c')} \\ \bar{r}_3 &= \frac{c+c'}{h+h'}\end{aligned}$$

320. Se nessuna delle sostanze di cui sono formati gli strati possiede la proprietà rotatoria del § 303, il valore di uno qualunque dei P e dei p sarà uguale a quello dei corrispondenti Q o q . Da cui risulta che, in un conduttore stratificato, si ha pure

$$\bar{p}_1 = \bar{q}_1 \quad \bar{p}_2 = \bar{q}_2 \quad \bar{p}_3 = \bar{q}_3$$

cioè che la stratificazione non sviluppa proprietà rotatorie, se non esiste già nelle sostanze impiegate.

321. Se supponiamo ora che non vi siano proprietà rotatorie e che gli assi x, y, z siano assi principali, i coefficienti p e q si annullano, e

$$\bar{r}_1 = \frac{cr_1+c'r'_1}{c+c'} \quad \bar{r}_2 = \frac{cr_2+c'r'_2}{c+c'} \quad \bar{r}_3 = \frac{c+c'}{\frac{c}{r_3} + \frac{c'}{r'_3}}$$

Se quindi impieghiamo due sostanze isotrope, l'effetto della stratificazione sarà di rendere la resistenza massima nella direzione della normale agli strati; la resistenza sarà la stessa in tutte le direzioni parallele al piano degli strati.

322. Prendiamo una sostanza isotropa di conducibilità r ; tagliamola in fette molto sottili, di spessore a , e facciamo alternare queste fette con altre di una sostanza di conducibilità s e di spessore k_1a .

Supponiamo queste fette normali alle x . Tagliamo ora questo conduttore in fette di spessore maggiore b , normale alle y , e facciamo alternare queste fette con altre di conducibilità s e di spessore k_2b .

Infine, tagliamo questo nuovo conduttore in fette di spessore ancora maggiore c , e facciamole alternare con altre di conducibilità s e di spessore k_3c .

Il risultato di queste tre operazioni è di dividere la materia di conducibilità r in parallelepipedi rettangoli, le cui dimensioni sono a, b, c , essendo b molto piccolo rispetto a c , e a molto piccolo rispetto a b , e di immergere questi parallelepipedi nella sostanza di conducibilità s , essendo la loro distanza di k_1a nel verso delle x , di k_2b nel verso delle y e di k_3c nel verso delle z . Si trova la conducibilità del conduttore così formato, nel verso delle x, y, z , applicando tre volte successivamente i risultati del § 321. Si ottiene così

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{[1 + k_1(1 + k_2)(1 + k_3)]r + (k_2 + k_3 + k_2k_3)s}{(1 + k_2)(1 + k_3)(k_1r + s)}s \\ r_2 &= \frac{(1 + k_2 + k_2k_3)r + (k_1 + k_3 + k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_2k_3)s}{(1 + k_3)[k_2r + (1 + k_1 + k_1k_2)s]}s \\ r_3 &= \frac{(1 + k_3)[r + (k_1 + k_2 + k_1k_2)s]}{k_3r + (1 + k_1 + k_2 + k_2k_3 + k_3k_1 + k_1k_2 + k_1k_2k_3)s}s\end{aligned}$$

L'esattezza di questo studio deriva dal fatto che le tre dimensioni dei parallelepipedi sono di ordini di grandezza diversi, di modo che si possono trascurare le condizioni da soddisfare sugli angoli e sugli spigoli. Se si pone k_1, k_2, k_3 tutti uguali all'unità

$$r_1 = \frac{5r+3s}{4r+4s}s \quad r_2 = \frac{3r+5s}{2r+6s}s \quad r_3 = \frac{2r+6s}{r+7s}s$$

Se $r = 0$, cioè se il mezzo nel quale sono posti i parallelepipedi è un isolante perfetto,

$$r_1 = \frac{3}{4}s \quad r_2 = \frac{5}{6}s \quad r_3 = \frac{6}{7}s$$

Se $r = \infty$, cioè se i parallelepipedi sono conduttori perfetti,

$$r_1 = \frac{5}{4}s \quad r_2 = \frac{3}{2}s \quad r_3 = 2s$$

In tutti i casi, purché $k_1 = k_2 = k_3$, si può mostrare che r_1, r_2, r_3 sono nell'ordine di grandezze crescenti, e che la conducibilità più grande si presenta nel verso della dimensione più grande, la resistenza più grande nel verso della dimensione più piccola dei parallelepipedi.

323. Nel parallelepipedo rettangolo formato da una sostanza conduttrice, foriamo da un sommità all'altra un passaggio conduttore: ciò sarà, per esempio, un filo metallico ricoperto di una sostanza isolante, di dimensioni trasversali molto piccole affinché la conducibilità della massa sia cambiata solo quando la corrente passa lungo il filo.

Siano a, b, c le dimensioni del parallelepipedo nelle direzioni degli assi: e sia $Kabc$ la conducibilità del passaggio che si estende dall'origine al punto (abc) .

La forza elettromotrice che agisce tra le estremità del passaggio è

$$aX + bY + cZ$$

e, se C' è l'intensità lungo il passaggio

$$C' = Kabc(aX + bY + cZ)$$

La corrente che attraversa la faccia bc del parallelepipedo è bcu , e si compone di corrente dovuta alla conducibilità della massa e di corrente dovuta alla conducibilità del passaggio, ossia

$$bcu = bc(r_1X + p_3Y + q_2Z) + Kabc(aX + bY + cZ)$$

o

$$u = (r_1 + Ka^2)X + (p_3 + Kab)Y + (q_2 + Kca)Z$$

Allo stesso modo si troveranno i valori di v e w . I coefficienti di conducibilità, modificati per effetto del passaggio, saranno

$$\begin{array}{ccc} r_1 + Ka^2 & r_2 + Kb^2 & r_3 + Kc^2 \\ p_1 + Kbc & p_2 + Kca & p_3 + Kab \\ q_1 + Kbc & q_2 + Kca & q_3 + Kab \end{array}$$

In queste espressioni, i termini aggiunti a p_1, \dots per effetto del passaggio, sono uguali ai termini aggiunti a q_1, \dots . Pertanto i valori di p_1 e di q_1 non possono essere resi disuguali dall'introduzione di passaggi lineari in ognuno degli elementi di volume del solido; e la proprietà rotatoria del § 303 non può essere creata con tali metodi, se essa non è inizialmente presente.

324. *Costruire un sistema di conduttori lineari aventi coefficienti di conducibilità dati qualunque e formanti un sistema simmetrico.*

Dividiamo lo spazio in piccoli cubi uguali, e sua uno di essi rappresentato dalla fig. 25.

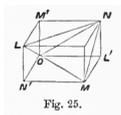


Fig. 25.

Supponiamo che le coordinate dei punti O, L, M, N e i loro potenziali siano

	x	y	z	Potenziali
O	0	0	0	$X + Y + Z$
L	0	1	1	x
M	1	0	1	y
N	1	1	0	z

Colleghiamo questi quattro punti con i sei conduttori

$$OL \quad OM \quad ON \quad MN \quad NL \quad LM$$

le cui conducibilità sono

$$A, B, C, P, Q, R$$

Le forze elettromotrici che agiscono lungo questi conduttori saranno

$$Y + Z \quad Z + X \quad X + Y \quad Y - Z \quad Z - X \quad X - Y$$

e le intensità

$$A(Y + Z) \quad B(Z + X) \quad C(X + Y) \quad P(Y - Z) \quad Q(Z - X) \quad R(X - Y)$$

Di queste intensità, quelle che apportano elettricità nel verso positivo delle x sono quelle delle correnti dirette lungo LM, LN, OM, ON , e la quantità trasportata è

$$u = (B + C + Q + R)X + (C - R)Y + (B - Q)Z$$

Analogamente

$$v = (C - R)X + (C + A + R + P)Y + (A - P)Z$$

$$w = (B - Q)X + (A - P)Y + (A + B + P + Q)Z$$

da cui si ricava, per confronto con le equazioni di conduzione del § 298,

$$4A = r_2 + r_3 - r_1 + 2p_1 \quad 4P = r_2 + r_3 - r_1 - 2p_1$$

$$4B = r_3 + r_1 - r_2 + 2p_2 \quad 4Q = r_3 + r_1 - r_2 - 2p_2$$

$$4C = r_1 + r_2 - r_3 + 2p_3 \quad 4R = r_1 + r_2 - r_3 - 2p_3$$

Conduzione nei dielettrici

325. Abbiamo visto che una forza elettromotrice agente su un mezzo dielettrico vi determina ciò che abbiamo chiamato uno *stato di polarizzazione elettrica*. Ci siamo rappresentati questo stato come consistente in uno spostamento elettrico che avviene attraverso il mezzo in una direzione che, per i mezzi isotropi, è lo stesso di quello della forza elettromotrice, e in una carica superficiale di ognuno degli elementi nei quali si può supporre il dielettrico suddiviso, carica che è negativa dalla parte verso la quale agisce la forza e positiva dal lato dove questa forza agisce.

Se la forza elettromotrice agisce su un mezzo conduttore, essa produce ciò che si chiama una *corrente elettrica*.

I mezzi dielettrici, salvo poche eccezioni sono anche conduttori più o meno imperfetti, e in molti ambienti che non sono buoni isolanti producono fenomeni di induzione dielettrica. Siamo quindi portati a studiare lo stato del mezzo dove si producono contemporaneamente l'induzione e la conduzione.

Per maggiore semplicità, supporremo il mezzo isotropo in ogni punto, ma senza che sia necessariamente omogeneo nei suoi diversi punti. Allora l'equazione di Poisson diviene, dal § 83,

$$(23.0.1) \quad \frac{d}{dx} \left(K \frac{dV}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(K \frac{dV}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(K \frac{dV}{dz} \right) + 4\pi\rho = 0$$

dove K è la *capacità induttiva specifica*.

L'equazione di continuità della corrente elettrica diviene

$$(23.0.2) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dz} \right) - \frac{d\rho}{dt} = 0$$

dove r è la resistenza specifica riferita all'unità di volume.

Se K e r sono discontinui, queste equazioni devono essere trasformate in quelle che corrispondono alle superfici di discontinuità.

In un mezzo interamente omogeneo, K e r sono costanti, e si trova

$$(23.0.3) \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi \frac{\rho}{K} = r \frac{d\rho}{dt}$$

da cui

$$(23.0.4) \quad \rho = C e^{-\frac{4\pi}{Kr} t}$$

ora, se poniamo

$$(23.0.5) \quad T = \frac{Kr}{4\pi} \quad \rho = C e^{-\frac{t}{T}}$$

Questo risultato ci mostra che, sotto l'azione di forze elettriche esterne qualunque, un mezzo omogeneo il cui interno era caricato di elettricità in un modo qualsiasi vede queste cariche interne dissiparsi secondo una legge che non dipende da forze esterne; di conseguenza, finirà per non avere più carica elettrica nel mezzo, e allora nessuna forza esterna ne potrà produrre, né mantenere una carica in un punto interno al mezzo, così a lungo a meno che le relazioni tra la forza elettromotrice, la polarizzazione elettrica e la conduzione resteranno le stesse. Se si produce una scarica distruttiva, queste relazioni cessano di essere vere, e si può produrre una carica interna.

Conduzione attraverso un condensatore. 326. Siano C la capacità di un condensatore, R la sua resistenza, E la forza elettromotrice che agisce su di esso, cioè la differenza di potenziale che esiste tra i suoi elettrodi metallici.

La quantità di elettricità distribuita sull'armatura dalla parte dove agisce la forza elettromotrice è CE , e la corrente che si produce attraverso la massa del condensatore, nella direzione della forza elettromotrice è $\frac{E}{R}$.

Se si ammette che l'elettrizzazione è prodotta da una forza elettromotrice E agente nel circuito di cui fa parte il condensatore e se $\frac{dQ}{dt}$ rappresenta l'intensità in questo circuito,

$$(23.0.6) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R} + C \frac{dE}{dt}$$

Introduciamo in questo circuito una pila di forza elettromotrice E_0 e di resistenza r_1 , allora

$$(23.0.7) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{E_0 - E}{r_1} = \frac{E}{R} + C \frac{dE}{dt}$$

pertanto, in un tempo qualunque t_1

$$(23.0.8) \quad E (= E_1) = E_0 \frac{R}{R + r_1} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}} \right)$$

dove

$$T_1 = \frac{CRr_1}{R + r_1}$$

Tagliamo il circuito r_1 al tempo t_2

$$(23.0.9) \quad E (= E_2) = E_1 e^{-\frac{t_2}{T_2}}$$

dove $T_2 = CR$.

Infine, al tempo t_3 , colleghiamo le armature del condensatore con un filo di resistenza r_3 ,

$$(23.0.10) \quad E (= E_3) = E_2 e^{-\frac{t_3}{T_3}}$$

dove

$$T_3 = \frac{CRr_3}{R + r_3}$$

Se Q_3 è la scarica totale che si produce attraverso questo filo in un tempo t_3

$$(23.0.11) \quad Q_3 = E_0 \frac{CR^2}{(R + r_1)(R + r_3)} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}} \right) e^{-\frac{t_2}{T_2}} \left(1 - e^{-\frac{t_3}{T_3}} \right)$$

Si può così calcolare la scarica che si produce attraverso un filo nel cui mezzo di collegano le armature di un condensatore caricato per un tempo t_1 , poi isolato per un tempo t_2 . Se, come avviene comunemente, la durata della carica è sufficiente per ottenere la carica totale, e la durata della scarica molto perché essa possa essere completa, l'espressione si riduce a

$$(23.0.12) \quad Q_3 = E_0 E_0 \frac{CR^2}{(R + r_1)(R + r_3)} e^{-\frac{t_2}{CR}}$$

327. In un simile condensatore, caricato dapprima in un modo qualunque, scaricato poi attraverso un filo di piccola resistenza poi isolato, non compare nuova carica. Ma, nella maggior parte dei condensatori di cui disponiamo in realtà, vediamo svilupparsene un poco, dopo la scarica e l'isolamento, una nuova carica dello stesso tipo della prima, ma di intensità minore: è ciò che si chiama la *carica residua*. Per spiegarci la sua esistenza, siamo quindi obbligati ad ammettere che la struttura del mezzo dielettrico non è come l'abbiamo ammessa. Ma troveremo che questa proprietà esiste per un mezzo formato dall'insieme di piccole parti costituite esse stesse da diversi dielettrici semplici.

Teoria dei dielettrici composti. 328. Supponiamo, per maggiore semplicità, che il dielettrico consista in una serie di strati piani formati da diverse sostanze, di superficie uguale all'unità e che le forze elettriche agiscano lungo una direzione normale agli strati.

Siano

a_1, a_2, \dots gli spessori dei diversi strati;

X_1, X_2, \dots le forze elettriche risultanti che agiscono all'interno dei diversi strati tra punti presi all'unità di distanza sulla direzione normale agli strati;

p_1, p_2, \dots le intensità di corrente dovute alla conduzione attraverso gli strati;

f_1, f_2, \dots gli spostamenti elettrici;

u_1, u_2, \dots le intensità totali, dovute in parte alla conduzione, in parte alla variazione dello spostamento;

r_1, r_2, \dots le resistenze specifiche per unità di volume;

K_1, K_2, \dots i poteri induttori specifici;

k_1, k_2, \dots gli inversi dei poteri induttori specifici;

E la forza elettromotrice dovuta a una pila voltaica posta nella parte del circuito che va dall'ultimo strato al primo, strati che si suppongono formati da sostanze conduttrici;

Q la quantità totale di elettricità che è passata in questa parte del circuito fino all'istante t ;

R_0 la resistenza della pila e dei suoi fili di comunicazione;

σ_{12} la densità superficiale dell'elettricità alla superficie di separazione tra il primo e il secondo strato.

Nel primo strato abbiamo: dalla legge di Ohm,

$$(23.0.13) \quad X_1 = r_1 p_1$$

dalla teoria dello spostamento elettrico

$$(23.0.14) \quad X_1 = 4\pi k_1 f_1$$

dalla definizione dell'intensità totale,

$$(23.0.15) \quad u_1 = p_1 + \frac{df_1}{dt}$$

Vi sono equazioni simili per gli altri strati, essendo le diverse quantità caratterizzate dall'indice corrispondente allo strato considerato.

Per determinare la densità superficiale di uno strato, abbiamo un'equazione della forma

$$(23.0.16) \quad \sigma_{12} = f_2 - f_1$$

e, per determinare la sua variazione,

$$(23.0.17) \quad \frac{d\sigma_{12}}{dt} = p_1 - p_2$$

Differenziando la (23-16) rispetto a t e uguagliando il risultato alla (23.17), abbiamo

$$(23.0.18) \quad p_1 + \frac{df_1}{dt} = p_2 + \frac{df_2}{dt} = u$$

per esempio, o, tenendo conto della (23-15),

$$(23.0.19) \quad u_1 = u_2 = \dots = u$$

cioè che, in tutti gli strati, l'intensità totale è la stessa e uguale all'intensità nella pila e nei suoi fili di trasmissione.

Abbiamo anche, grazie alle (23-13,14),

$$(23.0.20) \quad u = \frac{1}{r_1} X_1 + \frac{1}{4\pi k_1} \frac{dX_1}{dt}$$

da cui possiamo ricavare X_1 , effettuando su u l'operazione inversa

$$(23.0.21) \quad X_1 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{4\pi k_1} \frac{d}{dt} \right)^{-1} u$$

La forza elettromotrice totale E è

$$(23.0.22) \quad E = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots$$

ossia

$$(23.0.23) \quad E = \left[a_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{4\pi k_1} \frac{d}{dt} \right)^{-1} + a_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{4\pi k_2} \frac{d}{dt} \right)^{-1} + \dots \right] u$$

equazione tra la forza elettromotrice esterna E_1 e l'intensità esterna u .

Se il rapporto di r con k è lo stesso in tutti gli strati, l'equazione si riduce a

$$(23.0.24) \quad E + \frac{r}{4\pi k} \frac{dE}{dt} = (a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots) u$$

che è il caso che abbiamo già esaminato e nel quale abbiamo trovato che non si può produrre alcune fenomeno di scarica residua.

Se vi sono n sostanze, per le quali il rapporto tra r e k è diverso, l'equazione generale (23-23), una volta liberata dalle operazioni inverse che vi sono presenti, sarà un'equazione differenziale lineare di ordine n in E e di ordine $(n - 1)$ in u , essendo t la variabile indipendente.

Dalla forma di questa equazione, risulta chiaramente che l'ordine degli strati è indifferente e che, vi sono numerosi strati formati da una stessa sostanza, li si può supporre riuniti in uno solo, senza alterare in nulla i fenomeni.

329. Supponiamo dapprima che f_1, f_2, \dots siano tutti nulli e che si faccia agire improvvisamente una forza elettromotrice E e si debba trovare l'effetto istantaneo.

Integrando la (23-20) rispetto a t , troviamo

$$(23.0.25) \quad Q = \int u dt = \frac{1}{r_1} \int X_1 dt + \frac{1}{4\pi k_1} X_1 + cost$$

Poiché in questo caso X_1 è sempre finito, $\int X_1 dt$ deve essere valutabile quando t è molto piccolo; di conseguenza, essendo nullo il valore iniziale di X_1 , l'effetto istantaneo sarà

$$(23.0.26) \quad X_1 = 4\pi k_1 Q$$

da cui, dalla (23-22),

$$(23.0.27) \quad E = 4\pi (k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots) Q$$

e se C è la capacità elettrica del sistema misurato con questo metodo istantaneo,

$$(23.0.28) \quad C = \frac{Q}{E} = \frac{1}{4\pi (k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots)}$$

Questo risultato è lo stesso che si sarebbe ottenuto, se si avesse trascurato la conducibilità degli strati.

Supponiamo ora che la forza elettromotrice uniforme E continui ad agire per un tempo infinitamente lungo, o, almeno, finché si sia stabilita attraverso il sistema una corrente uniforme p .

Abbiamo allora $X_1 = r_1 p$ e, di conseguenza, dalla (23-21),

$$(23.0.29) \quad E = (r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots) p$$

Se R è la resistenza totale del sistema,

$$(23.0.30) \quad R = \frac{E}{p} = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots$$

In questa condizione, abbiamo dalla (23-14)

$$f_1 = \frac{r_1}{4\pi k_1} p$$

così che

$$(23.0.31) \quad \sigma_{12} = \left(\frac{r_2}{4\pi k_2} - \frac{r_1}{4\pi k_1} \right) p$$

Se ora colleghiamo improvvisamente gli strati estremi con un conduttore di bassa resistenza, E passa bruscamente dal valore iniziale E_0 al valore zero, e una quantità di elettricità Q attraversa il conduttore.

Per determinare Q , osserviamo che il nuovo valore di X_1 sarà, dalla (23-25),

$$(23.0.32) \quad X_1' = X_1 + 4\pi k_1 Q$$

da cui, ponendo $E = 0$ nella (23-22),

$$(23.0.33) \quad 0 = a_1 X_1 + \dots + 4\pi (a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots) Q$$

o

$$(23.0.34) \quad 0 = E_0 + \frac{Q}{C}$$

da cui

$$Q = -CE_0$$

dove C è la capacità data dalla (23-28). La scarica istantanea è quindi uguale alla carica istantanea.

Supponiamo che subito dopo questa scarica si interrompa la comunicazione; avremo allora $u = 0$, e, dalla (23-20),

$$(23.0.35) \quad X_1 = X_1' e^{-\frac{4\pi k_1}{r_1} t}$$

dove X_1' è il valore iniziale dopo la scarica.

Pertanto, ad ogni tempo t ,

$$X_1 = E_0 \left(\frac{r_1}{R} - 4\pi k_1 C \right) e^{-\frac{4\pi k_1}{r_1} t}$$

Il valore di E in ogni tempo è allora

$$(23.0.36) \quad = E_0 \left[\left(\frac{a_1 r_1}{R} - 4\pi a_1 k_1 C \right) e^{-\frac{4\pi k_1}{r_1} t} + \left(\frac{a_2 r_2}{R} - 4\pi a_2 k_2 C \right) e^{-\frac{4\pi k_2}{r_2} t} + \dots \right]$$

e la scarica istantanea dopo un tempo qualunque t , è EC : è ciò che si chiama la *scarica residua*.

Se il rapporto di r a k è lo stesso per tutti gli strati, il valore di E si riduce a zero. Se questo rapporto non è lo stesso per tutti gli strati, ordiniamo i termini secondo i valori decrescenti di questo rapporto.

La somma di tutti i coefficienti è evidentemente nulla, di modo che $E = 0$ quando $t = 0$. L'ordine è pure quello delle grandezze decrescenti per i coefficienti e per i termini esponenziali dove t è positivo; pertanto, se t è positivo, E è sempre positivo, cioè la scarica residua è dello stesso segno della scarica primaria.

Se t è infinitamente grande, tutti i termini svaniscono, a meno che uno degli strati non costituisca un isolante perfetto; allora r_1 è infinito per questo strato, R è infinito per l'intero sistema, e il valore finale di E non è zero, ma

$$(23.0.37) \quad E = E_0 (1 - 4\pi k_1 C)$$

Se quindi alcuni strati, ma non tutti, sono isolanti perfetti, il sistema può conservare una scarica residua permanente.

330. Determineremo ora la scarica totale che si produce attraverso un filo di resistenza R_0 , messo a contatto permanente con gli strati estremi, nell'ipotesi che il sistema sia dapprima stato caricato con l'applicazione prolungata di una forza elettromotrice E .

In ogni istante, abbiamo

$$(23.0.38) \quad E = a_1 r_1 p_1 + a_2 r_2 p_2 + \dots + R_0 u = 0$$

e anche, dalla (23-15)

$$(23.0.39) \quad u = p_1 + \frac{df_1}{dt}$$

pertanto

$$(23.0.40) \quad (R + R_0) 0 = a_1 r_1 \frac{df_1}{dt} + a_2 r_2 \frac{df_2}{dt} + \dots$$

Integrando rispetto a t , per ottenere Q , troviamo

$$(23.0.41) \quad (R + R_0) Q = a_1 r_1 (f'_1 - f_1) + a_2 r_2 (f'_2 - f_2) + \dots$$

dove f_1 è il valore iniziale e f'_1 quello finale di f_1 .

Nel nostro caso, $f'_1 = 0$ e, dalla (23-14) e (23-32)

$$f_1 = E_0 \left(\frac{r_1}{4\pi k_1 R} - C \right)$$

Pertanto

$$(23.0.42) \quad \begin{aligned} (R + R_0) Q &= \frac{E_0}{4\pi R} \left(\frac{a_1 r_1^2}{k_1} + \frac{a_2 r_2^2}{k_2} + \dots \right) - E_0 C R = \\ &= -\frac{C E_0}{R} \sum \sum \left[a_1 a_2 k_1 k_2 \left(\frac{r_1}{k_1} - \frac{r_2}{k_2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

dove la somma è estesa a tutte le quantità di questa forma appartenenti ad ogni coppia di strati.

Si vede che Q è sempre negativo, cioè in senso inverso della corrente che è servita a caricare il sistema.

Lo studio fatto mostra che un dielettrico formato da strati di diversa natura può produrre fenomeni noti sotto il nome di *assorbimento elettrico* e di *scarica residua*, quando anche alcune delle sostanze di cui sono formati non produrrebbero questi fenomeni, se presi isolatamente. Lo studio dei casi dove le sostanze sono disposte in altro modo condurrebbe a risultati analoghi, ma i calcoli sarebbero più complicati. La nostra conclusione deve quindi essere che bisogna aspettarsi questi fenomeni di assorbimento elettrico nel caso di sostanze fatte di elementi di natura diversa, anche quando questi elementi sarebbero di dimensioni microscopiche.

Da ciò non segue che ogni sostanza che mostra questo fenomeno è così composta, poiché questi possono essere l'indice di una nuova specie di polarizzazione elettrica, di cui sarebbero suscettibili le sostanze omogenee, e che, in certi casi, potrebbe assomigliare molto di più a una polarizzazione elettrochimica che a una dielettrica.

L'oggetto di questo studio è solo quello di indicare il carattere matematico effettivo di ciò che si chiama *assorbimento elettrico*, e di mostrare quale differenza fondamentale lo distingue dai fenomeni calorifici che sembrano analoghi a prima vista.

331. Prendiamo una piastra spessa di una sostanza qualunque e scaldiamola da un lato, in modo da produrre un flusso di calore attraverso la sua massa; poi, raffreddiamo bruscamente il lato riscaldato alla temperatura del lato freddo, e abbandoniamo la piastra a se stessa. Il lato scaldato ridiverrà più caldo dell'altro per conduzione a partire dall'interno.

Si può produrre un fenomeno elettrico esattamente analogo, e, di fatto, si produce sui cavi telegrafici; ma le sue leggi matematiche, esattamente simile a quelle del calore, sono del tutto diverse da quelle del condensatore stratificato.

Nel caso del calore, vi è un reale assorbimento di calore da parte della sostanza, il cui effetto è di scaldarla. È impossibile produrre in elettricità un fenomeno analogo, ma lo si può imitare nel modo seguente e dargli la forma di una esperienza di lezione.

Siano A_1, A_2, \dots le armature interne di una serie di condensatori con B_1, B_2, \dots le armature esterne.

Collegiamo A_1, A_2, \dots in serie con fili di collegamento, di resistenza R , e facciamo passare una corrente in questa serie, da sinistra a destra.

Supponiamo dapprima le armature B isolate e non elettrizzate. La quantità totale di elettricità su ognuno delle piastre B deve rimanere nulla, e, poiché in tutti i casi la carica delle piastre A deve essere uguale e opposta a quella delle superfici opposte, queste piastre non si caricano e non si osservano cambiamenti nella corrente.

Ma mettiamo a terra le piastre B singolarmente o unite assieme. Allora, essendo il potenziale di A_1 positivo, mentre quello delle piastre B è zero, A_1 assumerà una carica positiva e B_1 una carica negativa.

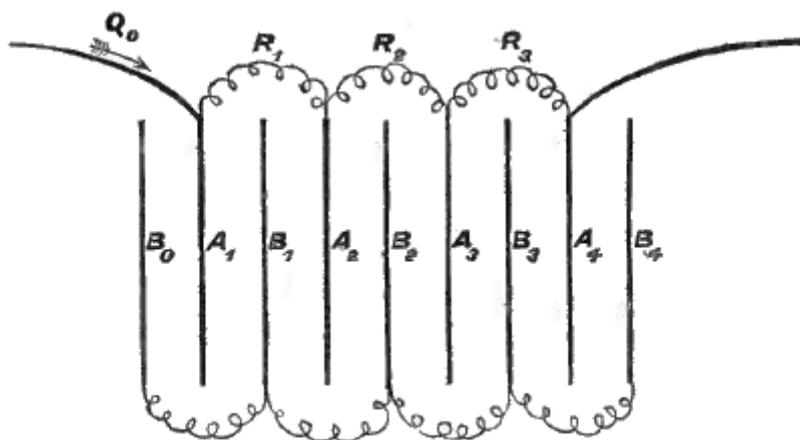


Fig. 26.

Se P_1, P_2, \dots sono i potenziali delle piastre A_1, A_2, \dots , C la capacità di ognuna di esse, e se Q_0 è la quantità di elettricità che passa nel filo di sinistra, Q_1 quella che passa nel filo R_1, \dots , la quantità che è sulla piastra A_1 è $Q_0 - Q_1$ e abbiamo

$$Q_0 - Q_1 = C_1 P_1$$

Analogamente

$$Q_1 - Q_2 = C_2 P_2$$

e così di seguito.

Ma, per la legge di Ohm, abbiamo

$$P_1 - P_2 = R_1 \frac{dQ_1}{dt}$$

$$P_2 - P_3 = R_2 \frac{dQ_2}{dt}$$

Se supponiamo che il valore di C sia lo stesso per tutte le piastre, e quello di R per tutti i fili, avremo una serie di equazioni della forma

$$Q_0 - 2Q_1 + Q_2 = RC \frac{dQ_1}{dt}$$

$$Q_1 - 2Q_2 + Q_3 = RC \frac{dQ_2}{dt}$$

Se vi sono n quantità di elettricità da determinare nota la forza elettromotrice totale o quale altra condizione qualsiasi, l'equazione differenziale che determina ognuna di esse è lineare di ordina n .

In un simile strumento disposto in questo modo, M. Varley è riuscito a imitare gli effetti elettrici di un cavo lungo 1200 miglia.

Quando si fa agire una forza elettromotrice sulla sinistra del filo, l'elettricità che fluisce dapprima nel sistema serve soprattutto a caricare i diversi condensatori a cominciare da A_1 , e una frazione molto piccola di corrente appare all'estremità destra solo dopo un tempo considerevole.

Se si pongono dei galvanometri nel circuito R_1, R_2, \dots , essi non saranno influenzati dalla corrente che l'uno dopo l'altro, e l'intervallo tra gli istanti in cui essi danno indicazioni uguali aumenta con lo spostarsi verso destra.

332. In un cavo telegrafico, il filo conduttore è separato dai conduttori esterni mediante un rivestimento cilindrico di guttaperca o di qualche altra materia isolante. Ogni parte del cavo diviene quindi un condensatore la cui armatura esterna è sempre al potenziale zero. Pertanto, in una parte determinata di un cavo, la quantità di elettricità che è libera alla superficie del filo conduttore è uguale al prodotto del potenziale per la capacità di questa parte del cavo considerata come un condensatore.

Se a_1 e a_2 sono i raggi interni ed esterni dello strato isolante e se K è il suo potere induttore specifico, la capacità dell'unità di lunghezza del cavo è, dal § 126,

$$(23.0.43) \quad c = \frac{K}{2 \log \frac{a_1}{a_2}}$$

Sia v il potenziale in un punto qualunque del filo, per il quali possiamo supporre la stessa sezione in tutti i punti.

Sia Q la quantità totale di elettricità che ha attraversato questa sezione dopo l'inizio del passaggio della corrente. La quantità di elettricità che esiste al tempo t , tra le sezioni x e $x + \delta x$, è

$$Q - \left(Q + \frac{dQ}{dx} \delta x \right)$$

o

$$-\frac{dQ}{dx} \delta x$$

e questo è uguale, così come abbiamo detto, a $cv\delta x$. Pertanto

$$(23.0.44) \quad cv = -\frac{dQ}{dx}$$

In una sezione qualunque, la forza elettromotrice è $-\frac{dv}{dx}$ e dalla legge di Ohm

$$(23.0.45) \quad -\frac{dv}{dx} = k \frac{dQ}{dt}$$

dove k è la resistenza dell'unità di lunghezza del conduttore e $\frac{dQ}{dt}$ l'intensità di corrente. Eliminando Q tra le (23-44) e la 23 - 45), troviamo

$$(23.0.46) \quad ck = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Questa è l'equazione alle differenze parziale che bisogna risolvere per ottenere in ogni istante il potenziale nei diversi punti del cavo. Essa è identica all'equazione data da Fourier per determinare la temperatura in un punto di uno strato attraverso il quale il calore si propaga in una direzione normale allo strato. Nel caso del calore, c rappresenta la capacità dell'unità di volume o ciò che Fourier indica con CD , e k rappresenta l'inverso della conducibilità.

Se il rivestimento non è un isolante perfetto, e si indica con k_1 la resistenza che l'unità di lunghezza di questo rivestimento oppone alla conduzione nella direzione del raggio, e con ρ , la resistenza specifica della materia isolante, è facile vedere che

$$(23.0.47) \quad K_1 = \frac{1}{2\pi} \rho_1 \log \frac{a_1}{a_2}$$

La (23-42) non è più vera, poiché l'elettricità non è più spesa soltanto per dare al filo la carica cv , ma anche per fornire un flusso la cui portata è rappresentata da $\frac{v}{k_1}$. Il consumo di elettricità è quindi

$$(23.0.48) \quad -\frac{d^2Q}{dxdt} = c \frac{dv}{dt} + \frac{1}{k_1} v$$

e, confrontando con la (23-44), ci dà

$$(23.0.49) \quad ck \frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{k}{k_1}v$$

e questa è l'equazione data da Fourier per la propagazione del calore in un'asta o in anello¹.

333. Se avessimo supposto che un corpo portata un potenziale elevato è elettrizzato in tutta la sua massa, come si vi fosse compressa dell'elettricità, saremmo giunti a una equazione di questa stessa forma. È notevole che lo stesso Ohm, tradito dall'analogia dell'elettricità e del calore, si facesse un'idea di questo genere; ed è così che, da una concezione errata, fu condotto ad impiegare le equazioni di Fourier per rappresentare le effettive leggi della conduzione dell'elettricità in un lungo filo, ben prima che si potesse sospettare la ragione vera per la quale queste equazioni di prestano a tale uso.

Esempio meccanico per far comprendere le proprietà dei dielettrici. 334. Cinque tubi, della stessa sezione, A, B, C, D, P , sono disposti da capo a capo, come mostra la fig. 27; A, B, C, D sono riempiti di mercurio; le parti superiori, così come P sono riempite di acqua.

Un tubo a rubinetto Q riunisce la parte inferiore di A e B a quella di C e D , e si fa scorrere nel tubo orizzontale un pistone P .

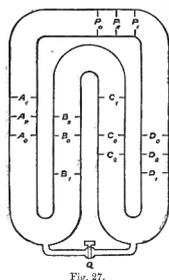


Fig. 27.

Supponiamo dapprima che il livello del mercurio sia lo stesso in tutti i quattro tubi e sia indicato da A_0, B_0, C_0, D_0 e che il pistone sia in P_0 e il rubinetto chiuso.

Spostiamo il pistone da P_0 in P_1 , per una lunghezza a ; poiché le sezioni di tutti i tubi sono uguali, il livello di mercurio salirà di un'altezza a in A e C , in A_1 e C_1 , e scenderà di un'uguale altezza a in B e D , in B_1 e D_1 .

La differenza di pressioni sui due lati del pistone sarà rappresentata da $4a$.

Questa disposizione può servire a rappresentare lo stato di un dielettrico sul quale agisce una forza elettromotrice $4a$.

L'eccesso d'acqua nel tubo D può rappresentare una carica positiva su una faccia del dielettrico; l'eccesso di mercurio nel tubo A , una carica negativa sull'altra faccia; infine, l'eccesso di pressione che si esercita nel tubo P sul lato del pistone girato verso D , l'eccesso di potenziale sulla faccia positiva del dielettrico.

Se il pistone è libero di muoversi, tornerà indietro fino a P_0 dove si troverà in equilibrio: ciò rappresenta la scarica totale del dielettrico.

Durante la scarica, si produce in tutto il tubo un movimento inverso dei liquidi, raffigurante questo cambiamento nello spostamento elettrico che abbiamo supposto prodursi in un dielettrico.

Infine tutto il sistema di tubi è supposto riempito di liquidi incompressibili, per rappresentare questa proprietà di spostamenti elettrici, che non vi è mai in alcun punto accumulo effettivo di elettricità.

Consideriamo ora quale effetto si produce quando si apre il rubinetto Q mentre il pistone P è in P_1 .

I livelli di A_1 e D_1 non cambiano, ma quelli di B e C divengono uguali e coincidono con B_0 e C_0 .

¹*Théorie de la chaleur.*

L'apertura del rubinetto Q corrisponde all'esistenza nel dielettrico di parti aventi un piccolo potere conduttore, non estendendosi tali parti in tutto il dielettrico, poiché allora darebbe un libero passaggio all'elettricità.

Le cariche che esistono sulle due facce del dielettrico restano isolate, ma la loro differenza di potenziale diminuisce.

Infatti, la differenza delle pressioni esercitate sulle due facce del pistone varai da $4a$ a $2a$, quando il liquido passa dal rubinetto Q .

Se ora si chiude il rubinetto Q e si lascia muovere liberamente il pistone P , esso occupa una posizione di equilibrio P_2 , e la scarica sembra essere solo la metà della carica.

Il livello di mercurio in A e in B è di $\frac{1}{2}a$ al di sopra del suo livello iniziale, e di $\frac{1}{2}a$ al di sotto del livello iniziale in B e C . Li indichiamo con i livelli A_2, B_2, C_2, D_2 .

Se allora si fissa il pistone e si apre il rubinetto, del mercurio passa da B in C , finché il livello nei due tubi sia ancora in B_0 e C_0 e vi è una differenza di pressione a tra le due facce del pistone P . Se poi si chiude il rubinetto e si lascia il pistone libero di muoversi, esso prende una posizione di equilibrio P_3 , a metà cammino tra P_0 e P_2 . Questo effetto corrisponde alla carica residua che si osserva in un dielettrico carico, che si è scaricato dapprima, poi lasciato a se stesso. Esso riprende poco alla volta una parte della sua carica iniziale e, se è nuovamente scaricato, una terza carica si forma, andando le cariche successivamente e costantemente decrescendo. Nel caso dell'esperienza che serve alla nostra spiegazione, ogni carica è la metà della precedente, e le scariche che sono $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$, della carica iniziale, formano una serie la cui somma è uguale alla carica iniziale.

Se, invece di aprire e chiudere il rubinetto, lo si fosse lasciato per tutta la durata dell'esperienza quasi chiuso, ma non completamente, si sarebbe trovato un caso simile a quello dell'elettrizzazione di un dielettrico che è un isolante perfetto, ma che, tuttavia, produce il fenomeno detto *assorbimento elettrico*.

Per rappresentare il caso in cui vi è un'effettiva conduzione da parte del dielettrico, bisogna praticare delle vie d'uscita attraverso il pistone, oppure stabilire una comunicazione tra la parte alta del tubo A e quella del tubo D .

In questo modo, si può costruire una macchina che serve a spiegare le proprietà di ogni tipi di dielettrico: le due elettricità essendovi rappresentate da due fluidi materiali, e il potenziale elettrico da una pressione idrostatica. La carica e la scarica sono raffigurate dai movimenti del pistone P , la forza elettromotrice dalla forza risultante che agisce sul pistone.

Misura della resistenza elettrica

335. Allo stato attuale della scienza elettrica, la determinazione della resistenza elettrica di un conduttore può essere considerata come l'operazione fondamentale in Eletticità, così come la determinazione dei pesi è l'operazione fondamentale in Chimica.

La ragione di questo sta nella determinazione in misure assolute le altre grandezze elettriche: quantità di elettricità, forze elettromotrici, intensità, ecc., serve sempre e per ogni caso passare per una serie di operazioni complicate, comprendenti l'osservazione del tempo, la misura delle distanze, la determinazione dei momenti di inerzia; e, per ogni nuova misura, bisogna ripetere queste operazioni, o almeno alcune di esse, poiché non si può considerare e conservare immutabile una unità di elettricità, o di forza elettromotrice, o di intensità, utile per confronti diretti.

Ma, se si è determinata una volta la resistenza elettrica di un conduttore di forma opportuna e fatto di una sostanza opportunamente scelta, si trova che questa resistenza rimane la stessa alla stessa temperatura, di modo che questo conduttore può servire da campione di resistenza, al quale confrontare la resistenza degli altri conduttori; ora il confronto di due resistenze è una operazione che richiede una precisione estrema.

L'unità di resistenza una volta fissata, consente di costruire copie materiale ad uso degli elettricisti; in tutte le parti del mondo, le resistenze si possono quindi valutare in funzione della stessa unità. Finora queste bobine di resistenza, uguali all'unità, sono il solo esempio di campione elettrico materiale che possa essere conservato, copiato e impiegato per le misure. Le misure di capacità elettrica, che hanno anche una grande importanza, sono ancora difettose per l'influenza perturbatrice dell'assorbimento elettrico.

336. L'unità di resistenza può essere assolutamente arbitraria: tale era il caso per il campione di Jacobi, che era un certo filo di rame pesante 22,4932 *g*, lungo 7,61975 *m* e avente un diametro di 0,667 *mm*. Copie ne sono state fatte da Leysler, da Leipzig e di trovano in diversi luoghi.

Un altro metodo consiste nel definire l'unità come una massa di dimensioni determinate, di una sostanza stabilita. Così l'unità Siemens è la resistenza di una colonna di mercurio lunga 1 *m* con una sezione di 1 *mm*² alla temperatura di 0° *C*-

337. Infine l'unità può essere definita considerando le unità elettrostatiche o elettromagnetiche. In pratica, il sistema elettromagnetico, che serve per tutte le operazioni telegrafiche, è il solo insieme di unità sistematiche che sia attualmente in uso.

Nel sistema elettromagnetico, così come mostreremo, la resistenza è una quantità omogenea a una velocità *v*, di conseguenza, si può esprimere come una velocità.

338. Le prime misure fatte in questo sistema sono quelle di Weber, che impiegò come unità 1 $\frac{mm}{s}$. sir W. Thomson impiegò, più tardi, l'unità di 1 *pie*de/*s*; ma il maggior numero di elettricisti hanno convenuto di impiegare l'unità dell'Associazione britannica, la quale è ritenuta la resistenza corrispondente a una velocità di $10^6 \frac{m}{s}$. Questa unità è di una grandezza più comoda di quella di Weber, che è troppo piccola. La si indica con il nome di *unità* A.B., o anche di *ohm*, associandole il nome di chi ha scoperto le leggi della resistenza.

339. Per richiamare il suo valore in misura assoluta, è utile ricordarsi che $10^6 m$ sono ritenuti essere la distanza del polo dall'equatore, misurata sul meridiano di Parigi. Pertanto un corpo che, nello spazio di un secondo, camminasse lungo tale meridiano, dal polo all'equatore, avrebbe la velocità che, nel sistema elettromagnetico, si ritiene essere rappresentata da un ohm.

Dico ritiene, poiché, se ricerche più esatte stabilissero che l'ohm, come è costruito in base ai campioni materiali dell'Associazione britannica, non corrisponde realmente a questa velocità, gli elettrici non cambierebbero i loro campioni, ma ne farebbero una correzione. Analogamente, il metro è ritenuto la decimilionesima parte dell'arco di un quadrante; si è riconosciuto che non è esattamente così; non si sono cambiate per questo le dimensioni del metro, ma si esprimono le dimensioni della Terra con un numero meno semplice.

Nel sistema dell'Associazione britannica, si è scelto inizialmente l'unità assoluta, in modo da rappresentare il più esattamente possibile una quantità dedotta dal sistema elettromagnetico.

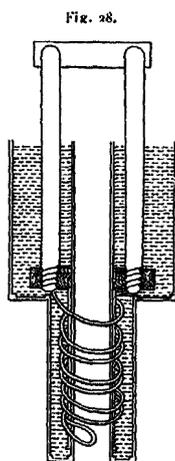
340. Un'unità materiale rappresentante questa unità astratta una volta costruita, altri campioni sono stati ottenuti copiando questa unità, ciò che si può fare con una precisione molto grande; con una precisione ben più grande, per esempio, di quella con la quale si possono copiare regoli di un piede secondo un piede campione.

Queste copie, fatte delle sostanze più permanenti, sono state distribuite in tutte le parti del mondo; è quindi poco probabile che si trovino mai difficoltà nell'ottenere altre copie, se i campioni originali venissero persi.

Ma si possono riprodurre, senza troppa fatica e con grande esattezza, unità come quelle di Siemens; se quindi si conosce il rapporto tra l'ohm e il siemens, si potrà riprodurre l'ohm senza avere un campione da copiare; tuttavia, il lavoro sarà ben maggiore e l'esattezza assai minore che con il metodo della copia.

Infine, l'ohm può essere riprodotto con il metodo elettromagnetico per mezzo del quale è stato inizialmente determinato. Questo metodo, assai più laborioso della misura del piede per mezzo del pendolo a secondi, è probabilmente inferiore per precisione alla precedente. D'altra parte, la misura dell'unità elettromagnetica in funzione dell'ohm, con una precisione in rapporto con i progressi della scienza elettrica, è una ricerca fisica molto importante che merita di essere ripetuta.

Le bobine di resistenza che sono state costruite per rappresentare l'ohm sono state fatte di una lega di 2 parti di argento e 1 parte di platino, a forma di filo del diametro da $0,5\text{ mm}$ a $0,8\text{ mm}$ e lungo da 1 m a 2 m . Questi fili sono saldati a grossi elettrodi di rame. Il filo stesso è ricoperto da due strati di seta, inserita in una massa di paraffina e racchiuso in una scatola di rame sottile, in modo che lo si possa portare facilmente alla temperatura per la quale la sua resistenza è esattamente 1 ohm . Questa temperatura è scritta sulla supporto isolante della bobina. (fig. 28).



Forma delle bobine di resistenza. 341. Una bobina di resistenza è un conduttore in grado di essere posto facilmente nel circuito voltaico, in modo da introdurre una resistenza nota.

Gli elettrodi al termine della bobina devono essere fatti in modo tale che nessun errore apprezzabile possa provenire dal modo di stabilire questi contatti. Per resistenze considerevoli,

basta che gli elettrodi siano fatti da forti aste di rame ben amalgamate alla fine, la cui estremità appoggia su una superficie piana di rame amalgamata immersa in un bicchiere di mercurio.

Per grandi resistenze, basta che gli elettrodi siano forti pezzi di rame e che i contatti siano stabiliti introducendo tra due di questi pezzi una caviglia di rame o di ottone. Questo metodo è molto comodo.

La bobina di resistenza è formata da un filo ben ricoperto con seta, le cui estremità sono saldate sugli elettrodi.

La bobina deve essere disposta in modo che si possa osservarne facilmente la temperatura. A tale scopo, il filo arrotolato su un tubo è racchiuso in un altro tubo, in modo da poterlo porre in un recipiente pieno d'acqua, e che l'acqua abbia accesso dall'interno verso l'esterno della bobina.

Per evitare gli effetti elettromagnetici della corrente nella bobina, il filo è dapprima ripiegato su se stesso, poi arrotolato sulla bobina a partire dal basso; vi sono così correnti uguali e opposte nelle parti adiacenti del filo, in tutta la lunghezza della bobina.

Se si desidera mantenere due bobine alla stessa temperatura, si pongono a volte i due fili fianco a fianco, poi li si avvolge. Questo procedimento è particolarmente vantaggioso quando è più importante assicurare l'uguaglianza delle resistenze invece che conoscere il valore assoluto: questo è il caso per i rami uguale del ponte di Wheatstone (§ 347).

Quando si cercò di fare le prime misure di resistenza, si impiegò un filo nudo avvolto a elica in una scanalatura praticata su un cilindro di materia isolante: è ciò che si chiama un *reostato*. Ma si riconobbe possibile confrontare le resistenze con una precisione che non comportava più l'uso di uno strumento a contatto imperfetto come il reostato. Si impiega ancora il reostato per regolare resistenze, quando non servono misure esatte.

Le bobine di resistenza sono in genere fatte di metalli la cui resistenze è la più grande e varia meno con la temperatura. L'argento tedesco soddisfa molto bene queste condizioni; ma si è osservato che con il tempo certi campioni perdono le loro proprietà. Si è pure impiegato per le bobine campioni di diversi metalli puri e una lega di platino e argento; per parecchi anni, le resistenze relative di queste diverse bobine sono state trovate costanti nei limiti di precisione che si possono oggi raggiungere.

342. Per resistenze molto grandi, per esempio di parecchi milioni di ohm, il filo deve essere molto lungo o molto sottile, e la costruzione della bobina è costosa e difficile. Si è proposto così il selenio e il tellurio come sostanze adatte alla costruzione di grandi resistenze. Un modo di costruzione molto ingegnoso e molto semplice è stato proposto ultimamente da Phillips¹. Su un pezzo di ebanite o di vetro smerigliato, si traccia una linea sottile a matita, si collegano a elettrodi metallici i terminali di questo filamento di piombaggine e si ricopre il tutto con vernice isolante. Se si riconosce che la resistenza di una simile linea a matita rimane costante, questo sarà il modo migliore per ottenere una resistenza di parecchi milioni di ohm.

343. Vi sono diverse disposizioni mediante le quali è facile mettere bobine di resistenza in un circuito.

Così, si può disporre in serie in una cassetta un certo numero di bobine, di resistenze 1, 2, 4, 8, 16, ... distribuite secondo le potenze ascendenti del 2 (fig. 29).

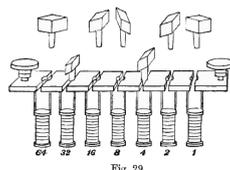


Fig. 29.

Gli elettrodi sono formati da grossi pezzi di rame, disposti al di fuori della cassetta, in modo tale che, con l'introduzione tra due di questi pezzi di una caviglia o di un cuneo di rame formante derivazione, la resistenza della bobina corrispondente sia messa fuori dal circuito. Questa disposizione è stata introdotta da Siemens.

¹*Phil. Mag.*, luglio 1870.

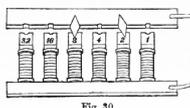
Ogni intervallo tra due elettrodi porta l'indicazione della resistenza della bobina corrispondente; se quindi vogliamo rendere la resistenza della cassa uguale, per esempio, a 107, bisogna esprimere 107 nel sistema del numeratore a base 2, cioè $64 + 32 + 8 + 2 + 1$ o 1101011. Ritiriamo poi le caviglie dai fori corrispondenti a 64, 32, 8, 2, 1 e lasciamo le caviglie nei fori segnati 16 e 4.

Questo metodo, fondato sull'impiego del sistema di numerazione a base 2, è quello che esige il minor numero di bobine separate e anche quello che è più facile da verificare. Se abbiamo un'altra bobina uguale a 1, possiamo verificare l'uguaglianza di 1 e 1', poi quella di $1 + 1'$ e di 2, quella di $1 + 1' + 2$ e di 4', e così di seguito.

Il solo svantaggio di questa disposizione sta nel fatto che richiede l'uso familiare del sistema di numerazione a base 2, che non possiedono in genere persone abituate a servirsi del sistema decimale.

344. Le bobine di resistenza di una cassetta possono essere disposte in altro modo, allo scopo di misurare le conducibilità invece delle resistenze.

Le bobine (fig. 30) sono collegate con una delle loro estremità a un lungo e grosso pezzo di rame, che forma uno degli elettrodi della cassetta, e, all'altra estremità, a dei grossi pezzi di rame, come nel caso precedente.



L'altro elettrodo della cassa è un lungo pezzo di rame: introducendo delle caviglie di rame tra gli elettrodi delle bobine e questo pezzo, lo si può collegare al primo elettrodo mediante un gruppo qualunque di bobine. La conducibilità della cassetta è allora la somma delle conducibilità delle bobine.

Nella figura, le resistenze delle bobine sono 1, 2, 4, ...; le caviglie sono messe in 2 e 8 e la conducibilità è $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$, e la resistenza della cassetta è, di conseguenza, $\frac{8}{5}$ o 1,6.

Questo metodo che consiste nel combinare numerose bobine per misurare resistenze frazionarie, è stato introdotto da Sir W. Thomson con il nome di *metodo dei ponti multipli*. (Si veda § 276).

Confronto tra resistenze. 345. Siano

E la forza elettromotrice di una pila;

R la resistenza di questa pila e dei suoi contatti (compreso il galvanometro che serve a misurare l'intensità della corrente);

I l'intensità di corrente quando si introducono nel circuito le resistenze aggiuntive r_1 e r_2 ;
la legge di Ohm dà

$$E = IR = I_1 (R + r_1) = I_2 (R + r_2)$$

Eliminando E la forza elettromotrice e R la resistenza della pila e dei suoi contatti, abbiamo la formula di Ohm

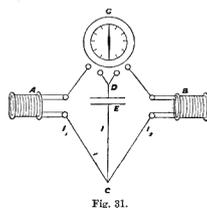
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{(I - I_1) I_2}{(I - I_2) I_1}$$

Questo metodo esige che si misurino i rapporti tra I, I_1, I_2 e ciò presuppone un galvanometro graduato per misure assolute.

Se le resistenze r_1 e r_2 sono uguali, I_1 e I_2 sono uguali; possiamo quindi verificare l'uguaglianza di due intensità tramite un galvanometro che non potrebbe misurarne il rapporto.

Ma è questo piuttosto un esempio di un metodo difettoso che di un metodo veramente pratico per la misura delle resistenze. Si può ora mantenere esattamente costante la forza elettromotrice E ; la resistenza interna della pila è pure estremamente variabile; non si può dunque contare su alcun metodo che suppone, anche per un tempo breve, la costanza di questi due elementi.

346. Il confronto delle resistenze si può fare con una grande precisione con uno o l'altro dei due metodi seguenti, nei quali il risultato non dipende dalle variazioni di R o di E (fig. 31).



Il primo di questi metodi si basa sull'impiego del galvanometro differenziale: questo strumento contiene due bobine, con correnti che attraversano indipendentemente l'una o l'altra; di modo che si passano in direzioni opposte, le bobine esercitano sull'ago del galvanometro azioni di senso contrario, il cui effetto risultante diviene nullo, quando il rapporto tra le intensità assume un certo valore $\frac{m}{n}$.

Siano I_1 e I_2 le intensità nelle due bobine del galvanometro; la deviazione dell'ago si potrà rappresentare con

$$\delta = mI_1 - nI_2$$

Dividiamo tra le due bobine la corrente I fornita dalla pila; introduciamo le resistenze A e B nei circuiti della prima e della seconda bobina, e rappresentiamo con α e β il resto della resistenza delle bobine e dei loro contatti, con r la resistenza della pila e dei suoi contatti di C e D e con E la sua forza elettromotrice.

Allora la legge di Ohm dà, per la differenza dei potenziale tra C e D ,

$$I_1(A + \alpha) = I_2(B + \beta) = E - Ir$$

e, poiché $I_1 + I_2 = I$

$$I_1 = E \frac{B + \beta}{D} \quad I_2 = E \frac{A + \alpha}{D} \quad I = E \frac{A + \alpha + B + \beta}{D}$$

dove

$$D = (A + \alpha)(B + \beta) + r(A + \alpha + B + \beta)$$

La deviazione dell'ago del galvanometro è quindi

$$\delta = \frac{E}{D} [m(B + \beta) - n(A + \alpha)]$$

e se non vi è deviazione osservabile, è perché la quantità tra parentesi non può differire da zero più di una certa quantità molto piccola, la quale dipende dalla potenza della pila, dalla buona disposizione degli strumenti, dalla sensibilità del galvanometro e dalla precisione dell'osservatore.

Supponiamo B regolato in modo che non vi sia deviazioni osservabile.

Sostituiamo ad A un altro conduttore A' e regoliamolo finché non vi sia più deviazione osservabile. Allora è chiaro che si ha, come prima approssimazione, $A' = A$.

Per renderci conto del grado di precisione di questa valutazione, distinguiamo con un accento le quantità che sono cambiate nella seconda osservazione; si ha

$$m(B + \beta) - n(A + \alpha) = \frac{D}{E} \delta$$

$$m(B + \beta) - n(A' + \alpha) = \frac{D'}{E'} \delta'$$

da cui

$$n(A' - A) = \frac{D}{E} \delta - \frac{D'}{E'} \delta'$$

Se, invece di essere visibilmente nulli, δ e δ' fossero solo uguali, il secondo membro dell'equazione non sarebbe più nullo, a meno che non si possa affermare che $E = E'$ e, in effetti, il metodo sarebbe solo una semplice modificazione di quello già in precedenza descritto.

Il merito di questo metodo consiste nel fatto che la cosa osservata è l'assenza di una qualche deviazione, o in altre parole, il metodo è una riduzione a zero: la non esistenza di una forza risulta da una osservazione dove questa avrebbe prodotto un effetto osservabile, se differisse da zero più di una certa quantità molto piccola.

I metodi di riduzione a zero hanno un grande valore quando sono impiegabili; ma essi richiedono che si possa mettere in gioco simultaneamente nell'esperienza due quantità della stessa specie uguali e opposte.

Nel nostro caso, δ e δ' sono due quantità molto piccole per poter essere osservate, e, di conseguenza, un cambiamento nel valore di E non toglie nulla della sua precisione al risultato.

Si può determinare il grado di precisione che può raggiungere questo metodo facendo una serie di osservazioni per ognuna delle quali si fa una nuova regolazione di A' e si confrontano poi i risultati di queste osservazioni per mezzo dell'intera serie.

Ora, se si regola A' di una quantità nota, per esempio se si introduce in A o in B una resistenza aggiuntiva uguale alla centesima parte di A o B , osservando la deviazione che ne deriva per l'ago del galvanometro, si può dedurre il numero di gradi corrispondenti a un errore dell'1%. E, per conoscere la precisione effettivamente ottenuta, bisogna determinare la più piccola deviazione che non possa sfuggire all'osservazione e confrontarla con la deviazione che corrisponde a un errore dell'1%.

Se tra A e B il confronto² deve essere fatto scambiando le posizioni di A e B , la seconda equazione diviene

$$m(A + \beta) - n(B + \alpha) = \frac{D'}{E} \delta'$$

da cui

$$(m + n)(B - A) = \frac{D}{E} \delta - \frac{D'}{E'} \delta'$$

Se m e n , A e B , α e β sono all'incirca uguali,

$$B - A = \frac{1}{2nE} (A + \alpha)(A + \alpha + 2r)(\delta - \delta')$$

dove si può prendere $\delta - \delta'$ come la più piccola deviazione osservabile del galvanometro.

Se si rende il filo del galvanometro più lungo e sottile, conservandogli la stessa massa totale, n varia come la lunghezza del filo e α come il quadrato della sua lunghezza, e vi è un valore minimo di $\frac{(A+\alpha)(A+\alpha+2r)}{n}$ per

$$\alpha = \frac{1}{3} (A + r) \left(2 \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{r^2}{(A + r)^2}} - 1 \right)$$

Se supponiamo che r , la resistenza della pila, sia piccola rispetto ad A , si ha

$$\alpha = \frac{1}{3} A$$

o la resistenza di ciascuna delle bobine del galvanometro deve essere un terzo della resistenza da misurare.

Si trova allora

$$B - A = \frac{8}{9} \frac{A^2}{nE} (\delta - \delta')$$

Se la corrente passante attraverso una sola bobina del galvanometro produce una deviazione Δ , si ha (supponendo che la deviazione sia esattamente proporzionale alla forza che la produce)

$$\Delta = \frac{mE}{A + \alpha + r} = \frac{3nE}{4A}$$

se $r = 0$ e $\alpha = \frac{1}{3}A$.

Pertanto

$$\frac{B - A}{A} = \frac{2}{3} \frac{\delta - \delta'}{\Delta}$$

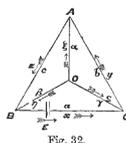
Nel galvanometro differenziale, due correnti producono sull'ago sospeso effetti uguali e contrari. La forza con la quale ognuna di esse agisce sull'ago non dipende solo dalla sua intensità,

²Questo studio è tratto dal Trattato di Weber sulle misure galvanometriche. (*Göttingen Transaction*, t. X, p. 65.)

ma anche dalla posizione delle spire del filo rispetto all'ago. Pertanto, a meno che la bobina non sia stata avvolta con grande cura, il rapporto tra m e n può cambiare con la posizione dell'ago. È quindi necessario determinare questo rapporto con metodi opportuni nel corso di ogni esperienza, se si suppone che si siano prodotti alcuni cambiamenti nella posizione dell'ago.

L'altro metodo di riduzione a zero, dove si impiega il ponte di Wheatstone, richiede solo un normale galvanometro; l'assenza di deviazione dell'ago che si osserva è dovuta, non più alle azioni opposte di due correnti contrarie, ma bensì all'assenza di corrente nel filo. Il fenomeno osservato non è quindi più soltanto una deviazione nulla, ma anche un'intensità nulla, e nessun errore si può produrre per irregolarità o cambiamenti di qualche tipo nelle bobine del galvanometro. Si deve richiedere al galvanometro solo di essere sufficientemente sensibile per rivelare l'esistenza e la direzione di una corrente, senza determinarne il valore, né confrontarlo con quello di un'altra corrente.

347. Il ponte di Wheatstone è formato essenzialmente di sei conduttori che uniscono quattro punti. Una forza elettromotrice E interviene tra due di questi punti per mezzo di una pila voltaica introdotta tra B e C (fig. 32). Si osserva per mezzo di un galvanometro l'intensità tra gli altri due punti O e A .



Questa corrente diviene nulla a certe condizioni: si dice allora che i conduttori BC, OA sono tra loro coniugati; ciò implica una certa relazione tra le resistenze degli altri quattro conduttori, ed è da questa relazione che si può ricavare la misura delle resistenze.

Se l'intensità è nulla in OA , il potenziale O deve essere lo stesso del potenziale in A . Se conosciamo i potenziali in B e C , possiamo determinare i potenziali in O e in A con le regole date al § 275, purché non vi sia corrente in OA ,

$$O = \frac{B\gamma + C\beta}{\beta + \gamma} \quad A = \frac{Bb + Cc}{b + c}$$

la condizione è quindi

$$b\beta = c\gamma$$

essendo b, c, β, γ le rispettive resistenze di CA, BO, OC .

Per conoscere il grado di precisione che si può raggiungere con questo metodo, bisogna determinare l'intensità di corrente che passa in OA quando la condizione non esattamente soddisfatta.

Siano

A, B, C, O i quattro punti;

x, y, z le correnti lungo BC, CA, AB ;

a, b, c le resistenze di questi tre conduttori;

ξ, η, ζ le correnti lungo OA, OB, OC ;

α, β, γ le loro resistenze;

E una forza elettromotrice che agisce lungo BC .

Indichiamo con A, B, C, O i potenziali nei punti A, B, C, O . Le equazioni di conduzione sono

$$\begin{aligned} ax &= B - C + E & a\xi &= O - A \\ by &= C - A & \beta\eta &= O - B \\ cz &= A - B & \gamma\zeta &= O - C \end{aligned}$$

con le equazioni di continuità

$$\begin{aligned} \xi + y - z &= 0 \\ \eta + z - x &= 0 \\ \zeta + x - y &= 0 \end{aligned}$$

Considerando il sistema come formato da tre circuiti OBC, OCA, OAB , nei quali le intensità sono x, y, z , e applicando a ogni circuito la regola di Kirchhoff, eliminiamo i valori dei potenziali OA, B, C e delle intensità ξ, η, ζ e otteniamo le seguenti equazioni in x, y, z

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma)x - \gamma y - \beta z &= E \\ -\gamma x + (b + \gamma + \alpha)y - \alpha z &= 0 \\ -\beta x - \alpha y + (c + \alpha + \beta)z &= 0\end{aligned}$$

da cui, ponendo

$$\begin{vmatrix} \alpha + \beta + \gamma & -\gamma & -\beta \\ -\gamma & b + \gamma + \alpha & -\alpha \\ -\beta & -\alpha & c + \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

ricaviamo

$$\xi = \frac{E}{D} (b\beta - c\gamma)$$

e

$$x = \frac{E}{D} [(b + \gamma)(c + \beta) + \alpha(b + c + \beta + \gamma)]$$

348. Il valore di D può essere messo sotto una forma simmetrica

$$D = abc + bc(\beta + \gamma) + c\alpha(\gamma + \alpha) + ab(\alpha + \beta) + (a + b + c)(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)$$

oppure, poiché supponiamo la pila nel conduttore a e il galvanometro nel conduttore α , possiamo sostituire a con B resistenza della pila e α con G resistenza del galvanometro. Troviamo allora

$$D = BG(b + c + \beta + \gamma) + B(b + \gamma)(c + \beta) + G(b + c)(\beta + \gamma) + bc(\beta + \gamma) + \beta\gamma(b + c)$$

Se la forza elettromotrice E agisse lungo OA , rimanendo la resistenza di OA sempre uguale a α e se il galvanometro fosse posto in BC , rimanendo la resistenza di BC a, il valore di D rimarrebbe lo stesso, e l'intensità in BC , dovuta a una forza elettromotrice E agente lungo OA , sarebbe uguale all'intensità lungo OA dovuta a una forza elettromotrice agente lungo BC .

Se si scollega semplicemente la pila e il galvanometro e se, senza alterare le loro rispettive resistenze, si collega la pila in A e in O e il galvanometro in B e C , bisogna cambiare i valori di B e G nell'espressione di D . Se D' è il valore di D dopo questo cambio, si trova

$$D - D' = (G - B)[(b + c)(\beta + \gamma) - (b + \gamma)(c + \beta)] = (B - G)(b - \beta)(c - \gamma)$$

Supponiamo che la resistenza del galvanometro sia maggiore di quella della pila.

Supponiamo pure che, nella sua prima posizione, il galvanometro colleghi il punto di giunzione dei due conduttori meno resistenti β e γ al punto di giunzione dei due conduttori più resistenti b e c ; o in altre parole, che, supponendo le quantità b, c, β, γ distribuite per ordine di grandezza, siano b e c collegate assieme, e β e γ pure. Allora le quantità $b - \beta$ e $c - \gamma$ hanno lo stesso segno, il loro prodotto è positivo, e $D - D'$ ha lo stesso segno di $B - G$.

Se quindi il galvanometro è posto in modo da collegare il punto di giunzione delle due resistenze maggiori al punto di giunzione delle due minori, e se la sua resistenza è superiore a quella della pila, il valore di D è minore e le deviazioni del galvanometro sono maggiori di quanto si avrebbe stabilendo i contatti nell'altro modo.

Pertanto, per ottenere nel sistema dato le deviazioni più grandi del galvanometro, la regola è la seguente:

Delle due resistenze della pila e del galvanometro, porre la maggiore in modo che essa colleghi il punto di giunzione delle due maggiori al punto di giunzione delle due minori delle quattro altre resistenze.

349. Si debba determinare il rapporto delle resistenze dei conduttori AB, AC , trovando sul conduttore BOC un punto O tale che, essendo i punti A e O collegati con un filo al quale è associato un galvanometro, non si produce alcuna deviazione osservabile dell'ago quando si fa agire la pila tra i punti B e C .

Si può ammettere che il conduttore BOC sia un filo di resistenza uniforme, diviso in parti uguali in modo che si possa leggere di seguito il rapporto di BO a OC .

Ma il conduttore invece di essere formato interamente da questo filo uniforme, si possa prenderne la parte vicina a O , e prendere per parti laterali delle bobine di forma qualunque e di resistenza esattamente determinata.

Impiegheremo ora una notazione differente da quella simmetrica con la quale abbiamo iniziato.

Siano

R la resistenza totale di BAC ;

$c = mR$ e $b = (1 - m)R$;

S la resistenza totale di BOC ;

$\beta = nS$ e $\gamma = (1 - n)S$.

Il valore di n si legge direttamente e quello di m si deduce quando non vi è deviazione osservabile del galvanometro.

Siano B la resistenza della pila e dei suoi collegamenti; G quella del galvanometro e dei suoi collegamenti.

Troviamo, come prima

$$D = G(BR + BS + RS) + m(1 - m)R^2(B + S) + n(1 - n)S^2(B + R) + (m + n - 2mn)BRS$$

e se ξ è l'intensità nel filo del galvanometro

$$\xi = \frac{ERS}{D}(n - m)$$

Per ottenere i risultati più esatti, dobbiamo rendere le deviazioni dell'ago il più grandi possibile relativamente al valore di $n - m$. A ciò si perviene scegliendo opportunamente le dimensioni del galvanometro e del filo la cui resistenza serve da termine di confronto.

Si mostrerà, quando si tratterà della Galvanometria (§ 716), che se la forma del filo in un galvanometro cambia, rimanendo la sua massa costante, la deviazione dell'ago prodotta dall'unità di intensità è proporzionale alla sua lunghezza e la resistenza cresce come il quadrato della lunghezza. Da ciò si ricava che la deviazione massima si produce quando la resistenza del filo del galvanometro è uguale alla resistenza del resto del circuito.

Nel nostro caso, se δ è la deviazione

$$\delta = C\sqrt{G}\xi$$

dove C è una certa costante e G la resistenza del galvanometro che varia come il quadrato della lunghezza del suo filo; da cui si trova che, quando δ è massimo, la parte del valore di D che contiene G deve divenire uguale al resto dell'espressione.

Se poniamo pure $m = n$, che è il caso dove abbiamo fatto un'osservazione corretta, troviamo che il miglior valore di G è

$$G = n(n - 1)(R + S)$$

Si può facilmente ottenere questo risultato, considerando la resistenza del sistema da A a O e ricordando che BC , essendo coniugato di AO , non ha alcun effetto su questa resistenza.

Troviamo anche che, data la superficie attiva totale della pila, la disposizione più vantaggiosa di questa pila è ottenuta quando

$$B = \frac{RS}{R + S}$$

Infine, determiniamo il valore di S con la condizione che un cambiamento dato nel valore di n produce la maggiore deviazione possibile nel galvanometro. Differenziando l'espressione di ξ , troviamo così

$$S^2 = \frac{BR}{B + R} \left[R + \frac{G}{n(1 - n)} \right]$$

Si si deve fare un grande numero di misure per le quali la resistenza da misurare presenta all'incirca lo stesso valore, si può preparare un galvanometro e una pila specialmente in vista di queste misure. La disposizione migliore è allora

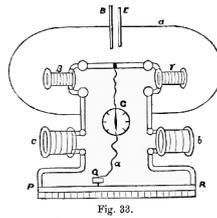
$$S = R \quad B = \frac{1}{2}R \quad G = 2n(1 - n)R$$

e, se $n = \frac{1}{2}$

$$G = \frac{1}{2}R$$

Sull'impiego del ponte di Wheatstone. 350. Abbiamo esposto la teoria generale del ponte di Wheatstone; considereremo ora alcune delle sue applicazioni.

Il confronto che può essere effettuato con la massima esattezza è quello di due resistenze uguali.



Supponiamo che β (fig. 33) sia una bobina di resistenza campione e che vogliamo regolare la resistenza di γ in modo da essere uguale a quella di β .

Due altre bobine, b e c , sono preparate, uguali tra loro o quasi; poi le quattro bobine sono messe in posizione, immergendo i loro elettrodi in vaschette di mercurio, di modo che la corrente della pila si divida tra i due rami formati, l'uno dalla parte di β e γ e l'altro di b e c . Le bobine b e c sono collegate da un filo PR , di resistenza la più uniforme possibile, provvista di una scala divisa in parti uguali.

Il filo del galvanometro collega il punto di incontro di β e di γ con un punto Q del filo PR , che si fa variare finché, chiudendo dapprima il circuito della pila, poi quello del galvanometro, non si osservi più alcuna deviazione dell'ago.

Si cambiano allora le posizioni delle bobine β e γ e si trova una nuova posizione di Q . Se questa nuova posizione è la stessa della iniziale, sappiamo che lo scambio di β e di γ non ha prodotto alcun cambiamento nel rapporto tra le resistenze e che, di conseguenza, γ è ben regolata. Se si deve spostare Q , il verso e la grandezza di questo spostamento indicheranno la natura e la grandezza del cambiamento che bisogna apportare alla lunghezza del filo γ perché la sua resistenza divenga uguale a quella di β .

Se le resistenze delle bobine b e c , ognuna delle quali comprendente la porzione del filo PR che si estende fino al punto zero della scala, sono uguali alle resistenze di b e di c divisioni del filo, e se la lettura della scala che corrisponde a Q è x nel primo caso, y nel secondo,

$$\frac{c+x}{b-x} = \frac{\beta}{\gamma} \quad \frac{c+y}{b-y} = \frac{\gamma}{\beta}$$

da cui

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2} = 1 + \frac{(b+c)(y-x)}{(c+x)(b-y)}$$

Poiché $b - y$ è circa uguale a $c + x$ e che entrambi sono grandi rispetto a x o a y , ciò si può scrivere

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2} = 1 + 4 \frac{y-x}{b+c}$$

e

$$\gamma = \beta \left(1 + 2 \frac{y-x}{b+c} \right)$$

Avendo regolato γ nel modo migliore possibile, sostituiamo a b e a c altre bobine, di resistenza dieci volte maggiori, per esempio.

La differenza che sussiste ancora tra β e γ produrrà allora nella posizione di Q una variazione dieci volte maggiore che con le prime bobine, e possiamo così aumentare costantemente l'esattezza del nostro confronto.

La regolazione di Q si fa più rapidamente per mezzo di un filo e di un contatto che si sposta, che con una cassetta di resistenze, e si esegue in maniera continua.

Non si deve mai introdurre nel filo per il contatto mobile la pila invece del galvanometro, poiché il passaggio di una corrente energica per il punto di contatto deteriorerebbe la superficie del filo. Questa disposizione si applica pertanto al caso in cui la resistenza del galvanometro è maggiore di quella della pila.

Se si deve misurare la resistenza γ , con a la resistenza della pila e α quella del galvanometro, i valori più vantaggiosi delle altre resistenze sono, così come mostrato da M. Oliver Heaviside (*Phil. Mag.*, febbraio 1873),

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a\alpha} \\ b &= \sqrt{a\gamma \frac{\alpha+\gamma}{a+\gamma}} \\ \beta &= \sqrt{\alpha\gamma \frac{a+\gamma}{\alpha+\gamma}} \end{aligned}$$

Misura di piccole resistenze. 351. Se si introduce nel circuito un conduttore corto e spesso, la sua resistenza è molto piccola rispetto a resistenze causate dai difetti inevitabili degli attacchi, contatti imperfetti, cattive saldature, ecc., e misure fatte nel modo descritto non darebbero un valore corretto della resistenza.

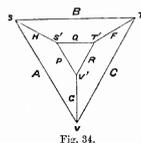


Fig. 34.

Lo scopo di questa esperienza è, in generale, di determinare la resistenza specifica di una sostanza, e vi si ricorre se la sostanza non può essere ottenuta sotto la forma di un filo lungo e sottile o se si deve misurare la resistenza trasversale così come quella longitudinale.

Sir W. Thomson ha descritto un metodo applicabile in casi di questo tipo, che possiamo prendere come esempio di un sistema a nove conduttori.

Il punto più importante di questo metodo è che si misura la resistenza non più dell'intero conduttore, ma solo della sua parte compresa tra due riferimenti vicini alle sue estremità.

La resistenza che vogliamo misurare è quella che incontra una corrente la cui intensità è uniforme in tutte le sezioni del conduttore e che scorre parallelamente all'asse di questo conduttore. Vicino alle sue estremità, quando la corrente penetra attraverso gli elettrodi saldati, amalgamati o semplicemente stretti contro le estremità del conduttore, vi è in genere un difetto di uniformità nella distribuzione dell'intensità nel conduttore; mentre a una breve distanza dagli elettrodi, l'intensità diviene sensibilmente uniforme. Il lettore si può riferire allo studio e ai diagrammi mostrati al § 193, dove una corrente penetrante da un lato in una banda di metallo a bordi paralleli diviene presto parallela a questi bordi.

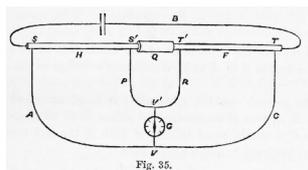


Fig. 35.

Si deve quindi confrontare la resistenza dei conduttori tra certi riferimenti S, S' e T, T' .

I conduttori sono disposti uno di seguito all'altro; collegati nel modo migliore possibile, nel circuito di una pila a bassa resistenza. Un filo SVT tocca i conduttori in S e in T ; un altro, $S'V'T'$, li tocca in S' e T' .

Il filo del galvanometro collega i punti V e V' di questi due fili.

I fili SVT e $S'V'T'$ sono presi molto resistenti affinché si possa trascurare avanti la loro resistenza quella che è dovuta ai contatti imperfetti in S, T, S', T' ; V e V' sono presi in modo che le resistenze dei due rami di ognuno dei due fili stiano circa nel rapporto delle resistenze dei conduttori.

Chiamiamo

H e F le resistenze dei conduttori SS' e TT' ;

A e C quelle dei rami SV e VT' ;

P e R quelle dei rami $S'V'$ e $V'T'$;

Q quella del pezzo $S'T'$ che collega i conduttori;

B quella della pila e dei suoi collegamenti;

G quella del galvanometro e dei suoi collegamenti.

La simmetria di questo sistema si comprende facilmente dal diagramma semplificato della fig. 34.

La condizione affinché la pila B e il galvanometro G siano conduttori coniugati è, in questo caso,

$$\frac{F}{C} - \frac{H}{A} + \left(\frac{R}{C} - \frac{P}{A} \right) \frac{Q}{P + Q + R} = 0$$

La resistenza della parte di comunicazione Q è la più bassa possibile. Se fosse nulla, l'equazione si ridurrebbe a

$$\frac{F}{C} - \frac{H}{A} = 0$$

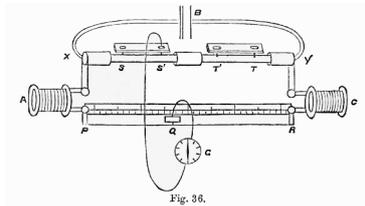
e il rapporto tra le resistenze da confrontare sarebbe uguale al rapporto tra C e A , come nella forma comune del ponte di Wheatstone.

Nel nostro caso, il valore di Q è piccolo rispetto a P o a R ; se quindi prendiamo i punti V e V' in modo che il rapporto tra R e C è circa uguale a quello tra P e A , l'ultimo termine dell'equazione si annulla e abbiamo

$$\frac{F}{H} = \frac{C}{A}$$

Il successo di questo metodo dipende, in certa misura, dalla perfezione dei contatti tra i fili e i conduttori che si esaminano, in S, S', T, T' . Nel metodo seguente, impiegato da MM. Matthiessen e Hockin³, non ci si è preoccupati di questa condizione.

352. I conduttori da esaminare sono disposti nel modo già detto: i collegamenti sono fatti nel modo migliore possibile, e ci si propone di confrontare la resistenza della parte compresa tra i riferimenti S, S' del primo conduttore e la resistenza della parte compresa tra T, T' del secondo (fig. 36).



Due punti o due spigoli vivi, fatti di una sostanza conduttrice, sono fissati in un pezzo di materia isolante, in modo che si possa misurare esattamente la distanza che li separa. Essendo questo strumento posto sul conduttore da esaminare, i suoi punti di contatto con questo conduttore sono a una distanza nota SS' . Ognuno di questi pezzi di contatto è collegato a una vaschetta di mercurio dove si può immergere uno degli elettrodi del galvanometro.

Il resto dello strumento è disposto come nel ponte di Wheatstone, con bobine o cassette di resistenza in A e C , un filo PR e un contatto mobile Q al quale è collegato l'altro elettrodo del galvanometro.

³Laboratory, Matthiessen e Hockin, *Sur les alliages*.

Supponiamo il galvanometro collegato a S e a Q , e siano A_1 e C_1 così disposti, e la posizione di Q così determinata in Q_1 in modo che non vi sia corrente nel filo del galvanometro.

Sappiamo allora che

$$\frac{XS}{SY} = \frac{A_1 + PQ}{C_1 + QR}$$

dove essendo XS, PQ, \dots , messi per rappresentare le resistenze di questi conduttori.

Da ciò ricaviamo

$$\frac{XS}{XY} = \frac{A_1 + PQ_1}{A_1 + C_1 + PR}$$

Colleghiamo ora a S' l'elettrodo del galvanometro, e trasportiamo le bobine di resistenza da C in A , finché si possa stabilire l'equilibrio elettrico nel filo del galvanometro ponendo Q in un certo punto Q_2 del filo. Siano C_2 e A_2 i nuovi valori di C e A , cioè

$$A_1 + C_1 + PR = A_2 + C_2 + PR = R$$

Abbiamo, come prima,

$$\frac{XS}{XY} = \frac{A_2 + PQ_2}{R}$$

da cui

$$\frac{SS'}{XY} = \frac{A_2 - A_1 + Q_1Q_2}{R}$$

Analogamente, mettendo lo strumento sul secondo conduttore in TT' e trasportando ancora resistenze, avremo, quando l'elettrodo è in T' ,

$$\frac{XT'}{XY} = \frac{A_3 + PQ_3}{R}$$

e, quando è in T

$$\frac{XT}{XY} = \frac{A_4 + PQ_4}{R}$$

da cui

$$\frac{TT'}{XY} = \frac{A_4 - A_3 + Q_3Q_4}{R}$$

Possiamo ora dedurre dal rapporto delle resistenze SS' e TT'

$$\frac{SS'}{T'T} = \frac{A_2 - A_1 + Q_1Q_2}{A_4 - A_3 + Q_3Q_4}$$

Quando si legge la posizione di Q sul filo lungo $1 m$, si può quasi contare su una approssimazione superiore a $\frac{1}{10}$ di mm , e la resistenza del filo può presentare variazioni considerevoli nei suoi diversi punti a causa di differenze di temperatura, di attrito, ecc. Se quindi si vuole ottenere una grande precisione, si introducono in A e in C bobine di resistenza notevole, di cui si può determinare il rapporto tra resistenze più esattamente che il rapporto tra resistenze di parti nelle quali il punto Q divide il filo.

Bisogna osservare che in questo metodo l'esattezza dei risultati non dipende per nulla dalla perfezione delle costanti in S, S', T, T' .

Questo metodo può essere chiamato *metodo differenziale del ponte di Wheatstone*, perché si basa sul confronto di osservazioni separate.

Una condizione essenziali di esattezza in questo metodo è che la resistenza dei collegamenti rimanga la stessa durante le quattro operazioni che sono necessarie per ottenere una misura completa. Così si deve sempre ripetere questa serie di operazioni nello stesso ordine, per scoprire i cambiamenti che avrebbero potuto prodursi in queste resistenze.

Confronto tra grandi resistenze. 353. Se la resistenza da misurare è molto elevata, si possono confrontare i potenziali dei diversi punti per mezzo di un elettrometro sensibile, come l'elettrometro a quadranti descritto nel § 219.

Se i conduttori di cui si deve misurare la resistenza sono posta in serie e attraversati da una corrente di una pila di forza elettromotrice elevata, la differenza dei potenziali alle estremità di ogni conduttore è proporzionale alla resistenza di questo conduttore. Pertanto, collegando gli elettrodi dell'elettrometro alle estremità di un conduttore, poi di un altro, si può determinare il rapporto delle loro resistenze.

Questo è un metodo più diretto per determinare resistenze; ma presuppone l'impiego di un elettrometro alle cui indicazioni ci si possa affidare, e dobbiamo essere sicuri che la corrente rimanga costante per l'intera durata dell'esperienza.

Si può così disporre di quattro conduttori di grande resistenza, come in un ponte di Wheatstone, e formare il ponte con gli elettrodi di un elettrometro invece di quelli di un galvanometro. Il vantaggio di questo metodo è che non c'è bisogno di una corrente permanente per produrre la deviazione dell'elettrometro, invece di un galvanometro che non devia a meno che il filo sia attraversato da una corrente.

354. Quando la resistenza di un conduttore è così grande che la corrente che vi produce ogni forza elettromotrice disponibile sia ancora troppo piccola per essere misurata direttamente col galvanometro, si può impiegare un condensatore per accumulare l'elettricità per un certo tempo; poi, scaricando questo condensatore attraverso un galvanometro, si può valutare la quantità di elettricità accumulata: è il metodo di MM. Bright e Clark per provare le saldature dei cavi sottomarini.

355. Ma il modo più semplice di misurare la resistenza di un simile conduttore consiste nel caricare un condensatore di grande capacità e di collegare le sue due armature agli elettrodi di un elettrometro e alle estremità del conduttore.

Siano

E la differenza di potenziale indicata dall'elettrometro;

S la capacità del condensatore;

Q la carica su ognuna delle sue superfici;

R la resistenza del conduttore;

x l'intensità di corrente che lo attraversa,

si ha, dalla teoria dei condensatori

$$Q = SE$$

dalla legge di Ohm,

$$E = Rx$$

dalla definizione di intensità,

$$x = -\frac{dQ}{dt}$$

da cui

$$-Q = RS \frac{dQ}{dt}$$

e

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RS}}$$

essendo E_0 la prima lettura dell'elettrometro ed E la lettura al tempo t .

Da ciò ricaviamo

$$R = \frac{t}{S(\ln E_0 - \ln E)}$$

ciò che dà R in misura assoluta. In questa espressione, non è necessario conoscere il valore di una divisione della scala dell'elettrometro.

Se la capacità S del condensatore è valutata in misura elettrostatica da un certo numero di metri, R è pure data in misura elettrostatica come l'inverso di una velocità.

Se S è dato in misura elettromagnetica, le sue dimensioni sono $\frac{T^2}{L}$ e R è una velocità.

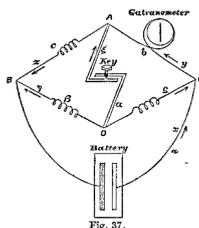
Siccome lo stesso condensatore non è un isolante perfetto, è necessario compiere due esperienze. Nella prima, si determina la resistenza R_0 del condensatore; nella seconda, quella del condensatore avente le sue armature collegate dal conduttore. Sia R' questa resistenza. Allora la resistenza R del conduttore è data dall'equazione

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R_0}$$

Questo metodo è stato impiegato da M. Siemens.

Metodo di Thomson⁴ per determinare la resistenza di un galvanometro. 356.

Una disposizione simile a quella del ponte di Wheatstone (fig. 37) è stata vantaggiosamente impiegata da Sir W. Thomson per determinare la resistenza del galvanometro di cui si serve. Essa è stata suggerita a Sir W. Thomson dal metodo di Mance (si veda § 357).



Come in precedenza, poniamo la pila tra B e C , sulla figura del § 347; ma mettiamo il galvanometro in CA invece che in OA . Se $b\beta - c\gamma$ è nullo, il conduttore OA è coniugato di BC , e, poiché non vi è corrente prodotta in OA dalla pila posta in BC , l'intensità di corrente in uno qualunque dei conduttori è indipendente dalla resistenza di OA . Pertanto la deviazione del galvanometro posto in CA resterà la stessa, sia che la resistenza OA sia grande o piccola. Si osserva quindi se la deviazione del galvanometro rimane anche quando si unisce O e A con un conduttore di piccola resistenza o quando si interrompe tale contatto; e quando, con una opportuna regolazione delle resistenze dei conduttori, questo risultato è stato ottenuto, si sa che la resistenza del galvanometro è

$$b = \frac{c\gamma}{\beta}$$

essendo c, γ, β resistenze di bobine note.

Vi è da osservare che questo metodo non è di riduzione a zero, se si intende che non passa corrente nel galvanometro; ma è un metodo di riduzione a zero nel senso che ciò che si osserva è un fatto negativo, cioè che la deviazione del galvanometro non cambia quando si stabilisce un certo contatto. Un'osservazione di questo genere ha più valore dell'osservazione di uguaglianza delle due deviazioni dello stesso galvanometro; poiché, in quest'ultimo caso, la forza della pila o la sensibilità del galvanometro possono cambiare nell'intervallo delle misure, invece, se la deviazione rimane costante malgrado certi cambiamenti che possiamo ripetere a volontà, siamo sicuri che l'intensità è completamente indipendente da questi cambiamenti.

Si può determinare facilmente la resistenza della bobina di un galvanometro impiegando il ponte di Wheatstone, nel modo consueto, mettendo in OA un altro galvanometro. Con il metodo descritto, il galvanometro serve a misurare la propria resistenza.

Metodo di Mance per determinare⁵ la resistenza della pila. 357. La misura della resistenza di una pila che funziona presenta difficoltà assai maggiori; poiché si trova che la resistenza della pila subisce un cambiamento notevole qualche tempo dopo che si è cambiata la forza della corrente che attraversa questa pila. Nella maggior parte dei metodi comunemente impiegati per misurare la resistenza della pile, si produce nel corso stesso delle operazioni di queste variazioni nella forza della corrente che attraversa la pila, di conseguenza, i risultati sono resi incerti.

⁴Proc. R. S., 19 gennaio 1871.

⁵Proc. R. S., 19 gennaio 1871.

Il metodo di Mance non si presta a questa obiezione: la pila è messa in BC e il galvanometro in CA . Il contatto tra O e B è alternativamente stabilito e interrotto.

La deviazione dell'ago del galvanometro rimane costante, qualsiasi cambiamento subisca la resistenza di OB , purché OB e AC siano coniugati. Si può considerare questo risultato come un caso particolare di quanto stabilito al § 347, lo si può anche ottenere direttamente eliminando z e β nelle equazioni di questo paragrafo; si ha allora

$$(a\alpha - c\gamma)x + (c\gamma + c\alpha + cb + b\alpha)y = E\alpha$$

Affinché y sia indipendente da x e, di conseguenza, da β , bisogna che si abbia

$$a\alpha = c\gamma$$

Si ha così la resistenza della pila in funzione di c, γ, α .

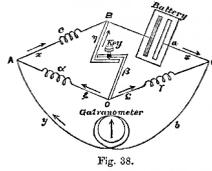
Se la condizione $a\alpha = c\gamma$ è soddisfatta, la corrente che passa nel galvanometro è

$$\frac{E\alpha}{cb + a(a + b + c)}$$

o

$$\frac{E\gamma}{cb + \gamma(a + b + c)}$$

Per testare la sensibilità di questo metodo, supponiamo che la condizione $a\alpha = c\gamma$ valga pressapoco (fig. 38), ma non completamente, e che passi nel galvanometro una corrente y_0 quando i punti O e B sono collegati da un conduttore di resistenza trascurabile, una corrente y_1 quando il collegamento è completamente interrotto tra O e B .



Per trovare questi valori, dobbiamo porre $\beta = 0$ e $\beta = \infty$ nella formula generale di y e confrontare i risultati.

Il valore generale di y è

$$\frac{c\gamma + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{D} E$$

dove D indica la stessa espressione del § 348. Assegnando a β i valori indicati in precedenza, è facile vedere che le espressioni di y_0 e di y_1 sono all'incirca

$$y + \frac{c(c\gamma - a\alpha)}{\gamma(c + \alpha)} \frac{y^2}{E}$$

e

$$y - \frac{b(c\gamma - a\alpha)}{\gamma(\gamma + \alpha)} \frac{y^2}{E}$$

Da questi valori troviamo

$$\frac{y_0 - y_1}{y} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{c\gamma - a\alpha}{(c + \alpha)(\gamma + \alpha)}$$

Pertanto la resistenza c del conduttore AB deve essere uguale a a , quella della pila; α e γ devono essere uguali e anche il più piccoli possibile, e b deve essere uguale a $\alpha + \gamma$.

Poiché un galvanometro ha la sua massima sensibilità quando è vicino alla sua posizione di riposo, prima di stabilire il contatto tra O e B , riporteremo l'ago allo zero per mezzo di magneti fissi.

Quando si misura in questo modo la resistenza della pila, nessuna parte dell'operazione modifica l'intensità nel galvanometro; si può quindi misurare la resistenza della pila per ogni intensità di corrente e determinare come l'intensità opera sulla resistenza⁶.

Se y è l'intensità di corrente nel galvanometro, le intensità nella pila saranno x_0 quando la chiave è abbassata e x_1 quando è alzata, da cui si ha

$$x_0 = y \left(1 + \frac{b}{\gamma} + \frac{ac}{\gamma(a+c)} \right) \quad x_1 = y \left(1 + \frac{b}{\alpha+\gamma} \right)$$

la resistenza della batteria è

$$a = \frac{c\gamma}{\alpha}$$

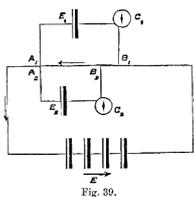
e la forza elettromotrice della batteria è

$$E = y \left[b + c + \frac{c}{\alpha} (b + \gamma) \right]$$

Il metodo del § 356, per determinare la resistenza di un galvanometro, non differisce da quello in cui i contatti sono stabiliti e staccati tra O e A invece che tra O e B ; cambiando α e β , otteniamo per questo caso,

$$\frac{y_0 - y_1}{y} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{c\gamma - b\beta}{(c + \beta)(\beta + \gamma)}$$

Confronto delle forze elettromotrici. 358. La seguente disposizione, per confrontare la forza elettromotrice dei sistemi voltaici o termoelettrici non attraversati da corrente, richiede solo una serie di bobine di resistenza e una pila costante.



Supponiamo che la forza elettromotrice E di questa pila sia maggiore di quella dell'uno o dell'altra degli elettromotori da confrontare. Interponendo tra i punti A_1 e B_1 (fig. 39) del circuito primario EB_1A_1E una resistenza sufficiente R_1 , si può rendere la forza elettromotrice che agisce da B_1 verso A_1 uguale a quella dell'elettromotore E_1 , e se allora si collegano ai punti A_1 e B_1 gli elettrodi di questo elettromotore, non sarà attraversato da alcuna corrente. Si porrà pertanto un galvanometro G_1 nel circuito dell'elettromotore E_1 e si regolerà la resistenza tra A_1 e B_1 finché il galvanometro G_1 non riveli più corrente; si ottiene allora l'equazione

$$E_1 = R_1 C$$

dove R_1 è la resistenza tra A_1 e B_1 e C l'intensità di corrente nel circuito primario.

Analogamente, prendendo il secondo elettromotore E_2 e ponendo i suoi elettrodi in A_2 e B_2 , in modo che il galvanometro G_2 non riveli alcuna corrente

$$E_2 = R_2 C$$

dove R_2 è la resistenza tra A_2 e B_2 . Se le osservazioni dei galvanometri G_1 e G_2 sono simultanee, il valore di C , l'intensità nel circuito primario, è la stessa nelle due equazioni, e si trova

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

⁶Nelle *Philosophical Magazine* del 1875, t. I, p. 515-525, M. Oliver Lodge lo segnala come un difetto del metodo di Mance, cioè che la forza elettromotrice della pila dipende dall'intensità di corrente in questa pila, la deviazione del galvanometro non può essere la stessa nelle due posizioni della chiave abbassata o rialzata, se l'equazione $\alpha a = c\gamma$ è vera. M. Lodge descrive una modifica del metodo di Mance che ha impiegato con successo.

In questo modo, si possono confrontare le forze elettromotrici di due elettromotori. La forza elettromotrice assoluta di un elettromotore si può misurare con il metodo elettrostatico con l'elettrometro o con il metodo elettromagnetico con un galvanometro assoluto.

Questo metodo, nel quale non vi è corrente in alcuno degli elettromotori nel momento del confronto, è una modifica del metodo di Poggendorf dovuto a M. Latimer Clark, che ha ottenuto così i valori seguenti per le forze elettromotrici:

				Soluzione concentrata di		Volt
Daniell	I.	Amalgama di Zinco	$HSO_4 + 4 aq.$	$CuSO_4$	Rame	= 1,079
	II.	"	$HSO_4 + 12 aq.$	$CuSO_4$	Rame	= 0,978
	III.	"	$HSO_4 + 12 aq.$	$CuNO_6$	Rame	= 1,00
Bunsen	I	"	"	HNO_6	Carbone	= 1,964
	II.	"	"	<i>sp. g.</i> 1,38	Carbone	= 1,888
Grove		"	$HSO_4 + 4 aq.$	HNO_6	Platino	= 1,956

Un Volt è una forza elettromotrice uguale a 100000000 unità del sistema *CGS*.

Resistenza elettrica dei corpi

359. I diversi corpi si distribuiscono in tre classi a seconda di come si comportano rispetto al passaggio dell'elettricità.

La prima classe comprende tutti i metalli, le loro leghe, qualche solfuro e altri composti contenenti metalli; bisogna aggiungere il carbonio sotto forma di carbone di storta e il selenio sotto la varietà cristallina.

Per tutte queste sostanze, la conduzione avviene senza decomposizione né alterazione della materia chimica dei corpi, né nella massa, né nei punti in cui la corrente entra o esce. In tutti questi corpi, la resistenza aumenta con il crescere della temperatura.

La seconda classe comprende le sostanze dette *elettroliti*, poiché il passaggio di corrente è accompagnato da una scomposizione della sostanza in due elementi che appaiono sugli elettrodi. In generale, i corpi non possono essere elettrolizzati se non allo stato liquido; tuttavia vi sono certi colloidi, che il vetro a 100°, che sono in apparenza solidi e che eppure sono elettroliti. Da esperienze di Sir B. G. Brodie, sembra risultare che certi gas possono essere elettrolizzati sotto l'azione di una notevole forza elettromotrice.

Per tutte le sostanze dove la conduzione è elettrolitica, la resistenza diminuisce con l'aumentare della temperatura.

La terza classe comprende sostanze la cui resistenza è così grande che i metodi più accurati possono soltanto percepire il passaggio della corrente: essi sono detti *dielettrici*. A questa classe appartiene un gran numero di corpi solidi, qualche liquido, come la terbentina, il petrolio, la paraffina fusa, ecc. e tutti i gas e i vapori. Il carbonio sotto forma di diamante e il selenio sotto la varietà amorfa appartengono a questa classe.

La resistenza dei corpi di questa classe è enorme, confrontata con quella dei metalli. Essa diminuisce con il crescere della temperatura. In virtù della grande resistenza di questi corpi, è difficile determinare se la debole corrente che si può far passare attraverso di loro è oppure no accompagnata da elettrolisi.

Resistenza elettrica dei metalli. 360. Non vi sono studi elettrici per i quali si siano fatte esperienze più numerose e più accurate della misura della resistenza dei metalli. È della massima importanza per i telegrafi elettrici che il metallo di cui sono fatti i fili abbia la più piccola resistenza possibile: si devono quindi fare misure di resistenza per la scelta dei materiali. Se un errore si produce sulla linea, la sua posizione è presto determinata dalle misure di resistenza; queste misure, per le quali tante per quali tante persone sono ora impegnate, esigono l'uso di bobine di resistenza fatte di un metallo le cui proprietà elettriche siano state studiate con cura.

Le proprietà elettriche dei metalli e delle loro leghe sono state studiate con grande precisione da MM. Matthiessen, Vogt e Hockin e da MM. Siemens che hanno molto contribuito all'introduzione nella pratica giornaliera di misure elettriche esatte.

Dalle ricerche del Dr. Matthiessen, risulta che l'effetto della temperatura sulla resistenza è circa lo stesso per un gran numero di metalli puri; la resistenza a 100° C sta alla resistenza a 0° C nel rapporto di 1,414 a 1, o di 100 a 70,7. Per il ferro puro, il rapporto è di 1,645; per il tallio puro di 1,458.

La resistenza dei metalli è stata osservata dal Dr. C. W. Siemens¹ nei limiti di temperatura più vasti, estendendosi dal punto di congelamento dell'acqua fino a 350° C e, in alcuni casi, fino a 1000° C. Egli trovò che la resistenza cresce con la temperatura, ma che l'aumento diminuisce

¹Proc. R. S., 27 aprile 1871.

con l'innalzamento della stessa. La formula che egli trova in accordo molto esatto con le misure di resistenza fatte a bassa temperatura dal Dr. Matthiessen e con le proprie osservazioni si estendono su un intervallo di $1000^{\circ} C$ è

$$r = \alpha T^{\frac{1}{2}} + \beta T + \gamma$$

dove T è la temperatura assoluta contata a partire da $-273^{\circ} C$ e dove α, β, γ sono costanti. Così per

$$\text{Platino} \quad r = 0,039369T^{\frac{1}{2}} + 0,00216407T - 0,2413$$

$$\text{Rame} \quad r = 0,026577T^{\frac{1}{2}} + 0,0031443T - 0,22751$$

$$\text{Ferro} \quad r = 0,072545T^{\frac{1}{2}} + 0,0038133T - 1,23971$$

Grazie a dati di questo genere, si può determinare la temperatura di un forno osservando la resistenza di un filo di platino posto in esso.

Il Dr. Mathiessen ha riconosciuto che per due metalli combinati in una lega, la resistenza di questa è, nella maggior parte di casi, superiore a quella che si potrebbe calcolare dalla resistenza dei metalli componenti e dalla loro proporzione. Nel caso delle leghe d'oro o di argento, la resistenza della lega è maggiore di quella dell'oro o dell'argento puro, e, quando le proporzioni dei due metalli sono comprese entro certi limiti, la resistenza varia molto poco per piccole variazioni nelle proporzioni. Per questo motivo, il Dr. Matthiessen raccomanda, come sostanza molto conveniente per riprodurre l'unità di resistenza, una lega di due parti in peso di oro per una parte di argento.

In generale, i cambiamenti di temperatura hanno meno effetto sulla resistenza elettrica delle leghe che dei metalli.

Per questo si fanno le comuni bobine di resistenza in argento tedesco, che presenta una grande resistenza che varia poco con la temperatura.

Si impiega pure per le bobine campione una lega di platino e di argento.

361. La resistenza elettrica di certi metalli cambia con le ricotture, e, a meno che un filo non sia stato sottoposto a prove ripetute, nelle quali è stato portato ad alte temperature senza subite un cambiamento permanente di resistenza, non lo si può considerare con certezza un campione di resistenza. La resistenza di certi fili cambia col tempo, senza essere sottoposto a variazioni di temperatura. È quindi importante determinare la resistenza specifica del mercurio, metallo che, essendo fluido, ha sempre la stessa struttura molecolare, e che è facile da purificare per distillazione e trattamento con l'acido nitrico. Una grande attenzione è stata data alla misura della resistenza di questo metallo da W e C. F. Siemens che l'ha proposto come campione. Queste ricerche sono state completate da quelle di Mathiessen e Hockin.

La resistenza specifica del mercurio si deduce nel modo seguente dalla resistenza misurata di un tubo di lunghezza l contenente un peso w di mercurio.

Nessun tubo di vetro presenta un diametro uguale in tutta la sua lunghezza; ma, se si introduce in esso una piccola quantità di mercurio che occupa una lunghezza λ , il cui punto medio è a una distanza x da uno dei bordi del tubo, l'area della sezione circa in questo punto sarà $s = \frac{C}{\lambda}$, dove C è una certa costante.

Il peso del mercurio che riempie il tubo è

$$w = \rho \int s dx = \rho C \sum \left(\frac{1}{\lambda} \right) \frac{l}{n}$$

dove n è il numero dei punti equidistanti presi sulla lunghezza del tubo per i quali si è misurata λ , e ρ la massa dell'unità di volume.

La resistenza dell'intero tubo è

$$R = \int \frac{r}{s} dx = \frac{r}{C} \sum (\lambda) \frac{l}{n}$$

dove r è la resistenza specifica per unità di volume.

Pertanto

$$wR = r\rho \sum (\lambda) \sum \left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{l^2}{n^2}$$

e

$$r = \frac{wR}{\rho l^2} \frac{n^2}{\sum (\lambda) \sum \left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

ciò che fornisce la resistenza specifica dell'unità di volume.

Per trovare la resistenza dell'unità di lunghezza e dell'unità di massa, dobbiamo moltiplicare per la densità.

Dalle esperienze di Matthiessen e Hockin, risulta che la resistenza di una colonna di mercurio uniforme, della lunghezza di 1 *m* e del peso di 1 *g*, è a $0^\circ C$ di 13,071 *ohm*; da cui segue che, se il peso specifico del mercurio è 13,595, la resistenza di una colonna lunga 1 *m* e di sezione 1 *mm*² è 0,96148 *ohm*.

362. Nella Tabella seguente, *R* è la resistenza in *ohm* a $0^\circ C$ di una colonna lunga 1 *m* pesante 1 *g* e *r* è la resistenza in centimetri al secondo di un centimetro cubo, dalle esperienze di Matthiessen². (580)

	Densità		<i>R</i>	<i>r</i>	Aumento % della resistenza da $1^\circ C$ a $20^\circ C$
Argento	10,50	trafilato	0,1689	1609	0,377
Rame	8,95	trafilato	0,1469	1642	0,388
Oro	19,27	trafilato	0,4150	2154	0,365
Piombo	11,391	compresso	2,257	19847	0,387
Mercurio	13,595	liquido	13,071	96146	0,072
Oro 2, Argento 1	15,218	allungato o ricotto	1,668	10988	0,065
Selenio a $100^\circ C$		cristallizzato		$6 \cdot 10^{13}$	1,00

Resistenza elettrica degli elettroliti. 363. Si incontrano nella misura della resistenza elettrica degli elettroliti delle difficoltà dovute alla polarizzazione degli elettrodi: si ha che la differenza di potenziale che si osserva tra gli elettrodi metallici è inferiore alla forza elettromotrice che produce effettivamente la corrente.

Vi sono diversi metodi di superare questa difficoltà. In certi casi, si può eliminare la polarizzazione impiegando elettrodi fatti di una opportuna sostanza, di zinco, per esempio, in una soluzione di solfato di zinco. Se gli elettrodi hanno una superficie notevole rispetto alla sezione della parte dell'elettrolita di cui si deve misurare la resistenza, e se si impiegano solo correnti di breve durata aventi direzioni alternate, si potranno eseguire le misure prima che il passaggio della corrente abbia dato alla polarizzazione un'intensità notevole.

Infine, se si eseguono due esperienze in successione, in una delle quali la corrente ha da percorrere nell'elettrolita un cammino assai più lungo che nell'altro, e, se si regola la forza elettromotrice in modo che l'intensità effettiva e la durata del passaggio di corrente siano circa gli stessi nei due casi, si può eliminare interamente l'effetto della polarizzazione.

364. Nelle esperienze del Dr Paalzow³, gli elettrodi avevano la forma di grandi dischi, posti in recipienti piatti, separati, contenenti l'elettrolita, tra i quali la comunicazione era stabilita tramite un lungo sifone riempito dell'elettrolita e immerso in uno dei due contenitori. Si impiegavano due di questi sifoni di lunghezza differente.

Essendo *R*₁ e *R*₂ le resistenze osservate per l'elettrolita in questi sifoni, questi erano riempiti di mercurio e si trovava allora *R*'₁ e *R*'₂ per le loro resistenze.

²*Phil. Mag.*, maggio 1865.

³*Monatsbericht*, Berlino, luglio 1868.

Allora si troverebbe il rapporto tra la resistenza dell'elettrolita e quella di una massa della stessa forma di mercurio a $0^{\circ} C$ con la formula

$$\rho = \frac{R_1 - R_2}{R'_1 - R'_2}$$

Per dedurre valori di ρ la resistenza lunga $0,01 m$ avente una sezione di $1 cm^2$, dobbiamo moltiplicare il calore di r per la misura a $0^{\circ} C$ (si veda § 361).

Ecco i risultati forniti da Paalzow: (581)

Miscela di Acido Solforico e Acqua		
	Temp.	Resistenza confrontata con mercurio
H_2SO_4	$15^{\circ} C$	96950
$H_2SO_4 + 14H_2O$	$19^{\circ} C$	14157
$H_2SO_4 + 13H_2O$	$22^{\circ} C$	13310
$H_2SO_4 + 499H_2O$	$22^{\circ} C$	184773
Solfato di Zinco e Acqua		
$ZnSO_4 + 23H_2O$	$23^{\circ} C$	194400
$ZnSO_4 + 24H_2O$	$23^{\circ} C$	191000
$ZnSO_4 + 105H_2O$	$23^{\circ} C$	354000
Solfato di Rame e Acqua		
$CuSO_4 + 45H_2O$	$22^{\circ} C$	202410
$CuSO_4 + 105H_2O$	$22^{\circ} C$	339341
Solfato di Magnesio e Acqua		
$MgSO_4 + 34H_2O$	$22^{\circ} C$	199180
$MgSO_4 + 107H_2O$	$22^{\circ} C$	324600
Acido Cloridrico e Acqua		
$HCl + 15H_2O$	$23^{\circ} C$	13626
$HCl + 500H_2O$	$23^{\circ} C$	86679

365. MM. F. Kohlrausch e W. a. Nippoldt⁴ hanno determinato la resistenza della miscela di acido solforico e di acqua. Essi impiegarono correnti magneto-elettriche alternate, la cui forza elettromotrice variava da $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{74}$ di elementi Grove; poi, per mezzo di una coppia termoelettrica rame-ferro, hanno ridotto la forza elettromotrice a $\frac{1}{429000}$ di Grove. Hanno trovato che la legge di Ohm si applica all'elettrolita in tutto l'intervallo di queste forze elettromotrici.

La resistenza è minima per una miscela contenente circa $\frac{1}{3}$ di acido solforico.

La resistenza dell'elettrolita diminuisce con l'aumento della temperatura. La proporzione nella quale la conducibilità aumenta per un accrescimento di $1^{\circ} C$ è data dalla Tabella seguente:

⁴*Pogg. Ann.*, vol. CXXXVIII, p. 286, ottobre 1869.

Resistenza delle miscele di Acido Solforico e Acqua a 22° C

in funzione del mercurio a 0° (Kohlrausch e Nippoldt)

Densità specifica a 18,5°	%. di H_2SO_4	Resistenza a 22° C ($Hg = 1$)	Incremento % di conduttività per 1° C
0,9985	0,0	746300	0,47
1,00	0,2	465100	0,47
1,0504	8,3	34530	0,653
1,0989	14,2	18946	0,646
1,1431	20,2	14990	0,799
1,2045	28,0	13133	1,317
1,2631	35,2	13132	1,259
1,3163	41,5	14286	1,410
1,3547	46,0	15762	1,674
1,3994	50,4	17726	1,582
1,4482	55,2	20796	1,417
1,5026	60,3	25574	1,794

Resistenza elettrica dei dielettrici. 366. Sono state compiute numerose misure della resistenza elettrica dalla guttaperca e di altri materiali usati come isolanti nella fabbricazione dei cavi telegrafici, al fine di rendere conto del valore di questi corpi come sostanze isolanti.

Generalmente le prove si fanno dopo che la materia è servita a rivestire il filo conduttore: si prende il filo per uno degli elettrodi e l'acqua di una vasca nella quale il cavo è immerso come altro elettrodo. Si fa passare la corrente attraverso il rivestimento cilindrico fatto di materia isolante, rivestimento che presenta una grande superficie e poco spessore.

Si è riconosciuto che nel momento in cui la forza elettromotrice comincia ad agire, l'intensità indicata al galvanometro non è del tutto costante. Naturalmente il primo effetto prodotto è una corrente passeggera di grande intensità, che apporta tutta la quantità di elettricità necessaria per caricare le superfici della materia isolante, corrispondendo la distribuzione superficiale dell'elettricità alla forza elettromotrice. Questa intensità iniziale è quindi una misura, non della conducibilità, ma della capacità dello strato isolante.

Ma, anche dopo che si è lasciata cadere questa prima corrente, quella che rimane non costante e non indica la reale conducibilità della sostanza. Si è riconosciuto che la corrente continua decresce per almeno una mezzora, di comodo che una misura della resistenza fatta secondo l'intensità dà un valore maggiore di quando si lascia trascorrere un certo tempo rispetto a quando la misura viene fatta dopo aver collegato la pila.

Così, per la composizione isolante di Hooper, la resistenza dopo dieci minuti era quattro volte, e la resistenza dopo diciannove minuti era ventitré volte quella osservata dopo il primo minuto. Se si inverte il senso nel quale agisce la forza elettromotrice, la resistenza cade più in basso della prima volta e risale poi gradualmente.

Questi fenomeni sembrano dovuti a uno stato della guttaperca che, in mancanza di un nome migliore, possiamo chiamare *polarizzazione*, e che possiamo confrontare, da una parte, a quella di una serie di bottiglie di Leyda caricate in cascata, e dall'altra, a quella di una pila secondaria di Ritter.

Se un certo numero di bottiglie di Leyda di grande capacità sono collegate in serie con conduttori di grande resistenza (come fili di cotone umido nelle esperienze di M. Gaugain), una forza elettromotrice agente sulla serie produce una corrente che è indicata dal galvanometro e che diminuisce gradualmente, finché le bottiglie sono interamente cariche.

La resistenza apparente di una simile serie cresce quindi, e, se il dielettrico delle bottiglie è un isolante perfetto, essa aumenta senza limiti. Se si sopprime la forza elettromotrice e si collegano i due estremi della serie, si osserva una corrente di senso inverso nella quale la quantità totale di elettricità è la stessa che nella corrente diretta se l'isolamento è perfetto. Si osservano

effetti analoghi nelle pile secondarie, con questa differenza che l'isolamento finale non è così buono e che la capacità per unità di superficie è enormemente maggiore.

Nel caso di una cavo coperto di guttaperca, si trova che la pila che ha agito per una mezzora ed essendo il filo poi collegato all'elettrodo esterno, si produce una corrente di verso opposto che dura per un certo tempo e riporta poco alla volta il sistema al suo stato iniziale.

Questi fenomeni sono della stessa natura di ciò che si chiama *scarica residua* delle bottiglie di Leyda; ma la polarizzazione è ben più considerevole nella guttaperca, ecc., che nel vetro.

Questo stato di polarizzazione sembra essere una proprietà diretta della materia; poiché, affinché si produca, serve non soltanto una forza elettromotrice, ma anche il passaggio, per spostamento o in qualche altro modo, di una quantità notevole di elettricità, e questo passaggio richiede un tempo notevole. Quando lo stato di polarizzazione si è stabilito, produce una forza elettromotrice interna di verso opposto che dura fino alla formazione di una corrente inversa dove la quantità totale di elettricità è uguale a quella della prima corrente, o finché lo stato di polarizzazione si sia dissipata lentamente per una reale conduzione attraverso il dielettrico.

Tutta la teoria di ciò che è detto la *scarica residua*, *l'assorbimento dell'elettricità*, *l'elettrificazione* o la *polarizzazione* merita uno studio attento che porterà senza dubbio a importanti scoperte relative alla struttura interna dei corpi.

367. Per la maggior parte dei dielettrici, la resistenza diminuisce con il crescere della temperatura.

Così, la resistenza della guttaperca è circa venti volte maggiore a $0^{\circ} C$ che a $24^{\circ} C$. MM. Bright e Clark hanno trovato che la formula seguente rappresenta bene i risultati delle loro esperienze. Se r è la resistenza della guttaperca alla temperatura $T^{\circ} C$, la resistenza sarà, alla temperatura $T + t$

$$R = r \cdot 0,8878^t$$

ma il fattore varia tra 0,8878 e 0,9.

M. Hockin ha verificato che soltanto dopo qualche ora dopo aver preso la sua temperatura la guttaperca presenta la resistenza corrispondente.

La temperatura ha un'azione meno marcata sulla resistenza del caucciù che su quella della guttaperca.

La resistenza di quest'ultima aumenta molto con la pressione.

Ecco la resistenza in ohm di $1 m^3$ di guttaperca impiegata per diversi cavi.⁵

Nome del cavo	
Mare rosso	$0,267 \cdot 10^{12}$ a $0,362 \cdot 10^{12}$
Malta-Alessandria	$1,23 \cdot 10^{12}$
Golfo Persico	$1,80 \cdot 10^{12}$
Secondo cavo atlantico	$3,42 \cdot 10^{12}$
Hooper, golfo Persico	$74,7 \cdot 10^{12}$
Guttaperca a $24^{\circ} C$	$3,53 \cdot 10^{12}$

368. La Tabella seguente, calcolate dalle esperienze di M. Buff descritte al § 271, dà la resistenza in ohm di $1 m^3$ di vetro a diverse temperature.

Temperature	Resistenze
$200^{\circ} C$	227000
250	13900
300	1480
350	1035
400	735

⁵Jenkin's *Cantor Lectures*.

369. M. C. F. Varley⁶ ha recentemente studiato le condizioni del passaggio di corrente nei gas rarefatti; ha trovato che la forza elettromotrice E comprende una costante E_0 e una parte dipendente dall'intensità conformemente alla legge di Ohm.

$$E = E_0 + RC$$

Così serve una forza elettromotrice equivalente a quella di 323 elementi Daniell perché la corrente inizi a passare in un certo tubo; ma basta una forza elettromotrice di 304 elementi per mantenere la corrente. L'intensità di corrente, misurata al galvanometro, era proporzionale al numero di elementi superiori a 304. Per 305 elementi la deviazione era 2; essa era 4 per 306, 6 per 307, e così di seguito, fino a 380 o $304 + 76$, per la quale la deviazione era di 150 o di $76 \times 1,97$.

Da queste esperienze, risulta che vi è una specie di polarizzazione degli elettrodi la cui forza elettromotrice è uguale a quella di 304 elementi Daniell, e che, fino al raggiungimento di questo valore, la pila serve solo a stabilire questo stato di polarizzazione. Quando la polarizzazione massima è stabilita, l'eccesso della forza elettromotrice su quella di 304 elementi Daniell serve a mantenere la corrente, secondo la legge di Ohm.

La legge delle intensità nei gas rarefatti è quindi del tutto simile alla legge delle intensità negli elettroliti, dove abbiamo dovuto tener conto della polarizzazione degli elettrodi.

A tale scopo si collegano i risultati di Thomson, dati al § 57: secondo lui, la forza elettromotrice necessaria per produrre una scintilla nell'aria è proporzionale, non alla distanza, ma alla distanza più una quantità costante. La forza elettromotrice che corrisponde a questa quantità costante può essere vista come rappresentante l'intensità della polarizzazione sugli elettrodi.

370. MM. Wiedemann e Rühlmann hanno recentemente⁷ studiato il passaggio dell'elettricità nei gas. La corrente era fornita da una macchina di Holtz, e la scarica avveniva tra elettrodi sferici, all'interno di un recipiente metallico contenente il gas rarefatto. La scarica era, in generale, discontinua, e l'intervallo compreso tra due scariche si misurava per mezzo di uno specchio girevole montato sull'asse della macchina di Holtz. Si osservava l'immagine della serie di scariche per mezzo di un eliometro a obiettivo diviso, regolato in modo che l'immagine di una delle scariche coincidesse con l'altra immagine della scarica seguente. Si sono ottenuti con questo metodo risulti molto concordanti. Si è trovato che la quantità di elettricità che passa in ogni scarica è indipendente dalla forza della corrente e dalla sostanza degli elettrodi, ma che essa dipende dalla natura e dalla densità del gas, e dalla distanza e forma degli elettrodi.

Queste ricerche confermano il fatto enunciato da Faraday⁸, che la tensione elettrica necessaria perché la scarica distruttiva inizi a prodursi sulla superficie elettrizzata è un poco minore per le cariche negative che per le positive, ma che, col prodursi della scarica, passa ben più elettricità a ogni scarica quando queste iniziano sulla superficie positiva. Questi fatti sostengono l'ipotesi proposta al § 57, che lo strato di gas condensato alla superficie dell'elettrodo gioca un ruolo importante nel fenomeno, e indicano che questa condensazione è maggiore sull'elettrodo positivo.

⁶*Proc. R. S.*, 12 gennaio 1871.

⁷*Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft*, 20 ottobre 1871.

⁸*Exp. Res.*, 1501.

Indice

Avvertenza dell'Editore	2
Prefazione alla prima edizione	3
Prefazione alla seconda edizione	6
Preliminari - Misura delle grandezze	7
Parte 1. ELETTROSTATICA	27
Capitolo 1. Descrizione dei fenomeni	29
Proprietà dei corpi relativamente all'elettricità statica	40
Dielettrici	41
Piano di questa Opera	45
Capitolo 2. Teoria matematica elementare dell'elettricità statica	51
Densità elettrica	51
Capitolo 3. Lavoro elettrico e energia di un sistema di conduttori	71
Capitolo 4. Teoremi generali	83
Capitolo 5. Azione meccanica tra due sistemi elettrizzati	105
Capitolo 6. Punti e linee di equilibrio	115
Capitolo 7. Forma delle superfici equipotenziali e delle linee di induzione in casi semplici	119
Capitolo 8. Semplici casi di distribuzione	127
Due piani paralleli	127
Capitolo 9. Armoniche sferiche	133
Capitolo 10. Superfici di secondo grado omofocali ⁹	161
Capitolo 11. Teoria delle immagini elettriche e dell'inversione elettrica	169
Capitolo 12. Teoria delle funzioni coniugate a due dimensioni	193
Teoria dell'anello di guardia di Thomson	208
Capitolo 13. Strumenti elettrostatici	215
Strumenti elettrostatici	215
Misura della densità superficiale o della distribuzione	228
Parte 2. ELETTROCINETICA	237
Capitolo 14. La corrente elettrica	239
Capitolo 15. Conduzione e resistenza	243
Capitolo 16. Forza elettromotrice prodotta tra i corpi a contatto	247

⁹Questo studio è principalmente preso in prestito dall'Opera così interessante di G. Lamé: *Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes*, Parigi, 1857.

Capitolo 17.	Elettrolisi	253
Capitolo 18.	Polarizzazione elettrolitica	261
Capitolo 19.	Correnti elettriche lineari	269
Capitolo 20.	Conduzione nello spazio a tre dimensioni	275
Capitolo 21.	Resistenza e conducibilità nello spazio a tre dimensioni	281
Capitolo 22.	Conduzione nei mezzi eterogenei	293
Capitolo 23.	Conduzione nei dielettrici	303
Capitolo 24.	Misura della resistenza elettrica	313
Capitolo 25.	Resistenza elettrica dei corpi	331